УДК 517.51

В. И. Коляда (Одес. ун-т)

СРЕДНИЕ КОЛЕБАНИЯ И СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА*

We establish conditions on mean oscillations of a periodic summable function under which the Abel–Poisson summability of its Fourier series (conjugate series) at a point implies the convergence of Steklov means (the existence of the conjugate function) at this point. Analogous results are also obtained for the Poisson integral in $\mathbb{R}_+^{n+1}$

Знайдено умови на середні коливання періодичної сумовної функції, за яких із сумовності у точці методом Абеля – Пуассона її ряду Фур'є (спряженого ряду) випливає збіжність середніх Стеклова (існування спряженої функції) в цій точці. Аналогічні результати одержано для інтеграла Пуассона в $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

1. Введение. Пусть f — 2π-периодическая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1}$$

Согласно теореме Фату [1, с. 168], из условия

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = s \tag{2}$$

следует суммируемость методом Абеля – Пуассона ряда (1) в точке x к s.

Далее, рассмотрим сопряженный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx). \tag{3}$$

Из теоремы Привалова – Плеснера [1, с. 172] следует, что в каждой точке x, в которой существует сопряженная функция

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\,\mathrm{tg}(t/2)}\,dt \right), \tag{4}$$

сопряженный ряд (3) сумируется методом Абеля – Пуассона к $\tilde{f}(x)$.

Пусть теперь функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, и $u(x, t)$ — ее интеграл Пуассона [2, с. 75]. Далее, пусть

$$\Phi_x(h) = \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{B(x, h)} f(y)\,dy,$$

где $B(x, h)$ — шар радиуса $h > 0$ с центром x. Справедлив аналог теоремы Фату: если $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$\lim_{h \to +0} \Phi_x(h) = s, \tag{5}$$

то

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = s. \tag{6}$$

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Объединенного фонда Правительства Украины и Международного научного фонда (грант № K41100).

Основная задача данной работы состоит в том, чтобы исследовать условия на средние интегральные колебания функции f, при выполнении которых приведенные выше теоремы допускают обращение.

Заметим, что Л. Люмис [3] доказал, что для ограниченной снизу функции f из A-суммируемости ряда Фурье в точке следует сходимость средних Стеклова (2). Аналогичный результат для интеграла Пуассона в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ содержится в работе У. Рудина [4].

Наша постановка задачи связана с результатами работы [5], в которой изучалась роль средних колебаний в вопросах сходимости, и было показано, что для функций класса BMO из сходимости ряда (1) следует соотношение (2), а из сходимости сопряженного ряда следует существование сопряженной функции (4). В предлагаемой статье, в частности, доказывается, что в этих утверждениях сходимость ряда можно заменить A-суммируемостью. При этом условие ограниченности средних колебаний можно существенно ослабить.

Напомним, что среднее колебание функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ на кубе I определяется равенством

$$\Omega(f; I) = \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx, \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy.$$

Обозначим через $d(x, E)$ расстояние от точки x до множества E. Будем говорить, что функция $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию (ω) в точке x, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого куба I с $0 < d(x, I) < \delta$ и длиной ребра $l(I) < \delta d(x, I)$ выполняется неравенство

$$\Omega(f; I) \frac{l(I)}{d(x, I)} < \varepsilon.$$

Приведем еще одно определение. Функция $g(h)$, определенная на интервале $(0, h_0)$, называется медленно колеблющейся при $h \to 0$, если

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \to 1}} [\, g(h) - g(\lambda h) \,] = 0.$$

В п. 2 данной работы доказываются теоремы тауберова типа для A-суммируемости рядов Фурье и сопряженных рядов суммируемых 2π-периодических функций, а также сходимости интегралов Пуассона функций из $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Тауберовым условием в этих теоремах является медленная колеблемость соответствующих интегральных средних. В п. 3 доказывается, что это условие имеет место, если f удовлетворяет условию (ω). Таким образом, основные результаты работы можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема A. *Пусть функция* $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условию* (ω) *в точке* x. *Тогда функция* $\Phi_x(h)$ *медленно колеблется при* $h \to +0$.

Теорема B. *Пусть* 2π*-периодическая суммируемая на* $[0, 2\pi]$ *функция* f *удовлетворяет условию* (ω) *в точке* x. *Тогда*:

1) *из суммируемости методом Абеля – Пуассона ряда* (1) *в точке* x *следует сходимость средних Стеклова* (2);

2) *из суммируемости методом Абеля – Пуассона сопряженного ряда* (3) *в точке* x *следует существование сопряженной функции* $\tilde{f}(x)$.

Теорема C. *Пусть функция* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, *удовлетворяет условию* (ω) *в точке* x. *Тогда из сходимости интеграла Пуассона* (6) *следует соотношение* (5).

2. Тауберовы теоремы. В дальнейшем будем использовать следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть функція f дважды дифференцируема на интервале $(0, h_0)$. Если $\lim_{x\to+0} f(x)=0$, а функция $x^2 f''(x)$ ограничена, то*

$$\lim_{x\to+0} x f'(x) = 0.$$

Эта лемма была доказана Харди и Литтлвудом [6, с. 201].

