УДК 517.9

Н. А. Перестюк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
Н. В. Скрипник (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

УСРЕДНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ СИСТЕМ

We give a review of the development of ideas of the averaging method for some classes of set-valued impulsive systems (impulsive differential inclusions, impulsive differential equations and inclusions with Hukuhara derivative, and impulsive fuzzy differential equations and inclusions).

Викладено розвиток ідей методу усереднення для деяких класів імпульсних багатозначних систем (імпульсних диференціальних включень, імпульсних диференціальних рівнянь і включень з похідною Хукухари, імпульсних нечітких диференціальних рівнянь і включень).

Интерес к изучению систем с разрывными траекториями связан с развитием техники, в которой импульсные системы управления, импульсные вычислительные устройства играют значительную роль. Импульсные системы возникают также во многих задачах естествознания, при рассмотрении которых соответствующие математические модели содержат условия, описывающие влияние внешних сил импульсной природы, продолжительностью действия которых можно пренебречь. Как оказалось, наличие импульсного воздействия может существенно усложнить поведение траекторий таких систем даже для случая достаточно простых дифференциальных уравнений.

Отдельные импульсные системы исследованы в работах многих авторов. Многочисленные примеры таких задач можно найти в работах Н. Н. Боголюбова, Н. М. Крылова, Н. Н. Баутина, Б. С. Калитина, А. Е. Кобринского, А. А. Кобринского, Н. А. Перестюка, А. М. Самойленко, А. А. Чикрия, D. D. Bainov, A. B. Dishliev.

В работах Н. Н. Боголюбова, Н. М. Крылова, Е. А. Барбашина, С. Т. Завалищина, А. Н. Сесекина, А. Халаная, Д. Векслера для описания систем с импульсным воздействием применялись дифференциальные уравнения с обобщенными функциями в правой части, при этом исследовались дифференциальные уравнения с импульсами в фиксированные моменты времени и не рассматривался случай зависимости момента импульсного воздействия от фазового вектора.

Другим подходом к исследованию импульсных дифференциальных уравнений является использование классического аппарата теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Первыми работами в данном направлении можно считать работы А. Д. Мышкиса, А. М. Самойленко [1 – 3], в которых с новой точки зрения были изложены общие положения теории систем с импульсным воздействием и определены их основные специфические черты.

В последующем исследования многих авторов были посвящены изучению вопросов устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, развитию теории периодических и почти периодических решений импульсных систем, изучению инвариантных множеств, построению асимптотических разложений по методу малого параметра Крылова – Боголюбова – Митропольского, методу усреднения, проблемам теории оптимального управления, изучению импульсных систем со случайными возмущениями [4 – 15].

Исследования реальных процессов, основанных на идеализированных математических моделях, приводят зачастую к дифференциальным уравнениям с малыми параметрами. Для их исследования широко используются различные асимптотические методы. Выбор конкретного асимптотического метода зависит от структуры дифференциального уравнения, описывающего динамику объекта. В последнее время методы усреднения получили широкое развитие в нелинейной механике и теории колебаний.

Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало в фундаментальной работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [7]. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов дифференциальных уравнений сыграли работы Е. А. Гребеникова, Ю. А. Митропольского, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова и др. [9, 11, 15 – 22].

Обобщение метода усреднения для асимптотического интегрирования импульсных дифференциальных уравнений имеет большое теоретическое и практическое значение по следующим причинам:

из-за сложной структуры импульсных систем качественное исследование связано с большими трудностями, в то время как усредненная система становится безимпульсной;

решение усредненной системы приближает решение исходной системы с любой наперед заданной точностью на асимптотически большом временном интервале.

В данном обзоре рассмотрим развитие идей метода усреднения для некоторых классов импульсных многозначных систем.

1. Импульсные дифференциальные включения. Следует отметить, что исследование динамики любых реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений с однозначной правой частью соответствует идеальной модели, которая не учитывает воздействия случайных помех, ошибок измерений при задании коэффициентов, погрешностей при задании функций, входящих в правые части дифференциальных уравнений. Учет случайных факторов при известных вероятностных характеристиках модели осуществляется с помощью стохастических дифференциальных уравнений, теория которых активно развивается и широко применяется на практике. Естественным обобщением дифференциальных уравнений являются дифференциальные включения, которые дают возможность описывать динамику недетерминированных процессов без использования вероятностных характеристик модели, что во многих случаях позволяет избежать априорных предположений относительно этих характеристик. Результаты исследования модели с использованием аппарата дифференциальных включений позволяют непосредственно оценить сверху все результаты вероятностных моделей, что иногда является достаточным для приложений.

Первые исследования по дифференциальным уравнениям с многозначной правой частью были проведены С. Зарембой и А. Маршо в 30-х гг. XX века. В этих работах была предпринята попытка обобщить существовавшие в то время результаты по теории дифференциальных уравнений на более общий случай: С. Заремба ввел понятие дифференциального уравнения в паратингенциях, а А. Маршо — понятие дифференциального уравнения в контингенциях.

В последующие 25 лет работы в данном направлении не публиковались (отметим лишь работы А. Д. Мышкиса), что было вызвано отсутствием приложений.

В начале шестидесятых годов появился цикл работ Т. Важевского [23] и А. Ф. Филиппова [24], в которых были получены принципиальные результаты по существованию и свойствам решений дифференциальных уравнений с многозначной правой частью (дифференциальных включений). Одним из важнейших из этих результатов было установление связи дифференциальных включений с задачами оптимального управления, что привело к бурному развитию теории дифференциальных включений. Интерес к проблемам управления в годы после Второй мировой войны был связан с острыми потребностями новых технологий, авиации, космонавтики, энергетики. Именно в этот период возникают такие общие методы решения оптимизационных проблем управления, как принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана и др.

Основные результаты теории дифференциальных уравнений с многозначной правой частью изложены в работах В. И. Благодатских, Т. Важевского, А. Дончева, В. С. Мельника, А. И. Панасюка, В. И. Панасюка, В. А. Плотникова, А. А. Толстоногова, О. П. Филатова, А. Ф. Филиппова, М. М. Хапаева, J.-P. Aubin, K. Deimling, M. Kisielewicz и др. [21, 23, 25 – 36]. Авторы исследовали вопросы существования решений дифференциальных включений, краевых задач, монотонных, ограниченных, периодических решений, устойчивости решений, изучали свойства решений и интегральных воронок (компактность, связность, зависимость от начальных условий и от правой части включения, связь между множествами решений включений $\dot{x} \in F(t,x)$ и $\dot{x} \in \mathrm{co}F\big(t,x)\big)$, занимались установлением границы множества достижимости, условий выпуклости семейства решений, усреднением дифференциальных включений и др.

