УДК 517.958

О. М. Барняк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПРО НОРМАЛЬНІ СИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

We propose a variational formulation of the spectral problem on normal symmetric oscillations of viscous liquid. On the basis of this formulation, we construct a projection method for the determination of real eigenvalues. We present the numerical realization of this method in the case of a spherical cavity.

Запропоновано варіаційне формулювання спектральної задачі про нормальні симетричні коливання в'язкої рідини. На основі цього формулювання побудовано проекційний метод визначення дійсних власних значень задачі. Проведено чисельну реалізацію методу для сферичної порожнини.

1. Нормальні симетричні коливання в'язкої рідини, яка частково заповнює порожнину, що має форму тіла обертання відносно вертикальної осі, описуються наступною спектральною задачею [1, 2]:

$$\Delta_1\varphi = 0, \quad \Delta_1\psi + \chi^2\psi = 0 \text{ в } G, \quad \varphi + \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}(\varphi+\psi) = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$T(\varphi+\psi) - \frac{\chi^2}{2}\psi = 0, \quad T\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi) - \frac{\chi^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{H^2}{4}\psi = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

де G, L і Γ — перерізи області, заповненої рідиною, твердої стінки порожнини і вільної поверхні рідини меридіальною площиною; (η, r, z) — циліндрична система координат; n — зовнішня нормаль до L; H — безрозмірний параметр (число Галілея); χ — спектральний параметр;

$$\Delta_1\varphi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\varphi}{r^2};$$

T — диференціальний оператор, що діє на Γ: $\{z=0, \ 0<r<a\}$ і породжується диференціальним виразом

$$tu \equiv -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{u}{r^2}$$

і крайовими умовами $u(0)=0$, $u(a)=0$.

В роботах [1, 2] показано, що спектр задачі розміщений у правій комплексній півплощині і складається з двох гілок власних значень χ_k^+ і χ_k^-, які розміщені на дійсній осі, і проміжних комплексних власних значень, яких може бути не більше скінченного числа, а при малих значеннях H немає зовсім. Власні значення χ_k^+ мають граничну точку $\chi=\infty$, а власні значення χ_k^- — граничну точку $\chi=0$.

В роботах [3, 4] запропоновано проекційні методи дослідження та побудови розв'язків плоскої двовимірної задачі про нормальні поперечні коливання в'язкої рідини в горизонтальному каналі. В даній роботі ці результати узагальнено на випадок осесиметричних коливань в'язкої рідини в посудині, що має форму тіла обертання.

2. Позначимо через $W_2^1(G)$ простір Соболєва функцій, інтегровних з квадратом разом з першими частинними похідними в області G. Скалярний добуток в цьому просторі задамо таким чином [1]:

$$(\varphi, \psi)_{W_2^1(G)} = \int\limits_G \left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\varphi\psi}{r}\right)dG.$$

Через $H(G)$ і $H_1(G)$ позначимо підпростори функцій $\varphi\in W_2^1(G)$ і $\psi\in$

$\in W_2^1(G)$, які задовольняють відповідно умови ортогональності $(\varphi, \psi_0)_{W_2^1(G)} = 0$ і $(\psi, \psi_0)_{W_2^1(G)} - \chi^2(\psi, \psi_0)_{L_2(G)} = 0$ для довільної фінітної в області G функції $\psi_0 \in W_2^1(G)$, тобто $H(G)$ — підпростір узагальнених розв'язків рівняння $\Delta_1\varphi = 0$ в G, а $H_1(G)$ — підпростір узагальнених розв'язків рівняння $\Delta_1\psi + \chi^2\psi = 0$ в G [5].

На класі функцій $\varphi \in H(G)$ і $\psi \in W_2^1(G)$ при $\chi \in R$, $H \in R$ розглянемо квадратичний функціонал

$$K(\varphi, \psi) = \int_G r\left[\left[\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \psi)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi)\right]^2 + \frac{(\varphi + \psi)^2}{r^2} - \chi^2\psi^2\right]dG -$$

$$- \chi^2 \int_\Gamma rT^{-1}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}dG - \frac{H^2}{4}\int_\Gamma rT^{-1}\psi\psi\,dr. \qquad (2)$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай пара функцій* $\varphi \in H(G)$ *і* $\psi \in W_2^1(G)$ *при відповідних дійсних значеннях параметрів* χ *і* H *є розв'язком задачі* (1). *Тоді функціонал* (2) *на цих функціях набуває стаціонарного значення.*

Доведення. Покажемо, що на розв'язках задачі (1) функціонал (2) набуває стаціонарного значення, тобто білінійний функціонал

$$K(\varphi, \psi, w, f) =$$

$$= \int_G r\left[\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \psi)\frac{\partial}{\partial r}(w + f) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi)\frac{\partial}{\partial z}(w + f) + \frac{1}{r^2}(\varphi + \psi)(w + f) - \chi^2\psi f\right]dG -$$

$$- \frac{\chi^2}{2}\int_\Gamma r\left[T^{-1}\psi\frac{\partial w}{\partial z} + T^{-1}f\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]dr - \frac{H^2}{4}\int_\Gamma rT^{-1}\psi f\,dr$$

рівний нулю для довільних $w \in H(G)$, $f \in W_2^1(G)$.