Лемма 2. *Пусть*

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)^n} dt, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для любого $\delta \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{I_n} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{t^n}{(1+t^2)^n} dt = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{1-\delta} \frac{t^n}{(1+t^2)^n} dt = (1-\delta)^n \int_0^1 \frac{z^n}{\left[1+z^2(1-\delta)^2\right]^n} dz.$$

Поскольку

$$1 + z^2(1-\delta)^2 \ge (1+z^2)\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{2}\right), \quad 0 \le z \le 1,$$

то

$$\int_0^{1-\delta} \frac{t^n}{(1+t^2)^n} dt \le \left(\frac{1-\delta}{1-\delta+\delta^2/2}\right)^n \int_0^1 \frac{z^n}{\left(1+z^2\right)^n} dz = o(I_n).$$

Аналогично,

$$\int_{1+\delta}^{\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)^n} dt = (1+\delta)^n \int_1^{\infty} \frac{z^n\, dz}{\left[1+z^2(1+\delta)^2\right]^n} \le$$

$$\le \left(\frac{1+\delta}{1+\delta+\delta^2/2}\right)^n \int_1^{\infty} \frac{z^n\, dz}{\left(1+z^2\right)^n} = o(I_n).$$

Лемма доказана.

Пусть функция $f \in L[0, 2\pi]$. Абелевы средние ее ряда Фурье представляются интегралом Пуассона

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) P(r, t)\, dt,$$

где

$$P(r, t) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t + r^2)}.$$

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье 2π-периодической суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции f суммируется методом Абеля – Пуассона в точке x к числу s. Далее, пусть $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s$ и функция*

$$\Phi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du, \qquad 0 < t \le \pi,$$

медленно колеблется при $t \to 0$. *Тогда*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = s. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$f(r,x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)P(r,t)\,dt \to 0 \qquad \text{при } r \to 1. \tag{8}$$

Пусть $h = 1 - r$. Тогда, как легко видеть,

$$\left|P(r,t) - \frac{h}{t^2+h^2}\right| \le \frac{ch}{t+h}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Поскольку

$$\lim_{h\to+0} h\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t+h}dt = 0,$$

то в силу (8)

$$\lim_{h\to+0} h\int_0^\pi \varphi(t)\frac{dt}{t^2+h^2} = 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\beta(h) \equiv h\int_0^\pi \Phi(t)\frac{t^2}{\left(t^2+h^2\right)^2}dt \to 0 \qquad \text{при } h \to 0. \tag{9}$$

Покажем, что функция $\Phi(t)$ ограничена. Для $h \in (0,\pi]$ имеем

$$J(h) \equiv h\int_0^\pi \frac{t^2}{\left(t^2+h^2\right)^2}dt = \int_0^{\pi/h}\frac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2}dz \ge c > 0. \tag{10}$$

Далее,

$$|\beta(h) - \Phi(h)J(h)| \le \int_0^{\pi/h}|\Phi(zh) - \Phi(h)|\frac{z^2}{(1+z^2)^2}dz.$$

В силу медленной колеблемости функции $\Phi(t)$ существуют числа $t_0 \in (0,\pi]$ и $\lambda_0 \in (0,1)$ такие, что $|\Phi(t) - \Phi(\lambda t)| < 1$ для всех $t \in (0, t_0]$, $\lambda \in [\lambda_0, 1]$. Кроме того, при $t \in [t_0, \pi]$ имеем $|\Phi(t)| \le \left(\|f\|_1 + 2\pi|s|\right)/t_0$. Отсюда легко следует, что для всех $h \in (0,\pi]$ и $z \in (0, \pi/h]$

$$|\Phi(zh) - \Phi(h)| \le c'(|\ln z| + 1).$$

Таким образом, $|\beta(h) - \Phi(h)J(h)| \le c''$ и в силу (9), (10) имеем

$$|\Phi(h)| \le K, \qquad h \in (0,\pi]. \tag{11}$$

Пусть

$$\beta_\nu(h) = h^{2\nu-\sigma(\nu)-1}\int_0^\pi \Phi(t)\frac{t^{\sigma(\nu)}}{\left(t^2+h^2\right)^\nu}dt, \qquad \nu \ge 2,$$

где $\sigma(\nu)=2[\nu/2]$. Покажем, что для каждого $\nu\ge 2$

$$\lim_{h\to 0}\beta_\nu(h) = 0. \tag{12}$$

Действительно, для $\nu=2$ (12) выполняется (см. (9)). Предположим, что (12) выполняется для некоторого $\nu\ge 2$. Используя (11), нетрудно видеть, что функция $h^2\beta_\nu''(h)$ ограничена на $(0,\pi)$. Поэтому в силу (12) и леммы 1

$$\lim_{h\to 0} h\beta_\nu'(h) = 0.$$

Поскольку

$$h\beta_\nu'(h) = (2\nu-\sigma(\nu)-1)\,h^{2\nu-\sigma(\nu)-1}\int_0^\pi \Phi(t)\frac{t^{\sigma(\nu)}}{\left(t^2+h^2\right)^\nu}dt -$$

$$- 2\nu h^{2\nu-\sigma(\nu)+1}\int_0^\pi \Phi(t)\frac{t^{\sigma(\nu)}}{\left(t^2+h^2\right)^{\nu+1}}dt =$$

$$= a_\nu\beta_\nu(h) + 2\nu(-1)^{\nu+1}\beta_{\nu+1}(h),$$

то $\lim_{h\to 0}\beta_{\nu+1}(h)=0$.