В данном пункте рассмотрим обоснование метода усреднения на конечном и бесконечном промежутках для дифференциальных включений, подвергающихся импульсному воздействию в фиксированные и нефиксированные моменты времени.

Пусть $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(F,G) = \max\Big\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|,\ \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}\|f-g\|\Big\}$, где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим дифференциальное включение с многозначными импульсами

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \quad x(0) \in X_0, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in I_i(x).$$

Если для любых $t \geq 0,\ x \in D$ существует предел

$$\overline{X}(x) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} X(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x)\right), \tag{2}$$

то поставим в соответствие включению (1) усредненное включение

$$\dot{y} \in \varepsilon\overline{X}(y), \qquad y(0) \in X_0. \tag{3}$$

Обоснование схемы полного усреднения на конечном промежутке было впервые проведено в работах В. А. Плотникова, Л. И. Плотниковой и Н. М. Китанова [10, 21, 37 – 40].

Теорема 1 [10, 21, 37, 38]**.** *Пусть в области* $Q = \big\{t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\big\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *многозначные отображения* $X\colon Q \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$, $I_i\colon D \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянной* λ;

2) *равномерно относительно* $(t,x) \in Q$ *существует предел* (2) *и* $\dfrac{1}{T}\, i(t, t+T) \le d < \infty$, *где* $i(t,t+T)$ — *количество точек последовательности* $\{\tau_i\}$ *на промежутке* $(t, t+T]$;

3) *решения включения* (3) *для всех* $x_0 \in D' \subset D$ *при* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *принадлежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью области* D.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого решения* $y(t)$ *включения* (3) *существует решение* $x(t)$ *включения* (1) *такое, что выполняется неравенство*

$$\big\|x(t) - y(t)\big\| < \eta; \tag{4}$$

2) *для любого решения* $x(t)$ *включения* (1) *существует решение* $y(t)$ *включения* (3) *такое, что выполняется неравенство* (4).

Следствием данной теоремы является следующее утверждение.

Теорема 2 [10, 21, 37, 38]**.** *Пусть в области* Q *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1 *и, кроме того*,

3) R*-решения* [29] *включения* (3) *для всех* $x_0 \in D' \subset D$ *при* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *принадлежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью области* D.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого* R*-решения* $Y(t)$ *включения* (3) *существует* R*-решение* $X(t)$ *включения* (1) *такое, что выполняется неравенство*

$$h(X(t), Y(t)) < \eta; \tag{5}$$

2) *для любого* R*-решения* $X(t)$ *включения* (1) *существует* R*-решение* $Y(t)$ *включения* (3) *такое, что выполняется неравенство* (5).

***Замечание* 1.** В случае, когда многозначные отображения $X(t,x)$, $I_i(x)$ и моменты импульсов τ_i периодичны, т. е. существуют $\omega > 0$ и натуральное p такие, что $X(t+\omega, x) \equiv X(t,x)$, $I_{i+p}(x) \equiv I_i(x)$, $\tau_{i+p} = \tau_i + \omega$, можно получить более точные оценки, а именно, показать, что для любого $L > 0$ найдутся $C(L) > 0$ и $\varepsilon_0(L) > 0$ такие, что справедливы теоремы 1, 2 с $\eta = C\varepsilon$.

Данное замечание об улучшении оценки в периодическом случае справедливо и для остальных классов импульсных многозначных систем, поэтому не будем в дальнейшем на нем останавливаться.

В работе [37] рассмотрено обоснование схемы полного усреднения для импульсных дифференциальных включений (1) на бесконечном промежутке.

Теорема 3 [10, 21, 37, 38]**.** *Пусть в области* Q *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1 *и, кроме того*,

3) *для всех* $x_0 \in D' \subset D$ *и* $t \ge 0$ R*-решения включения* (3) *равномерно асимптотически устойчивы и принадлежит вместе с* ρ*-окрестностью области* D.

Тогда для любого $\eta > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \geq 0$ *выполняется неравенство* $h\big(R(t), \bar{R}(t)\big) \leq \eta$, *где* $R(t)$ — R*-решение включения* (1), $\bar{R}(t)$ — R*-решение включения* (3), $R(0) = \bar{R}(0) = x_0$.

Теорема 4 [10, 21, 37, 38]. *Пусть в области* Q *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1 *и, кроме того,*

3) *усредненное включение* (3) *имеет периодическое* R*- решение* $\bar{R}(\tau)$, *траектория которого* C *является асимптотически орбитально устойчивой и принадлежит вместе с некоторой* δ*-окрестностью области* D.

Тогда для любого $\eta \in (0, \delta]$ *можно указать такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\eta_0 \in (0, \eta]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ *и* $t \geq 0$ *выполняется неравенство* $h\big(R(t), C\big) < \eta$, *где* $R(t)$ — R*-решение включения* (1), *которое в начальный момент удовлетворяет условию* $h\big(R(0), C\big) < \eta_1$.

Теорема 5 [10, 21, 37, 38]. *Пусть в области* Q *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1 *и, кроме того,*

3) *включение* (3) *имеет асимптотически устойчивое положение равновесия* $\bar{R}^0$, *которое принадлежит вместе с некоторой* ρ_0*-окрестностью области* D.

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho_0)$ *существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\eta_0 \in (0, \eta]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ *и* $t \geq 0$ *выполняется неравенство* $h\big(R(t), \bar{R}^0\big) < \eta$, *где* $R(t)$ — R*-решение включения* (1), *которое в начальный момент удовлетворяет условию* $h\big(R(0), \bar{R}^0\big) < \eta_1$.