Застосовуючи формулу Гріна, одержуємо

$$K(\varphi, \psi, w, f) = \int_G \left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \psi)\right) - r\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi + \psi) + \frac{\varphi + \psi}{r} - \chi^2 r\psi\right]f\,dG +$$

$$+ \int_G \left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) - r\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{w}{r}\right](\varphi + \psi)\,dG + \int_{L+\Gamma} r\frac{\partial}{\partial n}(\varphi + \psi)f\,dl +$$

$$+ \int_{L+\Gamma} r(\varphi + \psi)\frac{\partial w}{\partial n}dl - \frac{\chi^2}{2}\int_\Gamma r\left[T^{-1}f\frac{\partial\varphi}{\partial z} + T^{-1}\psi\frac{\partial w}{\partial z}\right]f\,dr - \frac{H^2}{4}\int_\Gamma rT^{-1}\psi f\,dr.$$

Враховуючи, що $\Delta_1\varphi = \Delta_1 w = 0$, маємо

$$K(\varphi, \psi, w, f) = \int_G \left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - r\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\psi}{r} - \chi^2 r\psi\right]f\,dG +$$

$$+ \int_\Gamma r\left[\left[\varphi + \psi - \frac{\chi^2}{2}T^{-1}\psi\right]\frac{\partial w}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi) - \frac{\chi^2}{2}T^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{H^2}{4}T^{-1}\psi\right]f\right]dr +$$

$$+ \int_L r\left[(\varphi + \psi)\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n}(\varphi + \psi)f\right]dl. \qquad (3)$$

На розв'язках задачі цей функціонал перетворюється в нуль, що і потрібно було довести.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема 2. *Нехай функціонал* $K(\varphi, \psi)$ *набуває стаціонарного значення на функціях* $\varphi \in H(G)$ *і* $\psi \in W_2^1(G)$ *при деяких дійсних значеннях параметрів* χ *і* H. *Тоді за умови, що ці функції є двічі неперервно диференційовні в* G, *вони є розв'язками задачі* (1).

Доведення. Нехай $K(\varphi, \psi, w, f) = 0$ для довільних $w \in H(G)$, $f \in W_2^1(G)$. Оскільки функції φ і ψ за умовою теореми двічі неперервно диференційовні, для $K(\varphi, \psi, w, f)$ справедливе зображення (3).

З умови $K(\varphi, \psi, 0, f_0) = 0$ для довільних фінітних в області G функцій $f_0 \in W_2^1(G)$ одержуємо, що функція ψ задовольняє рівняння

$$\Delta_1 \psi + \chi^2 \psi = 0 \quad \text{в } G.$$

З умови $K(\varphi, \psi, w, 0) = 0$ для довільних $w \in H(G)$ випливає, що виконуються умови

$$\varphi + \psi = 0 \quad \text{на } L, \qquad \varphi + \psi - \frac{\chi^2}{2} T^{-1} \psi = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

І нарешті, з умови $K(\varphi, \psi, 0, f) = 0$ для довільних $f \in W_2^1(G)$ одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi + \psi) = 0 \quad \text{на } L, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi) - \frac{\chi^2}{2} T^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{H^2}{4} T^{-1} \psi = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

що і доводить твердження теореми.

***Зауваження* 1.** Якщо функції φ і ψ, які надають стаціонарного значення функціоналу $K(\varphi, \psi)$, не є двічі неперервно диференційовні, то тоді не можна застосувати формулу Гріна, і ці функції є узагальненими розв'язками задачі (1).

3. На основі твердження теореми 2 сформулюємо проекційний метод побудови наближених розв'язків задачі (1).

Спектральна задача (1) полягає в тому, щоб для будь-якого дійсного додатного значення параметра H знайти ті значення параметра χ, при яких існує її нетривіальний розв'язок. Побудова методу розв'язку такої задачі пов'язана з деякими труднощами, оскільки невідомий параметр χ входить в рівняння і дві крайові умови задачі.

Розглянемо задачу в дещо іншій постановці. Зафіксуємо параметр χ і будемо визначати ті значення параметра H, при яких дане фіксоване значення параметра χ є власним значенням задачі (1). При цьому невідомий параметр H входить тільки в одну крайову умову на Γ. При фіксованому параметрі χ ми маємо можливість визначити стаціонарні значення функціонала $K(\varphi, \psi)$ на більш вузькому класі функцій $\varphi \in H(G)$ і $\psi \in H_1(G)$. Завдяки цьому знижується розмірність задачі, і вона стає одновимірною.