Предположим теперь, что соотношение (7) не выполняется. Тогда найдется стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ такая, что $|\Phi(h_n)|\ge 2\rho>0$, $n=1,2,\dots$. В силу медленной колеблемости функции $\Phi(h)$ существует такое $\delta>0$, что $|\Phi(h)|\ge\rho$ для всех $h\in[h_n(1-\delta), h_n(1+\delta)]$, $n\ge n_0$. Можно считать, что для всех n

$$\Phi(h) \ge \rho \quad \text{при } h\in[h_n(1-\delta),\, h_n(1+\delta)]. \tag{13}$$

Пусть

$$I_k = \int_0^\infty \frac{t^k}{\left(1+t^2\right)^k}dt.$$

С учетом леммы 2 выберем натуральное число ν так, чтобы

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta}\frac{t^{2\nu}}{\left(1+t^2\right)^{2\nu}}dt > (1-\varepsilon)I_{2\nu}, \tag{14}$$

где $\varepsilon=\min(1/2,\rho/(4K))$ (см. (11)). В силу (11), (13) и (14) имеем

$$\beta_{2\nu}(h_n) = \int_0^{\pi/h_n}\Phi(th_n)\frac{t^{2\nu}}{\left(1+t^2\right)^{2\nu}}dt \ge$$

$$\ge \rho\int_{1-\delta}^{1+\delta}\frac{t^{2\nu}}{\left(1+t^2\right)^{2\nu}}dt - K\left(I_{2\nu} - \int_{1-\delta}^{1+\delta}\frac{t^{2\nu}}{\left(1+t^2\right)^{2\nu}}dt\right) \ge$$

$$\ge [\rho(1-\varepsilon)-K\varepsilon]I_{2\nu} \ge \frac{\rho}{4}I_{2\nu}.$$

Это противоречит соотношению (12). Теорема доказана.

Отметим, что метод многократного дифференцирования, примененный в доказательстве теоремы 1, восходит к Литтлвуду [6, с. 216].

Заметим также, что теорему 1 можно доказать с помощью тауберовой теоремы Винера [6, с. 366], однако прямое доказательство проще.

Рассмотрим теперь ряд (3), сопряженный к ряду Фурье функции $f \in L[0, 2\pi]$. Его абелевы средние представляются сопряженным интегралом Пуассона

$$\tilde{f}(r, x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) Q(r, t)\, dt,$$

где

$$Q(r, t) = \frac{r \sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in L[0, 2\pi]$ *и сопряженный ряд* (3) *в точке* x *суммируется методом Абеля – Пуассона к числу* s. *Далее, пусть* $\psi(t) = f(x+t) - -f(x-t)$ *и функция*

$$\Psi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \psi(u)\, du, \qquad 0 < t \le \pi,$$

медленно колеблется при $t \to +0$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\psi(t)}{2\,\mathrm{tg}(t/2)} dt \right) = s.$$

Доказательство. В силу теоремы Плеснера – Привалова [1, с. 172] достаточно доказать, что

$$\lim_{t \to +0} \Psi(t) = 0. \tag{15}$$

Имеем

$$\lim_{r \to 1-0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) Q(r, t)\, dt \right) = s.$$

Легко видеть, что разность $Q(r, t) - t/(t^2 + (1-r)^2)$ равномерно ограничена при $0 < r < 1$, $0 \le t \le \pi$ и имеет предел при $r \to 1$. Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{h \to 0} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{t}{t^2 + h^2} dt = l.$$

Пусть $\psi^*(t) = \psi(t)$ для $0 \le t \le \pi$ и $\psi^*(t) = 0$ для $t > \pi$;

$$\Psi^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \psi^*(u)\, du.$$

Тогда

$$\lim_{h \to +0} \int_0^{\infty} \psi^*(t) \frac{t}{t^2 + h^2} dt = l.$$

Полагая

$$\chi(t) = \int_t^\infty \frac{\psi^*(u)}{u} du$$

и интегрируя по частям, получаем

$$\alpha(h) \equiv h^2 \int_0^\infty \chi(t) \frac{t}{(t^2+h^2)^2} dt \to \frac{l}{2} \quad \text{при} \;\; h \to 0. \tag{16}$$

Отсюда

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_0^{h} \alpha(\tau) d\tau = \frac{l}{2}. \tag{17}$$

Но

$$\alpha(\tau) = \int_0^\infty \chi(z\tau) \frac{z}{(1+z^2)^2} dz.$$

Поскольку $\chi \in L[0,\infty)$, то

$$\frac{1}{h}\int_0^h \alpha(\tau) d\tau = \int_0^\infty X(zh) \frac{z}{(1+z^2)^2} dz = h^2 \int_0^\infty X(t) \frac{t}{(t^2+h^2)^2} dt,$$

где

$$X(t) = \int_0^\infty \chi(u) du = \chi(t) + \Psi^*(t).$$

Поэтому из (16) и (17) следует

$$\lim_{h \to 0} h^2 \int_0^\infty \psi^*(t) \frac{t}{(t^2+h^2)^2} dt = 0.$$

Дальнейший ход доказательства — точно такой же, как в теореме 1.

Пусть теперь f — локально суммируемая функция на $\mathbb{R}^n$, такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\left(1+|x|^2\right)^{(n+1)/2}} dx < \infty. \tag{18}$$

Рассмотрим интеграл Пуассона функции f:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t > 0, \tag{19}$$

где

$$P_t(x) = c_n \frac{t}{\left(|x|^2+t^2\right)^{(n+1)/2}}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x) dx = 1, \qquad t > 0.$$

Возьмем в (19) $x = 0$. Полагая

$$\lambda(r) = \int_{S^{n-1}} f(ry) d\sigma(y)$$

(S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$), получаем (см. [2, с. 79])

$$u(0, t) = c_n t \int_0^\infty \lambda(r) \frac{r^{n-1}}{\left(r^2 + t^2\right)^{(n+1)/2}} dr.$$

Пусть B_r — шар с центром в нуле радиуса r и

$$\Phi(r) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x)\,dx = \frac{1}{|B_r|} \int_0^r \lambda(u) u^{n-1}\,du.$$

Интегрируя по частям и учитывая (18), имеем

$$u(0, t) = c_n' t \int_0^\infty \Phi(r) r^{n+1} (r^2 + t^2)^{-(n+3)/2}\,dr. \tag{20}$$

Отсюда легко вывести аналог теоремы Фату: если $\lim\limits_{r \to +0} \Phi(r) = s$, то $\lim\limits_{t \to +0} u(0, t) = s$.