В ряде случаев вместо схем полного усреднения применяются схемы частичного усреднения. Такой вариант метода усреднения бывает полезен, когда для некоторых отображений не существует среднего или же их наличие во включении не усложняет его исследования. В этом случае импульсному дифференциальному включению (1) ставится в соответствие импульсное дифференциальное включение

$$\dot{y} \in \varepsilon \widetilde{X}(t, y), \quad t \neq \nu_j, \qquad y(0) \in X_0,$$

$$\Delta y|_{t=\nu_j} \in K_j(y),$$

где для любых $t \geq 0$, $x \in D$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} h\left(\int\limits_t^{t+T} X(t,x)dt + \sum_{t \leq \tau_i < t+T} I_i(x), \int\limits_t^{t+T} \widetilde{X}(t,x)dt + \sum_{t \leq \nu_j < t+T} K_j(x) \right) = 0.$$

Обоснование схем частичного усреднения для импульсных дифференциальных включений содержится в [37].

В предыдущих теоремах при обосновании метода усреднения для дифференциальных включений существенно использовалось выполнение условия Липшица для исходного или усредненного включения. В [41] условие Липшица было заменено односторонним условием Липшица. В [42] для обыкновенных дифференциальных уравнений получено доказательство аналогичных результатов без использования условия Липшица. В [43] доказан аналог теоремы Красносельского – Крейна для импульсных дифференциальных включений.

Теорема 6 [10, 38, 43]. *Пусть в области* Q *выполнены следующие условия*:

а) *многозначные отображения* $X(t,x), I_i(x)$ *равномерно ограничены постоянной* M; $X(t,x)$ *непрерывно по* t *и равномерно непрерывно по* x *равномерно относительно* t; $I_i(x)$ *равностепенно непрерывны*;

б) *равномерно относительно* $(t,x) \in Q$ *существует предел* (2) *и* $\dfrac{1}{T}\, i(t,t+T) \le d < \infty$, *где* $i(t,t+T)$ — *количество точек последовательности* $\{\tau_i\}$ *на промежутке* $(t,t+T]$;

в) *решения включения* (3) *для всех* $x_0 \in D' \subset D$ *при* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *принадлежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью области* D;

г) *модуль непрерывности многозначного отображения* $\overline{X}(x)$ *является функцией Камке* [26].

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *для любого решения* $x(t)$ *включения* (1), *удовлетворяющего условию* $x(0) = x_0$, *существует решение включения* (3) *такое, что на промежутке* $\left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *выполняется неравенство* (4).

В работах В. А. Плотникова и Н. М. Китанова для дифференциальных включений, подвергающихся импульсному воздействию в нефиксированные моменты времени, рассматривался вопрос обоснования метода усреднения в форме теоремы о непрерывной зависимости решений от малого параметра.

Рассмотрим дифференциальные включения с импульсными воздействиями

$$\dot{x} \in F^1(t,x,\varepsilon), \qquad x(0) = x_0, \quad t \ne \varepsilon\tau_i^1(x), \quad t \ne \sigma_i^1(x), \tag{6}$$

$$\Delta x|_{t=\varepsilon\tau_i^1(x)} \in \varepsilon I_i^1(x), \qquad \Delta x|_{t=\sigma_p^1(x)} \in K_p^1(x).$$

Включению (6) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{y} \in F^2(t,y,\varepsilon), \qquad y(0) = x_0, \quad t \ne \varepsilon\tau_i^2(x), \quad t \ne \sigma_i^2(y), \tag{7}$$

$$\Delta y|_{t=\varepsilon\tau_i^2(y)} \in \varepsilon I_i^2(y), \qquad \Delta y|_{t=\sigma_p^2(y)} \in K_p^2(y),$$

где $t \in [0,L]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, τ_i^j, $\sigma_i^j \colon D \to \mathbb{R}$ — импульсные поверхности, $F^j \colon [0,L] \times D \times \times \mathbb{R}_+ \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$, I_i^j, $K_p^j \colon D \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ — многозначные отображения, $i = \overline{1,k}$, $p = \overline{1,r}$, $j = 1,2$.

Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h\left(\frac{1}{\Delta}\left(\int\limits_t^{t+\Delta} F^1(t,x,\varepsilon)\,dt + \varepsilon \sum_{t<\varepsilon\tau_i(x)<t+\Delta} I_i^1(x)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{\Delta}\left(\int\limits_t^{t+\Delta} F^2(t,x,\varepsilon)\,dt + \varepsilon \sum_{t<\varepsilon\tau_i^2(x)<t+\Delta} I_i^2(x)\right)\right) = 0. \tag{8}$$

Пусть $J_j(t,t+\Delta)$, $j = 1,2$, — число асимптотически малых импульсов на промежутке $(t,t+\Delta]$ $(0 \le t,\ t+\Delta \le L)$ решений (6) и (7) соответственно. Обозначим через $T_D(x)$ касательный конус в точке $x \in D$, т. е.

$$T_D(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \colon \lim_{s\downarrow 0} s^{-1} \inf_{z\in D} |x + sy - z| = 0 \right\}.$$

Теорема 7 [10, 21, 38, 40, 44]. *Пусть в области* $Q = \{t \in [0, L],\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *многозначные отображения* $F^j(t, x, \varepsilon)$, $I_i^j(x)$ *и функции* $\tau_i^j(x)$ *удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянной* λ, *непрерывны по t и, кроме того,* $F^j(t, x, \varepsilon) \subset T_D(x)$, $x + I_i^j(x) \subset \subset D$;

2) *многозначные отображения* $F^j(t, x, \varepsilon)$ *и* $I_i^j(x)$ *равномерно ограничены постоянной* M;

3) *предел* (8) *существует равномерно относительно* $(t, x) \in Q$;

4) *числа* $J_j(t, t+\Delta)$, $j = 1, 2$, *удовлетворяют неравенствам* $\dfrac{1}{\Delta} J_j(t, t+\Delta) \le \dfrac{A}{\varepsilon} < \infty$;

5) *поверхности* $t = \varepsilon\tau_i^j(x)$ *не пересекаются между собой и для каждого* $x \in D$, $z \in I_i^j$, $j = 1, 2$, *выполняются неравенства* $\tau_i^j(x) \ge \tau_i^j(x+z)$, $\left|\tau_{i+1}^j(x) - \tau_i^j(x)\right| \le M$;

6) *отображения* $K_p^j(x)$ *и функции* $\sigma_p^j(x)$ *удовлетворяют условию Липшица с постоянной* μ, *кроме того,* $x + K_p^j(x) \subset D$, $x \in D$;