Теорема 3. *Пусть функция* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, *и в точке* x *ее интеграл Пуассона имеет конечный предел,*

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = s.$$

Если функция

$$\Phi(r) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y)\,dy$$

медленно колеблется при $r \to +0$, *то* $\lim_{r \to +0} \Phi(r) = s$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 (см. (20)).

3. Средние колебания. Пусть I_0 — куб в $\mathbb{R}^n$ и $f \in L(I_0)$. Для любого измеримого подмножества $E \subset I_0$ с $|E| > 0$ полагаем

$$f_E = \frac{1}{|E|} \int_E f(x)\,dx.$$

Среднее колебание функции f на E определяется равенством

$$\Omega(f; E) \equiv \Omega(E) = \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - f_E|\,dx.$$

Если $A \subset B \subset I_0$ $(|A| > 0)$, то

$$|f_A - f_B| \le \frac{|B|}{|A|} \Omega(B), \tag{21}$$

$$\Omega(A) \le 2 \frac{|B|}{|A|} \Omega(B). \tag{22}$$

Действительно,

$$\Omega(A) \le \frac{1}{|A|} \int_A |f(x) - f_B|\,dx + |f_A - f_B| \le$$

$$\le \frac{2}{|A|} \int_A |f(x) - f_B|\,dx \le 2 \frac{|B|}{|A|} \Omega(B).$$

Если верхняя грань средних колебаний по всевозможным кубам $I \subset I_0$ конечна:

$$\|f\|_* = \sup_{I \subset I_0} \Omega(f; I) < \infty,$$

то говорят, что f — функция с ограниченным средним колебанием на I_0, $f \in BMO(I_0)$ [7].

Будем рассматривать вопросы, связанные с локальным поведением средних колебаний. Начнем с одномерного случая. Прежде всего отметим следующее свойство функций класса BMO.

Лемма 3. *Пусть $f \in BMO$ на отрезке I_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух отрезков $J \subset I \subset I_0$ таких, что $|I \setminus J| < \delta |I|$, выполняется неравенство $|f_I - f_J| < \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда отрезки I и J имеют общий конец. Имеем

$$f_I - f_J = \frac{|I \setminus J|}{|J|}\left(f_{I \setminus J} - f_J\right).$$

Пусть $0 < |I \setminus J| < (1/2)|I|$. Найдутся отрезки

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_k = I, \quad Q_0 = I \setminus J,$$

такие, что $2 \le |Q_{j+1}| / |Q_j| < 4$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда

$$k \le \log_2 \frac{|I|}{|I \setminus J|}.$$

В силу (21)

$$|f_I - f_{I \setminus J}| \le \sum_{j=1}^{k} \left|f_{Q_j} - f_{Q_{j-1}}\right| \le 4k\|f\|_* \le 4\|f\|_* \log_2 \frac{|I|}{|I \setminus J|}.$$

Таким образом,

$$|f_I - f_J| \le 8\|f\|_* \frac{|I \setminus J|}{|I|} \log_2 \frac{|I|}{|I \setminus J|}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Из леммы 3 следует, что условия медленной колеблемости в теоремах 1 и 2 будут заведомо выполнены, если функция f принадлежит классу BMO в некоторой окрестности точки x. Однако мы покажем, что на средние колебания можно налагать значительно меньшие ограничения.

В дальнейшем для $I = [\alpha, \beta]$ полагаем $\Omega(I) = \Omega(\alpha, \beta)$.

Лемма 4. *Пусть $f \in L[0, 1]$. Если для некоторого $\lambda \in (0, 1)$*

$$\Omega(\lambda h, h) = O(1), \tag{23}$$

то

$$\Omega(0, h) = O(1). \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $\tau = \sqrt{\lambda}$. Используя равенство

$$f_{[0,h]} = \tau f_{[0,\tau h]} + (1-\tau) f_{[\tau h, h]},$$

имеем

$$\sigma(h) \equiv \int_0^h \left|f(x) - f_{[0,h]}\right| dx \le$$

$$\leq \int_0^{\tau h} \left| f(x) - f_{[0,\tau h]} \right| dx + \int_{\tau h}^{h} \left| f(x) - f_{[\tau h, h]} \right| dx + 2\tau(1-\tau) h \left| f_{[0,\tau h]} - f_{[\tau h, h]} \right|.$$

Отсюда в силу (22) и (24)

$$\sigma(h) \leq \sigma(\tau h) + ch + \frac{1}{2}\rho(h), \tag{25}$$

где $\rho(h) = \left| f_{[0,\tau h]} - f_{[\tau h, h]} \right| h$. Далее (см. (23) и (24)),

$$\rho(h) \leq \tau h \left| f_{[0,\tau^2 h]} - f_{[\tau^2 h, \tau h]} \right| +$$

$$+ h \left| f_{[\tau^2 h, \tau h]} - f_{[\tau h, h]} \right| \leq \rho(\tau h) +$$

$$+ h\left(\left| f_{[\lambda h, \tau h]} - f_{[\lambda h, h]} \right| + \left| f_{[\lambda h, h]} - f_{[\tau h, h]} \right| \right) \leq$$

$$\leq \rho(\tau h) + \frac{(1+\tau)^2}{\tau} h \Omega(\lambda h, h) \leq \rho(\tau h) + ch.$$

Таким образом, $\rho(h) - \rho(\tau h) \leq ch$. Поскольку $\rho(t) \to 0$ при $t \to 0$, то

$$\rho(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\rho(\tau^k h) - \rho(\tau^{k+1} h) \right] \leq \frac{c}{1-\tau} h.$$

Отсюда в силу (25) $\sigma(h) \leq \sigma(\tau h) + c' h$ и аналогично

$$\sigma(h) \leq \frac{c'}{1-\tau} h.$$

Лемма доказана.

Определение. *Будем говорить, что функция $f \in L[0, 1]$ удовлетворяет условию (ω_+) в нуле, если*

$$\lim_{\substack{h \to +0 \\ \lambda \to 1-0}} (1-\lambda)\Omega(\lambda h, h) = 0. \tag{26}$$

Ясно, что любая функция $f \in BMO[0, 1]$ удовлетворяет условию (ω_+). Конечно, обратное неверно. Например, функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\chi_{\Delta_n}(t), \quad \Delta_n = \left[2^{-n} - 2^{-2n}, 2^{-n} \right],$$

удовлетворяет (26), но не принадлежит BMO ни в одной правой полуокрестности нуля.

Предложение 1. *Пусть функция $f \in L[0, 1]$ удовлетворяет условию (ω_+) в нуле. Тогда функция*

$$F(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(u)\, du, \quad 0 < t \leq 1,$$

медленно колеблется при $t \to +0$. Более того,

$$\lim_{\substack{\lambda \to 1-0 \\ h \to +0}} \frac{1}{h} \int_{\lambda h}^{h} |f(u) - F(h)|\, du = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Из (26) следует (23) для некоторого $\lambda \in (0, 1)$ и в силу леммы 4 $\Omega(0, h) \le c$, $h \in (0, 1]$. Далее, пусть

$$\gamma_h(z) \le \frac{1}{h-z}\int_z^h |f(u) - F(h)|du, \quad 0 \le z < h \le 1.$$

Тогда

$$\gamma_h(z) \le \frac{h}{h-z}\Omega(0, h) \le c\frac{h}{h-z}. \tag{28}$$

Поэтому для всех $0 \le z \le t < h$

$$\gamma_h(t) \le \frac{1}{h-t}\int_t^h \left| f(u) - \frac{1}{h-z}\int_z^h f(v)\,dv \right| du \; +$$

$$+ \; \gamma_h(z) \le \frac{h-z}{h-t}\Omega(z, h) + c\frac{h}{h-z}.$$

Следовательно, при $0 \le \tau \le \lambda < 1$ и $h \in (0, 1]$

$$(1-\lambda)\gamma_h(\lambda h) \le (1-\lambda)\Omega(\tau h, h) + c\frac{1-\lambda}{1-\tau}. \tag{29}$$

Отсюда в силу (26) следует (27). Далее,

$$F(x) - F(\lambda x) = \frac{1}{\lambda x}\int_{\lambda x}^x [f(u) - F(x)]du,$$

и $F(x)$ медленно колеблется при $x \to 0$. Предложение доказано.

Таким образом, условия медленной колеблемости в теоремах 1 и 2 будут выполнены, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условию (ω_+) в нуле. В частности, достаточно предположить, что функция f удовлетворяет условию (ω) в точке x (см. введение). Отсюда следует теорема B.

Приведем еще одно условие на средние колебания, которое сильнее условия (ω_+), но выражается в „O"-терминах.

Будем говорить, что функция $f \in L[0, 1]$ удовлетворяет условию (Ω_+) в нуле, если

$$\int_0^h \Omega(t, h)\,dt = O(h) \quad \text{при } h \to +0. \tag{30}$$

Из условия (Ω_+) следует (ω_+). Действительно, в силу (22) для $0 \le \tau \le \lambda < 1$

$$\frac{1-\lambda}{1-\tau}\Omega(\lambda h, h) \le 2\Omega(\tau h, h).$$

Интегрируя по τ от 0 до λ и учитывая (30), получаем

$$(1-\lambda)\Omega(\lambda h, h)\ln\frac{1}{1-\lambda} \le 2\int_0^1 \Omega(\tau h, h)\,dt \le c,$$

$$0 < h \le h_0.$$

Отсюда следует (26).

Заметим, что из условия (ω_+) не следует (Ω_+); соответствующим примером является функция

$$f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\ln n}} \chi_{\Delta_n}(t), \qquad \Delta_n = \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n2^n}, \frac{1}{2^n}\right].$$

Если $f \in L^p[0, 1]$ для некоторого $p > 1$ и

$$\int_0^h |f(x)|^p\, dx = O(h), \tag{31}$$

то выполняется (30). Действительно, в этом случае

$$\frac{1}{h}\int_0^h \Omega(t, h)\, dt \le \frac{2}{h}\int_0^h \frac{dt}{h-t}\int_t^h |f(u)|\, du =$$

$$= \frac{2}{h}\int_t^h |f(u)| \ln\frac{h}{h-u} du \le \frac{2}{h}\left(\int_0^h |f(u)|^p\, du\right)^{1/p}\left(\int_0^h \ln^{p'}\frac{h}{h-u} du\right)^{1/p'} =$$

$$= 2\left(\int_0^1 |\ln(1-z)|^{p'}\, dz\right)^{1/p'}\left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(u)|^p\, du\right)^{1/p} = O(1).$$

Из (30) не следует (31) (например, функция $f(x) = \ln(1/x)$ принадлежит $BMO[0, 1]$, а (31) не выполняется).