7) *поверхности* $t = \sigma_p^j(x)$ *не пересекаются между собой и* $\sigma_p^j(x) \ge \sigma_p^j(x+z)$ *для каждого* $x \in D$ *и* $z \in K_p^j$, $j = 1, 2$;

8) *выполняются неравенства*

$$\mu M < 1, \qquad h\big(K_p^1(x), K_p^2(x)\big) \le \eta, \qquad \left|\sigma_p^1(x) - \sigma_p^2(x)\right| \le \eta, \qquad \|x_0 - y_0\| \le \delta.$$

Тогда для каждого $\xi > 0$ *существуют* $\eta > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что*:

1) *для каждого решения* $x(t)$ *включения* (6) *существует решение* $y(t)$ *включения* (7), *для которого справедлива оценка*

$$\big\|x(t) - y(t)\big\| \le \eta, \qquad t \in [0, L] \setminus \left\{ \bigcup_p \left[s_p^2 - \delta_p, s_p^2 + \delta_p\right] \bigcup_i \left[t_i^2 - \Delta_i, t_i^2 + \Delta_i\right] \right\}, \tag{9}$$

где $s_p^2 = \sigma_p(y((s_p^2)))$, $t_i^2 = \tau_i(y((t_i^2)))$, *причем* $\sum_p \delta_p + \sum_i \Delta_i < C\eta$;

2) *для каждого решения* $y(t)$ *включения* (7) *существует решение* $x(t)$ *включения* (6), *для которого справедлива оценка* (9).

***Замечание* 2.** Как и в случае дифференциальных уравнений [9], можно показать, что из теоремы 7 следуют теоремы об обосновании метода усреднения для дифференциальных включений с импульсами в нефиксированные моменты времени.

2. Импульсные дифференциальные уравнения с производной Хукухары. Развитие теории многозначных отображений привело к вопросу о том, что понимать под производной от многозначного отображения. Основной причиной, по которой возникают трудности при введении данного понятия, является нелинейность пространства $\mathrm{comp}(R^n)$, что влечет за собой отсутствие операции вычитания. Поэтому существует несколько подходов к определению разности двух множеств и, соответственно, производной многозначного отображения: M. Hukuhara ввел производную Хукухары, T. F. Bridgland — Huygens-производную, Ю. Н. Тюрин и H. T. Banks, M. Q. Jacobs – π-производную, которая использует теорему вложения Радстрема, А. В. Плотников – T-производную, А. Н. Витюк — дробную производную для многозначных отображений, B. Bede, S. G. Gal ввели обобщенную производную для интервальных отображений, а А. В. Плотников и Н. В. Скрипник — обобщенную производную для многозначных отображений. Возьмем за основу производную Хукухары.

Определение 1 [45]. *Пусть* X, Y *принадлежат* $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. *Множество* $Z \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ *такое, что* $X = Y + Z$, *называется разностью Хукухары множеств* X *и* Y *и обозначается* $X \overset{h}{-} Y$.

Определение 2 [46]. *Многозначное отображение* $X\colon \mathbb{R} \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ *дифференцируемо по Хукухаре в точке* $t_0 \in \mathbb{R}$, *если существует* $D_H X(t_0) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ *такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta\to 0_+} \Delta^{-1}\Big(X(t_0+\Delta) \overset{h}{-} X(t_0)\Big), \qquad \lim_{\Delta\to 0_+} \Delta^{-1}\Big(X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0-\Delta)\Big) \tag{10}$$

существуют и равны $D_H X(t_0)$.

В 1969 г. F. S. de Blasi и F. Iervolino рассмотрели дифференциальные уравнения с производной Хукухары [46]. В дальнейшем многие авторы изучали вопросы существования, единственности и свойства решений дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, уравнений высших порядков, импульсных и управляемых уравнений с производной Хукухары (см. библиографию в [47]).

В работах В. А. Плотникова и П. М. Китанова было получено обоснование метода полного усреднения для импульсных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, правые части которых удовлетворяют условию Липшица [10]. Рассмотрим случай, когда правые части неусредненного уравнения не удовлетворяют условию Липшица.

Рассмотрим импульсные дифференциальные уравнения с производной Хукухары вида

$$D_H X(t) = \varepsilon F(t, X), \qquad t \neq \tau_i, \quad X(0) = X_0, \tag{11}$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i} = \varepsilon I_i(X). \tag{12}$$

Системе (11), (12) поставим в соответствие частично усредненную систему

$$D_H Y(t) = \varepsilon \overline{F}(t, Y), \qquad t \neq \sigma_j, \quad Y(0) = Y_0, \tag{13}$$

$$\Delta Y|_{t=\sigma_j} = \varepsilon \overline{I}_j(Y), \tag{14}$$

где

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} h\left(\int_0^T F(t,X)dt + \sum_{0\le\tau_i<T} I_i(X), \int_0^T \overline{F}(t,X)dt + \sum_{0\le\sigma_i<T} \overline{I}_j(X)\right) = 0. \tag{15}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений задач (11), (12) и (13), (14) на конечном промежутке.

Теорема 8 [48]. *Пусть в области* $Q = \{t \ge 0, X \in D \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)\}$ *выполняются следующие условия*:

1) *многозначное отображение* $F(t, X)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* X *и равномерно непрерывно по* X *равномерно относительно* t;

2) *многозначные отображения* $I_i(X)$ *равностепенно непрерывны*;

3) *многозначное отображение* $\overline{F}(t, X)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* X *и удовлетворяет по* X *условию Липшица с ограниченной суммируемой функцией* $\lambda(t) \ge 0$;

4) *многозначные отображения* $\overline{I}_j(X)$ *удовлетворяют условию Липшица с постоянной* λ;

5) *существуют суммируемая функция* $M(t) \geq 0$ *и постоянная* $M_0 \geq 0$ *такие, что*

$$|F(t,X)| \leq M(t), \qquad \left|\overline{F}(t,X)\right| \leq M(t), \qquad |I_i(X)| \leq M_0, \qquad \left|\overline{I}_i(X)\right| \leq M_0,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} M(t)dt \leq M_0(t_2 - t_1)$$

для любого конечного промежутка $[t_1, t_2]$;

6) *равномерно относительно* $X \in D$ *существует предел* (15) *и* $\frac{1}{T}i(t, t+T) \leq d$, $\frac{1}{T}j(t, t+ \\ + T) \leq d$, *где* $i(t, t+T)$, $j(t, t+T)$ — *количество точек последовательностей* $\{\tau_i\}$ *и* $\{\sigma_j\}$ *соответственно на промежутке* $(t, t+T]$;

7) *решение* $Y(\cdot)$ *системы* (13), (14) *с начальным условием* $Y(0) = X_0 \in D' \subset D$ *определено при* $t \geq 0$ *для всех* $\varepsilon \in (0, \theta]$ *и лежит в области* D *с некоторой* ρ*-окрестностью.*

Тогда для любых сколь угодно малого $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \theta]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *для всех* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *выполняется неравенство* $h\big(X(t), Y(t)\big) \leq \eta$, *где* $X(\cdot)$ *и* $Y(\cdot)$ — *решения систем* (11), (12) *и* (13), (14) *соответственно с начальными условиями* $X(0) = Y(0) \in D'$.

***Замечание* 3.** Пусть

$$\overline{F}(t,X) \equiv F_0(X) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\int\limits_0^T F(t,X)dt + \sum_{0\leq\tau_i<T} I_i(X)\right), \quad \overline{I}_i(X) \equiv \{0\}.$$

Тогда соотношение (15) выполняется и теорема 8 обосновывает схему полного усреднения.

3. Импульсные дифференциальные включения с производной Хукухары. В [49] А. В. Плотниковым было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары, получены некоторые свойства их решений и рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа включений в стандартной форме [50, 51]. A. R. Dabrowska и T. Janiak получили некоторые аналогичные результаты для дифференциальных включений с производной Хукухары с запаздыванием. В [52] рассмотрено обоснование метода полного и частичного усреднения для дифференциальных включений с производной Хукухары, подвергающихся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени.

Обозначим через $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)\big(\mathrm{cocc}(\mathbb{R}^n)\big)$ пространство, состоящее из всех непустых компактных (и выпуклых) подмножеств пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой

$$\chi(A, B) = \max\Big\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} h(a,b), \max_{b\in B}\min_{a\in A} h(a,b)\Big\}.$$

Рассмотрим дифференциальное включение с производной Хукухары с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени вида

$$D_H X \in \varepsilon F(t,X) \quad t \neq \tau_i, \qquad X(0) = X_0, \tag{16}$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i} \in I_i(x).$$

Если для любых $t \geq 0,\ X \in D \subset \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ существует предел

$$F_0(X) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} F(t,X)dt + \frac{1}{T} \sum_{t \leq \tau_i < t+T} I_i(X) \right), \tag{17}$$

то включению (16) поставим в соответствие усредненное включение

$$D_H Y \in \varepsilon \bar{F}(Y), \qquad Y(0) = X_0. \tag{18}$$

Теорема 9 [52]. *Пусть в области* $Q = \big\{t \geq 0, X \in D \subset \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)\big\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *многозначные отображения* $F\colon Q \to \operatorname{cocc}(\mathbb{R}^n)$, $I_i\colon D \to \operatorname{cocc}(\mathbb{R}^n)$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по* X *с постоянной* λ;

2) *равномерно относительно* $(t, X) \in Q$ *существует предел* (17) *и* $\dfrac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq d < \infty$, *где* $i(t, t+T)$ — *количество точек последовательности* $\{\tau_i\}$ *на промежутке* $(t, t+T]$;

3) *решения включения* (17) *для всех* $X_0 \in D' \subset D$ *при* $t \in \big[0, L\varepsilon^{-1}\big]$ *принадлежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью области* D.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in \big[0, L\varepsilon^{-1}\big]$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого решения* $Y(t)$ *включения* (18) *существует решение* $X(t)$ *включения* (16) *такое, что выполняется неравенство*

$$h\big(X(t), Y(t)\big) < \eta; \tag{19}$$

2) *для любого решения* $X(t)$ *включения* (16) *существует решение* $Y(t)$ *включения* (18) *такое, что выполняется неравенство* (19).

Таким образом, справедлива оценка $\chi\big(R(t),\ R_0(t)\big) < \eta$, *где* $R(t)$ — *сечение семейства решений исходного включения,* $R_0(t)$ — *сечение семейства решений усредненного включения.*

Для дифференциальных включений с производной Хукухары можно проводить частичное усреднение, т. е. усреднять только некоторые слагаемые или сомножители [52].

4. Нечеткие импульсные дифференциальные уравнения. Теория нечетких множеств начала развиваться с 1965 г. после работы L. A. Zadeh [53] в результате обобщения, переосмысления достижений: многозначной логики, позволившей перейти к произвольному множеству значений истинности (трехзначная логика Лукасевича, k-значная логика Поста, бесконечнозначная логика); теории вероятностей и математической статистики, где аккумулируются всевозможные способы обработки экспериментальных данных (гистограммы, функции распределения) и указываются пути формализации неопределенностей; дискретной математики (теория матриц, теория автоматов, теория графов); многозначного анализа, предложившего инструмент для формулирования адекватных моделей при решении множества практических задач. Формализации нечетких понятий позволяют приближенно описывать поведение систем настолько сложных и плохо определенных, что они не поддаются точному математическому анализу. В ряде случаев такое описание является единственно возможным, так как в реальных ситуациях закономерности, ограничения, критерии выбора в большей части субъективны и точно не определены (см. обзоры [54 – 56]).

В 1983 г. M. L. Puri, D. A. Ralescu [57] ввели понятие H-производной и интеграла для нечетких отображений, в котором использовался подход M. Hukuhara и R. J. Aumann для α-срезок нечетких отображений. Аналогично, как и в теории многозначных отображений, рассматриваются и другие понятия производной для нечетких отображений.

В 1987 г. O. Kaleva в работе [58] рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения на основе H-производной. В дальнейшем в работах А. А. Мартынюка, А. В. Плотникова, Н. В. Скрипник, В. И. Слынько, O. Kaleva, J. Y. Park, H. K. Han, S. Seikkala, C. X. Wu, S. J. Song и др. были доказаны теоремы существования и изучались свойства решений для нечетких дифференциальных уравнений на основе других понятий производной, получены условия устойчивости решений, рассмотрены уравнения высшего порядка, интегро-дифференциальные, импульсные, управляемые нечеткие уравнения, возможность применения метода усреднения для таких уравнений (см. [47, 59 – 63] и библиографию в них).