Заметим, что во многих тауберовых теоремах (31) играет основную роль тауберова условия (см., например, [8, 9]).

Пример функции

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{\Delta_n}(t), \qquad \Delta_n = \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n2^n}, \frac{1}{2^n}\right],$$

показывает, что при $p = 1$ из (31) не следует (26).

Выполнение (Ω_+), в свою очередь, может быть обеспечено условием на максимальную функцию Фефферманa – Стейна [10]. Эта функция определяется равенством

$$f^{\#}(x) = \sup \Omega(f; I), \qquad x \in [0, 1],$$

где верхняя грань берется по всем отрезкам $I \subset [0, 1]$, содержащим точку x. Ясно, что $\Omega(t, h) \le f^{\#}(t)$, $0 \le t \le h$, и поэтому из условия

$$\int_0^h f^{\#}(x)\, dx = O(h) \tag{32}$$

следует (30).

Перейдем теперь к многомерному случаю. Длину ребра куба $I \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать через $l(I)$.

Докажем многомерный аналог предложения 1.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию (ω) в точке x_0. Тогда*

$$\lim_{\substack{h \to +0 \\ \lambda \to 1-0}} \frac{1}{h^n} \int_{\lambda h \le |x - x_0| \le h} \left| f(x) - f_{B(x_0, h)} \right| dx = 0$$

и функция

$$\Phi(h) = \frac{1}{|B(x_0, h)|} \int_{B(x_0, h)} f(x)\,dx$$

медленно колеблется при $h \to +0$.

Доказательство. Пусть $x_0 = 0$. Обозначим $I_h = [-h, h]^n$ и покажем, что

$$\Omega(I_h) \le C, \qquad h \in (0, 1]. \tag{33}$$

В силу условия (ω) найдется $\delta_0 \in (0, 1)$ такое, что для любого куба $I \subset \subset [-\delta_0, \delta_0]^n$ с $l(I) < \delta_0 d(0, I)$ колебание $\Omega(I) \le d(0, I)/l(I)$. Обозначим $Q_{h,\lambda} = I_h \setminus I_{\lambda h}$, $\lambda \in (0, 1)$. Выберем натуральное $s > 2 + 1/\delta_0$. Покажем, что

$$\Omega(Q_{h,\lambda}) \le c_1, \quad \lambda = 1 - 1/s, \quad h \in (0, \delta_0]. \tag{34}$$

Разобьем $Q_{h,\lambda}$ на конгруэнтные кубы $J_1, \ldots, J_N$ с длиной ребра h/s; перенумеруем их так, чтобы J_k и J_{k+1} имели общие граничные точки $(k = 1, \ldots, N - 1)$. Поскольку

$$J_k \subset [-\delta_0, \delta_0]^n \quad \text{и} \quad \frac{l(J_k)}{d(0, J_k)} \le \frac{1}{s-1} < \delta_0,$$

то

$$\Omega(I_k) \le d(0, J_k)/l(J_k) \le s\sqrt{n}.$$

Имеем

$$\Omega(Q_{h,\lambda}) = \frac{1}{|Q_{h,\lambda}|} \sum_{i=1}^{N} \int_{J_i} \left| f(x) - f_{Q_{h,\lambda}} \right| dx \le$$

$$\le \frac{1}{|Q_{h,\lambda}|} \sum_{i=1}^{N} |J_i| \left(\Omega(J_i) + \left| f_{Q_{h,\lambda}} - f_{J_i} \right| \right) \le$$

$$\le s\sqrt{n} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| f_{Q_{h,\lambda}} - f_{J_i} \right| = s\sqrt{n} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(f_{J_k} - f_{J_i} \right) \right| \le$$

$$\le s\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{N-1} \left| f_{J_k} - f_{J_{k+1}} \right|.$$

Для каждого $k = 1, \ldots, N-1$ найдется куб $J_k^* \subset I_h$ с длиной ребра $2h/s$, содержащей кубы J_k и J_{k+1}. Поскольку

$$\frac{l(J_k^*)}{d(0, J_k^*)} \le \frac{1}{s-2} < \delta_0,$$

то $\Omega(J_k^*) \le s\sqrt{n}/2$. Поэтому (см. (21))

$$\left| f_{J_k} - f_{J_{k+1}} \right| \le \left| f_{J_k} - f_{J_k^*} \right| + \left| f_{J_k^*} - f_{J_{k+1}} \right| \le 2^{n+1}\,\Omega(J_k^*) \le 2^n s\sqrt{n}$$

и

$$\Omega(Q_{h,\lambda}) \le s\sqrt{n}\,(1 + N2^n).$$

Пусть теперь $\tau = \sqrt{\lambda}$. Пользуясь равенством

$$f_{I_h} = \tau^n f_{I_{\tau h}} + (1-\tau^n) f_{Q_{h,\tau}}$$

получаем, как и при доказательстве леммы 4 (см. (22) и (34)),

$$\sigma(h) \le \int\limits_{I_h} \left| f(x) - f_{I_h} \right| dx \le \sigma(\tau h) + c h^n + \frac{1}{2}\rho(h),$$

где $\rho(h) = (2h)^n \left| f_{I_{\tau h}} - f_{Q_{h,\tau}} \right|$. Далее, в силу (21) и (34)

$$\rho(h) \le \rho(\tau h) + (2h)^n \left| f_{Q_{h,\tau}} - f_{Q_{\tau h,\tau}} \right| \le$$

$$\le \rho(\tau h) + (2h)^n \left[\left| f_{Q_{h,\tau}} - f_{Q_{h,\lambda}} \right| + \left| f_{Q_{h,\lambda}} - f_{Q_{\tau h,\tau}} \right| \right] \le$$

$$\le \rho(\tau h) + c_1 h^n \Omega(Q_{h,\lambda}) \le \rho(\tau h) + c_2 h^n.$$

Отсюда $\rho(h) \le c_2 h^n / (1-\tau^n)$ и $\sigma(h) \le \sigma(\tau h) + c_3 h$, так что $\sigma(h) \le$ $\le c_3 h^n / (1-\tau^n)$. Неравенство (33) доказано.

Пусть теперь $\Delta_{h,\lambda} = B_h \setminus B_{\lambda h}$, $\lambda \in (0, 1)$. Покажем, что

$$\lim_{\substack{h \to +0 \\ \lambda \to 1-0}} h^{-n} \int\limits_{\Delta_{h,\lambda}} \left| f(x) - f_{I_h} \right| dx = 0. \tag{35}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия (ω) найдется $\delta \in (0, 1)$ такое, что при $0 < h < \delta$ для любого куба $I \subset I_h$ с $l(I) < \delta d(0, I)$ выполняется неравенство

$$\frac{l(I)}{d(0, I)} \Omega(I) < \varepsilon.$$

Выберем натуральное $s > 2(n+1)/\delta$. Пусть $\eta = 1/s$ и $0 < 1 - \lambda < \eta$. Разобьем куб I_h, $0 < h < \delta$, на конгруэнтные кубы с попарно непересекающимися внутренностями и длиной ребра ηh. Пусть $J_1, \ldots, J_N$ — те из них, которые имеют общие точки с $\Delta_{h,\lambda}$; ясно, что их число $N \le c / \eta^{n-1}$. Далее, $(\lambda - \eta\sqrt{n})h \le d(0, J_k) \le \sqrt{n} h$, так что

$$\frac{\eta}{\sqrt{n}} \le \frac{l(J_k)}{d(0, J_k)} < \delta$$

и поэтому

$$\Omega(J_k) < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\eta}.$$

Имеем (см. (21) и (33))

$$\int\limits_{\Delta_{h,\lambda}} \left| f(x) - f_{I_h} \right| dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{J_k \cap \Delta_{h,\lambda}} \left| f(x) - f_{I_h} \right| dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} |J_k| \Omega(J_k) + \sum_{k=1}^{N} \left| J_k \cap \Delta_{h,\lambda} \right| \left| f_{J_k} - f_{I_h} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\eta} \sum_{k=1}^{N} |J_k| + \sum_{k=1}^{N} \left| J_k \cap \Delta_{h,\lambda} \right| \frac{|I_h|}{|J_k|} \Omega(I_h) \le$$

$$\leq N\sqrt{n}\eta^{n-1}h^n\varepsilon + c\eta^{-n}\left|\Delta_{h,\lambda}\right|.$$

Поскольку $N \leq c/\eta^{n-1}$ и $\left|\Delta_{h,\lambda}\right| \leq c(1-\lambda)h^n$, то

$$\frac{1}{h^n}\int_{\Delta_{h,\lambda}}\left|f(x) - f_{I_h}\right|dx \leq c'\left(\varepsilon + \frac{1-\lambda}{\eta^n}\right)$$

для всех $h \in (0, \delta)$ и $\lambda \in (1-\eta, 1)$ (постоянная c' не зависит от h и λ). Отсюда следует (35). Далее, в силу (21) и (33)

$$\left|f_{B_h} - f_{I_h}\right| \leq \frac{|I_h|}{|B_h|}\Omega(I_h) \leq c.$$

Поэтому из (35) следует соотношение

$$\lim_{\substack{h\to+0\\ \lambda\to 1-0}} h^{-n}\int_{\Delta_{h,\lambda}}\left|f(x) - f_{B_h}\right|dx = 0. \tag{36}$$

Остается заметить, что

$$\Phi(h) - \Phi(\lambda h) = \frac{1}{\left|B_{\lambda h}\right|}\int_{\Delta_{h,\lambda}}\left[f(x) - f_{B_h}\right]dx;$$

стало быть, из (36) следует медленная колеблемость функции $\Phi(h)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь максимальную функцию Фефермана – Стейна функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$:

$$f^{\#}(x) = \sup_{I:\, x\in I}\frac{1}{|I|}\int_I |f(t) - f_I|dt$$

(верхняя грань берется по всем кубам I, содержащим точку x). Мы видели, что в одномерном случае из (32) следует (ω_+). Однако в случае $n \geq 2$ аналогичное утверждение неверно. Именно, из условия

$$\int_{B(x_0,h)} f^{\#}(x)dx = O(h^n) \quad \text{при } h\to+0 \tag{37}$$

не следует выполнение условия (ω) в точке x_0. В качестве контрпримера можно привести функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\chi_{\Delta_k}(x), \qquad \Delta_k = \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{k2^k}, \frac{1}{2^k}\right]^n; \qquad x_0 = 0.$$

Конечно, и из условия (ω) не следует (37) (мы видели это уже в одномерном случае).