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $u\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u полунепрерывно сверху по Бэру, т. е. для любого $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\tilde{y},\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y - \tilde{y}\| < \delta$ выполняется неравенство $u(y) < u(\tilde{y}) + \varepsilon$;

2) u нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(y_0) = 1$;

3) u нечетко выпукло, т. е. для любых $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $u\big(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big) \geq \min\big\{u(y_1), u(y_2)\big\}$;

4) замыкание множества $\big\{y \in \mathbb{R}^n\colon u(y) > 0\big\}$ компактно.

Обозначим через $[u]^\alpha$ множество $\{y \in \mathbb{R}^n\colon u(y) \geq \alpha\}$ при $0 < \alpha \leq 1$ и замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n\colon u(y) > 0\}$ при $\alpha = 0$. Будем называть множество $[u]^\alpha$ α-срезкой нечеткого множества u.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является элемент $0(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D\colon \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to [0,+\infty)$, положив

$$D(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h\big([u]^\alpha, [v]^\alpha\big).$$

Теорема 10 [63]. *Метрическое пространство $(\mathbb{E}^n, D)$ является полулинейным полным метрическим пространством.*

Определение 3 [63]. *Отображение $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ называется измеримым (непрерывным), если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ измеримо (непрерывно).*

Определение 4 [63]. *Отображение $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ называется интегрально ограниченным, если существует суммируемая функция $h(\cdot)$ такая, что $\|y\| \leq h(t)$ для всех $y \in f_0(t)$.*

Определение 5 [63]. *Интегралом от отображения $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ на отрезке $[t_0,T]$ называется элемент $g = \displaystyle\int_{t_0}^{T} f(t)dt \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[g]^\alpha = \displaystyle\int_{t_0}^{T} f_\alpha(t)\,dt$ для всех $\alpha \in [0,1]$.*

Определение 6 [63]. *Отображение $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым в точке $t \in [t_0,T]$, если для любого $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке t и семейство $\big\{D_H f_\alpha(t)\colon \alpha \in [0,1]\big\}$ определяет некоторый элемент $f'(t) \in \mathbb{E}^n$.*

Если $f\colon [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ дифференцируемо в точке $t \in [t_0, T]$, то элемент $f'(t)$ будем называть нечеткой производной от $f(t)$ в точке t.

Определение 7. *Отображение* $f\colon [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ *называется абсолютно непрерывным на* $[t_0, T]$, *если существует интегрируемое отображение* $g\colon [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ *такое, что*

$$f(t) = f(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g(s)ds \qquad \text{для всех} \quad t \in [t_0, T].$$

Рассмотрим нечеткое импульсное дифференциальное уравнение вида

$$x' = f(t, x), \quad t \neq \tau_i, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{20}$$

$$x(\tau_i + 0) = \psi\big(x(\tau_i)\big), \tag{21}$$

где $t \in I$ — время, $x \in G \subset \mathbb{E}^n$ — фазовая переменная, $f\colon I \times G \to \mathbb{E}^n$ — нечеткое отображение, $\psi_i\colon G \to \mathbb{E}^n$, $i = \overline{1, m}$, — импульсные нечеткие отображения, $(t_0, x_0) \in I \times G$ — начальное условие,$\tau_i \in I$, $i = \overline{1, m}$, — моменты импульсов, занумерованные в возрастающем порядке.

Определение 8. *Отображение* $x\colon I_0 \to \mathbb{E}^n$, $I_0 \subset I$, *называется решением задачи* (20), (21), *если оно непрерывно, удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x'(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds$$

на промежутках между импульсами и условию скачка (21) *в точках импульса.*

Рассмотрим обоснование схемы частичного усреднения для нечетких дифференциальных уравнений с импульсами в фиксированные моменты времени:

$$x' = \varepsilon f(t, x), \quad t \neq \tau_i, \qquad x(0) = x_0, \tag{22}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = \varepsilon I_i(x), \tag{23}$$

где $t \geq 0$, $x \in G \subset \mathbb{E}^n$, $f\colon \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{E}^n$, $I_i\colon G \to \mathbb{E}^n$ — нечеткие отображения, $\tau_i \in \mathbb{R}_+$ — моменты импульсов, занумерованные в возрастающем порядке.

Системе (22), (23) поставим в соответствие частично усредненную систему

$$y' = \varepsilon \overline{f}(t, y), \quad t \neq \sigma_j, \qquad y(0) = x_0, \tag{24}$$

$$\Delta y|_{t=\sigma_j} = \varepsilon \overline{I}_j(y), \tag{25}$$

где отображения $\overline{f}\colon \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{E}^n$, $\overline{I}_j\colon G \to \mathbb{E}^n$ таковы, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D \left(\int\limits_0^T f(t, x)dt + \sum_{0 \leq \tau_i < T} I_i(x), \int\limits_0^T \overline{f}(t, x)dt + \sum_{0 \leq \sigma_j < T} \overline{I}_j(x) \right) = 0, \tag{26}$$

моменты импульсов $\sigma_j \in \mathbb{R}_+$ занумерованы множеством натуральных чисел в возрастающем порядке.

Справедлива следующая теорема, устанавливающая близость решений задач (22), (23) и (24), (25) на конечном промежутке.

Теорема 11 [47]. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0, x \in G \subset \mathbb{E}^n\}$ выполнены следующие условия*:

1) *отображение $f(t,x)$ измеримо по t при каждом фиксированном x и равномерно непрерывно по x равномерно относительно t*;

2) *отображения $I_i(x)$ равностепенно непрерывны*;

3) *отображение $\overline{f}(t,x)$ измеримо по t при каждом фиксированном x и удовлетворяет по x условию Липшица с ограниченной суммируемой функцией $\lambda(t) \geq 0$*;

4) *отображения $\overline{I}_j(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ*;

5) *отображения $f(t,x)$ и $\overline{f}(t,x)$ интегрально ограничены, отображения $I_i(x)$, $\overline{I}_j(x)$ равномерно ограничены, т. е. существуют суммируемая функция $M(t) \geq 0$ и постоянная $M_0 \geq 0$ такие, что*

$$D\big(f(t,x),\hat{0}\big) \leq M(t), \qquad D\big(\overline{f}(t,x),\hat{0}\big) \leq M(t), \qquad D\big(I_i(x),\hat{0}\big) \leq M_0, \qquad D\big(\overline{I}_j(x),\hat{0}\big) \leq M_0$$