Тем не менее, условие (37) обеспечивает медленную колеблемость функции $\Phi(h)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и выполняется условие* (37). *Тогда*

$$\lim_{\substack{h\to+0\\ \lambda\to 1-0}} h^{-n}\int_{\lambda h\leq|x-x_0|\leq h}\left|f(x) - f_{B(x_0,h)}\right|dx = 0$$

и функция $\Phi(h) = f_{B(x_0,h)}$ медленно колеблется при $h\to+0$.

Доказательство. Пусть $x_0 = 0$, $I_h = [-h, h]^n$. В силу (37)

$$\Omega(I_h) \le \inf_{x \in I_h} f^{\#}(x) = O(1) \quad \text{при } h \to +0. \tag{38}$$

Пусть $s \ge 2$ — натуральное, $\delta = 2^{-ns}$. Обозначим

$$\Delta(h, \delta) = B_h \setminus B_{(1-\delta)h}, \qquad h > 0.$$

Далее, пусть $\eta = \sqrt[n]{\delta}$. Для каждого $k = 1, \ldots, s$ разобьем I_h на кубы с длиной ребра $2^k \eta h$ и попарно непересекающимися внутренностями. Выберем из них те, которые имеют непустое пересечение с $\Delta(h, \delta)$; обозначим их через $J_{k,i}$, $i = 1, \ldots, N_k$. Пусть $F(h) = f_{I_h}$. Для любого $k = 1, \ldots, s$ имеем

$$\rho(h, \delta) \equiv h^{-n} \int_{\Delta(h,\delta)} |f(x) - F(h)| dx =$$

$$= h^{-n} \sum_{i=1}^{N_k} \int_{\Delta(h,\delta) \cap J_{k,i}} |f(x) - F(h)| dx \le h^{-n} \sum_{i=1}^{N_k} \int_{J_{k,i}} \left| f(x) - f_{J_{k,i}} \right| dx +$$

$$+ |\Delta(h, \delta)| h^{-n} \sum_{i=1}^{N_k} \left| f_{J_{k,i}} - F(h) \right| \equiv \rho'_k(h, \delta) + \rho''_k(h, \delta).$$

Оценим $\rho'_k(h, \delta)$. Обозначим через $J^*_{k,i}$ куб, имеющий тот же центр, что и $J_{k,i}$, и в четыре раза большую длину ребра. Пусть

$$\Delta_k = \left\{ x \colon (1 - 2^{k+1}\eta)h < |x| \le (1 - 2^k \eta)h \right\}, \qquad k = 1, \ldots, s-1.$$

Легко видеть, что $\left| \Delta_k \cap J^*_{k,i} \right| \ge \gamma |J_{k,i}|$, где γ — положительная постоянная, зависящая только от n. Имеем

$$\int_{J_{k,i}} \left| f(x) - f_{J_{k,i}} \right| dx = |J_{k,i}| \Omega(J_{k,i}) \le$$

$$\le 4^{n+1} |J_{k,i}| \Omega\big(J^*_{k,i}\big) \le 4^{n+1} |J_{k,i}| \inf_{y \in \Delta_k \cap J^*_{k,i}} f^{\#}(y) \le$$

$$\le 4^{n+1} \gamma^{-1} \int_{\Delta_k \cap J^*_{k,i}} f^{\#}(y) dy.$$

Следовательно,

$$\rho'_k(h, \delta) \le c h^{-n} \int_{\Delta_k} f^{\#}(y) dy.$$

Далее $|\Delta(h, \delta)| \le c \delta h^n$. Учитывая (38), получаем

$$\rho''_k(h, \delta) \le c\delta \sum_{i=1}^{N_k} \frac{1}{\left| J_{k,i} \right|} \int_{J_{k,i}} |f(x) - F(h)| dx \le$$

$$\le c\delta (2^k \eta h)^{-n} \int_{I_h} |f(x) - F(h)| dx = c\delta (2^k \eta)^{-n} \Omega(I_h) \le c' 2^{-nk}.$$

Таким образом, для любого $k = 1, \ldots, s-1$

$$\rho(h,\delta) \le c h^{-n} \int_{\Delta_k} f^{\#}(y)\,dy + c' 2^{-nk}.$$

Суммируя по k, получаем

$$s\rho(h,\delta) \le \frac{c}{h^n} \int_{B_h} f^{\#}(y)\,dy + c' \le c''.$$

Отсюда следует, что $\rho(h,\delta) \to 0$ при $h, \delta \to +0$. Теперь, как и в доказательстве теоремы 4, получаем

$$\lim_{\substack{h\to+0\\ \delta\to+0}} h^{-n} \int_{\Delta(h,\delta)} |f(x)-\Phi(h)|\,dx = 0,$$

и функция $\Phi(h)$ медленно колеблется при $h \to +0$. Теорема доказана.

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1 – 615 с.
2. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
3. *Loomis L. H.* The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **53**, № 2. – P. 239–250.
4. *Rudin W.* Tauberian theorems for positive harmonic functions // Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. van Wetenschappen. Ser. A. – 1978. – **81**. № 3. – P. 376–384.
5. *Коляда В. И.* Интегральные средние и сходимость рядов Фурье в точке // Anal. math. – 1980. – **6**, № 4. – С. 305–326.
6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 504 с.
7. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation / Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415–426.
8. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The Fourier series of a positive function // J. London Math. Soc. – 1926. – **1**. – P. 134–138.
9. *Verblunsky S.* The Cesaro summation of trigonometric series // Proc. London Math. Soc. – 1932. – **33**. – P. 384 -408.
10. *Fefferman C., Stein E. M.* H^p spaces of several variables // Acta math. – 1972. – P. 137–193.

Получено 19.12.95