и $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \leq M_0(t_2 - t_1)$ *на любом конечном промежутке* $[t_1, t_2]$;

6) *равномерно относительно x в области G существуют предел* (26) *и постоянная* $0 \leq$ $\leq d < \infty$ *такая, что* $\dfrac{1}{T}i(t,t+T) \leq d$, $\dfrac{1}{T}j(t,t+T) \leq d$, *где $i(t,t+T)$ и $j(t,t+T)$ — количество точек последовательностей $\{\tau_i\}$ и $\{\sigma_j\}$ соответственно на промежутке $(t,t+T]$*;

7) *решение $y(\cdot)$, $y(0) = x_0 \in G' \subset G$, системы* (24), (25) *при $t \geq 0$ для всех $\varepsilon \in (0,\theta]$ принадлежит вместе с некоторой ρ-окрестностью области G.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0,\theta]$, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ на отрезке $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ выполняется неравенство $D\big(x(t), y(t)\big) \leq \eta$, где $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ — решения систем (22), (23) *и* (24), (25) *соответственно.*

***Следствие* 1.** *Пусть* $\overline{f}(t,x) \equiv f_0(x) = \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\left(\displaystyle\int_0^T f(t,x)dt + \sum\nolimits_{0 \leq \tau_i < T} I_i(x)\right)$, $\overline{I}_i(x) \equiv \hat{0}$. *Тогда соотношение* (26) *выполнено и теорема* 11 *обосновывает схему полного усреднения.*

5. Импульсные нечеткие дифференциальные включения. В 1989 г. В. А. Байдосов [64, 65] и J.-P. Aubin [66] ввели понятие дифференциального включения с нечеткой правой частью, свойства решений которых впоследствии изучались в работах S. Abbasbandy, Y. Chalco-Cano, E. Hullermeier, V. Lakshmikantham, J.J. Nieto, J.Y. Park, H. Roman-Flores, A. A. Tolstonogov и др. с помощью сведения их к обычным дифференциальным включениям на уровне α-срезок, а в 2005 г. в работах В. С. Васильковской, И. В. Молчанюк, А. В. Плотникова были введены управляемые дифференциальные включения с нечеткой правой частью.

В 2008 г. Н. В. Скрипник ввела понятие нечеткого дифференциального включения, были рассмотрены различные понятия решения [67 – 69] и связь между ними, доказаны теоремы существования и непрерывной зависимости для классических решений [68].

Рассмотрим пространство $\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)\,[\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)]$, состоящее из всех подмножеств F пространства $\mathbb{E}^n$ таких, что для любого $\alpha \in [0,1]$ множество, составленное из α-срезок элементов множества F, является непустым (и выпуклым) компактом в пространстве $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ $\big($т. е. элементом пространства $cc(\mathbb{R}^n)\,[\mathrm{cocc}(\mathbb{R}^n)]\big)$. В этом пространстве определим операции суммы и умножения на скаляр.

Определение 9 [68]**.** *Суммой двух множеств* F *и* G *из пространства* $\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$ *называется множество* $F+G=\{f+g\colon f\in F, g\in G\}$.

Определение 10 [68]**.** *Произведением множества* $F\in\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$ *на число* $\lambda\in\mathbb{R}$ *называется множество* $G=\lambda F=\{g=\lambda f\colon f\in F\}$.

Лемма 1 [68]**.** *Если* F, $G\in\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)\big(\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)\big)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, *то*

$$F+G,\quad \lambda F\in\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)\big(\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)\big).$$

Определение 11 [68]**.** *Метрикой, или расстоянием, между двумя множествами* F, $G\in$ $\in\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$ *назовем величину* $d(F,G)=\max\Big\{\max_{f\in F}\min_{g\in G}D(f,g),\max_{g\in G}\min_{f\in F}D(f,g)\Big\}$.

Рассмотрим нечеткое дифференциальное включение

$$x'\in F(t,x),\qquad x(t_0)=x_0, \tag{27}$$

где $t\in I\subset\mathbb{R}$, $x\in G\subset\mathbb{E}^n$, $t_0\in I$, $x_0\in G$ — начальные условия, $F\colon I\times G\to\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$.

Определение 12. *Абсолютно непрерывное отображение* $x(\cdot)$ *называется обычным решением дифференциального включения* (27), *если* $x'(t)$ *принадлежит* $F\big(t,x(t)\big)$ *почти всюду на* I.

В [68] доказана теорема существования и единственности решения нечеткого дифференциального включения, а также непрерывной зависимости решения от начальных данных и правых частей.

Рассмотрим обоснование схемы полного усреднения на конечном промежутке для нечеткого импульсного дифференциального включения

$$x'\in\varepsilon F(t,x),\quad t\neq\tau_i,\qquad x(0)=x_0, \tag{28}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i}\in\varepsilon I_i(x).$$

Если для любых $t\geq 0$, $x\in G$ существует предел

$$\bar{F}(x)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}F(t,x)dt+\frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T}I_i(x)\right), \tag{29}$$

то включению (28) поставим в соответствие усредненное включение

$$y'\in\varepsilon\bar{F}(y),\qquad y(0)=x_0. \tag{30}$$

Теорема 12 [70]**.** *Пусть в области* $Q=\{t\geq 0, x\in G\subset\mathbb{E}^n\}$ *выполняются следующие условия*:

1) *нечеткие многозначные отображения* $F\colon Q\to\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)$, $I_i\colon G\to\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянной* λ;

2) *равномерно относительно* $(t,x)\in Q$ *существует предел* (29) *и* $\dfrac{1}{T}\,i(t,t+T)\leq\nu<\infty$, *где* $i(t,t+T)$ — *количество точек последовательности* τ_i *на промежутке* $(t,t+T]$;

3) *для любых* $x_0\in G'\subset G$ *и* $t\geq 0$ *решения включения* (30) *принадлежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью области* G.

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого решения* $y(t)$ *включения* (30) *существует решение* $x(t)$ *включения* (28) *такое, что*

$$D\big(x(t), y(t)\big) < \eta; \tag{31}$$

2) *для любого решения* $x(t)$ *включения* (28) *существует решение* $y(t)$ *включения* (30) *такое, что справедлива оценка* (31).

Аналогично можно рассмотреть обоснование схемы частичного усреденения для нечетких импульсных дифференциальных включений [71].

6. Заключение. В данном обзоре приведены результаты по обоснованию метода усреднения для некоторых классов импульсных многозначных систем: импульсных дифференциальных включений, импульсных дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары, импульсных нечетких дифференциальных уравнений и включений.

1. *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. – 1960. – **1**, № 2. – С. 233 – 237.
2. *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.* Случайные толчки в линейных динамических системах // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – С. 64 – 81.
3. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. – 1967. – **74**, № 2. – С. 202 – 208.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
5. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
6. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н., Дрозденко С. Е.* Динамические системы с импульсной структурой. – Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1983. – 112 с.
7. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
8. *Кривонос Ю. Г., Матичин И. И., Чикрий А. А.* Динамические игры с разрывными траекториями. – Киев: Наук. думка, 2005. – 220 с.
9. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
10. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
11. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
12. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем / Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
13. *Chikrii A.A., Matychyn I, Chikrii K.* Differencial games with impulse control // Adv. Dynam. Game Theory, Ann. Int. Soc. Dynam. Games. – Boston: Birkhäuser, 2007. – **9**. – 735 p.
14. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 275 p.
15. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
16. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
17. *Митропольский Ю. А., Хома Г. Н.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Наук. думка, 1983. – 216 с.
18. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
19. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления. – Одесса: Одес. гос. ун-т, 1976. – 103 с.
20. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
21. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.

22. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
23. *Wazewski T.* Selected papers. – Warszawa: PWN, 1990. – 572 p.
24. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1967. – № 3. – С. 16 – 26.
25. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. Линейная теория. – М.: Высш. шк., 2001. – 239 с.
26. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзор. ст. 2. К 50-летию института (Труды Мат. ин-та АН СССР, Т. 169). – М.: Наука, 1985. – С. 194 – 252.
27. *Дончев А.* Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности / Пер. с англ. А. В. Фролова. – М.: Мир, 1987. – 156 с.
28. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – Киев: Наук. думка, 1999. – 632 с.
29. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977. – 208 с.
30. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. – Минск: Наука и техника, 1986. – 296 с.
31. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
32. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* Усреднение систем дифференциальных включений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 160 с.
33. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
34. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. – Springer-Verlag, 1984. – 348 p.
35. *Deimling K.* Multivalued differential equations. – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 257 p.
36. *Kisielewicz M.* Differential inclusion and optimal control. – Warszawa: PWN, 1991. – 239 p.
37. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1526 – 1532.
38. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities // De Gruyter Stud. Math. – Berlin; Boston: Walter De Gruyter GmbH and Co., 2011. – **40**. – 307 p.
39. *Plotnikov V. A., Ivanov R., Kitanov N.* Differential inclusions with finite number of impulses in fixed moments // Discrete Math. and Appl. Res. Math. – 1995. – № 5. – P. 246 – 254.
40. *Plotnikov V. A., Ivanov R. P., Kitanov N. M.* Method of averaging for impulsive differential inclusions // Pliska Stud. Math. Bulg. – 1998. – № 12. – P. 43 – 55.
41. *Donchev T.* Functional differential inclusions involving dissipative and compact multifunctions // Glas. mat. – 1998. – № 33(53). – P. 51 – 60.
42. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, № 3(65). – С. 147 – 152.
43. *Плотникова Н. В.* Усреднение импульсных дифференциальных включений // Мат. студ. – 2005. – **23**, № 1. – С. 52 – 56.
44. *Плотников В. А., Китанов Н. М.* Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 5. – С. 71 – 85.
45. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.
46. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. – 1969. – **2**, № 4 – 5. – P. 491 – 501.
47. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009.
48. *Скрипник Н. В.* Усереднення імпульсних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари // Вісн. Чернів. нац. ун-ту. – 2008. – Вип. 374. – С. 109 – 115.
49. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления. – Одесса, 1982. – 35 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2036-82. – 35 с.
50. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. – 1989. – **42**, № 1. – С. 121 – 125.

51. *Плотников А. В.* Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1994.
52. *Скрипник Н. В.* Усреднение импульсных дифференциальных включений с производной Хукухары // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 416 – 432.
53. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338 – 353.
54. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
55. *Нечеткие* множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под. ред. Д. А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
56. *Dubois D., Prade H.* Theory and applications // Math. in Sci. and Eng. – New York; London: Acad. Press, 1980. – **144**. – 393 p.
57. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1983. – **91**. – P. 552 – 558.
58. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – **24**, № 3. – P. 301 – 317.
59. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об ограниченности движений механических систем, описываемых нечеткими обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 12. – С. 93 – 99.
60. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* О глобальном существовании решений нечетких дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 10. – С. 1324 – 1336.
61. *Benchohra M., Nieto J. J., Ouahab A.* Fuzzy solutions for impulsive differential equations // Communs Appl. Anal. – 2007. – **11**, № 3-4. – P. 379 – 394.
62. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor and Francis Publ., 2003. – 178 p.
63. *Park J. Y., Han H. K.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – № 110. – P. 69 – 77.
64. *Байдосов В. А.* Дифференциальные включения с нечеткой правой частью // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 4. – С. 781 – 783.
65. *Байдосов В. А.* Нечеткие дифференциальные включения // Прикл. матемаматика и механика. – 1990. – **54**, вып 1. – С. 12 – 17.
66. *Aubin J.-P.* Fuzzy differential inclusions // Probl. Control Inform. Theory. – 1990. – **19**, № 1. – P. 55 – 67.
67. *Скрипник Н. В.* Существование классических решений нечетких дифференциальных включений // Укр. мат. вест. – 2008. – **5**. – С. 244 – 257.
68. *Скрипник Н. В.* Квазирешения нечетких дифференциальных включений // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 528 – 535.
69. *Plotnikov A. V., Skripnik N. V.* The generalized solutions of the fuzzy differential inclusions // Int. J. Pure and Appl. Math. – 2009. – **56**, № 2. – P. 165 – 172.
70. *Skripnik N. V.* The full averaging of fuzzy impulsive differential inclusions // Surv. Math. and Appl. – 2010. – **5**. – P. 247 – 263.
71. *Skripnik N.V.* The partial averaging of fuzzy impulsive differential inclusions // Different. and Integr. Equat. – 2011. – **24**, № 7-8. – P. 743 – 758.

Получено 03.08.12