Нехай $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — деякі повні відповідно в $H(G)$ і $H_1(G)$ системи координатних функцій. Апроксимуємо шуканий розв'язок задачі скінченними сумами вигляду

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{m} a_k w_k, \qquad \psi_n = \sum_{k=1}^{n} b_k f_k. \tag{4}$$

Коефіцієнти a_k і b_k визначимо з умов стаціонарності функціонала $K(\varphi_m, \psi_n)$:

$$K(\varphi_m, \psi_n, w_i, 0) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \qquad K(\varphi_m, \psi_n, 0, f_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ці умови приводять до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}^{(1)} a_k + \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_{ik}^{(2)} - \chi^2 \alpha_{ik}^{(3)} \right] b_k = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\alpha_{ki}^{(2)} - \chi^2 \alpha_{ki}^{(3)} \right] a_k + \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_{ik}^{(4)} - H^2 \beta_{ik} \right] b_k = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де

$$\alpha_{ik}^{(1)} = \int_{L+\Gamma} r w_k \frac{\partial w_i}{\partial n} ds, \quad \alpha_{ik}^{(2)} = \int_{L+\Gamma} r f_k \frac{\partial w_i}{\partial n} ds, \quad \alpha_{ik}^{(3)} = \int_{\Gamma} r T^{-1} f_k \frac{\partial w_i}{\partial z} dr,$$

$$\alpha_{ik}^{(4)} = \int_{L+\Gamma} r \frac{\partial f_k}{\partial n} f_i \, ds, \quad \beta_{ik} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma} r T^{-1} f_k f_i \, dr.$$

Внаслідок лінійної незалежності функцій w_k матриця A_1 коефіцієнтів $\alpha_{ik}^{(1)}$ невироджена, а тому існує обернена матриця A_1^{-1}, завдяки чому із перших m рівнянь (5) можна виразити вектор-стовпець $\bar{a}$ коефіцієнтів a_k через вектор-стовпець $\bar{b}$ коефіцієнтів b_k:

$$\bar{a} = -A_1^{-1} \left(A_2 - \chi^2 A_3 \right) \bar{b}. \tag{6}$$

Після підстановки (6) в останні n рівнянь (5) одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів b_k:

$$\left(A - H^2 B \right) \bar{b} = 0, \tag{7}$$

де $A = A_4 - \left(A_2^* - \chi^2 A_3^* \right) A_1^{-1} \left(A_2 - \chi^2 A_3 \right)$; A_2, A_3, A_4, B — матриці коефіцієнтів $\alpha_{ik}^{(2)}$, $\alpha_{ik}^{(3)}$, $\alpha_{ik}^{(4)}$, β_{ik} відповідно, A_2^* і A_3^* — матриці, транспоновані до A_2 і A_3, $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — вектор-стовпці коефіцієнтів a_k і b_k.

Із умови існування нетривіального розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь (7) одержуємо рівняння для визначення параметра H

$$\det \left(A - H^2 B \right) = 0. \tag{8}$$

4. Чисельна реалізація проекційного методу проведена для сферичної порожнини одиничного радіуса і висоти h заповнення порожнини рідиною.

За координатні функції вибиралися наступні розв'язки рівнянь Лапласа і Гельмгольца:

$$w_k(r, \theta) = r^k P_k^1(\cos\theta), \quad f_k(r, \theta) = r^{-1/2} J_{k+1/2}(\chi r) P_k^1(\cos\theta),$$

де (r, η, θ) — сферична система координат з центром на Γ, $r = \sqrt{z^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\theta = r / z$; $P_k^1(\cos\theta)$ — приєднані поліноми Лежандра; $J_{k+1/2}(\chi r)$ — сферичні функції Бесселя.

Внаслідок того, що функції $f_{2k} = 0$ на Γ, а отже, і $T^{-1} f_{2k} = 0$ на Γ, маємо, що всі елементи матриці B, в яких хоча б один із індексів парний, рівні нулю, а ненульовими будуть тільки коефіцієнти з двома непарними індексами. Завдяки цьому можна знизити порядок системи алгебраїчних рівнянь (6). Для цього шляхом елементарних перетворень зводимо її до вигляду

$$\left[\begin{pmatrix} C_1 & C_2^* \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix} - H^2 \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \bar{b}^{(1)} \\ \bar{b}^{(2)} \end{pmatrix} = 0, \tag{9}$$

де $\bar{b}^{(1)}$ і $\bar{b}^{(2)}$ — вектори-стовпці коефіцієнтів b_k з непарними і парними індексами, n_1 — кількість врахованих функцій f_k з непарними індексами, а n_2 — з парними.

При умові, що матриця C_3 — невироджена, вектор $\bar{b}^{(2)}$ виражається через вектор $\bar{b}^{(1)}$:

$$\bar{b}^{(2)} = -C_3^{-1} C_2 \bar{b}^{(1)}$$

і система алгебраїчних рівнянь (9) зводиться до вигляду

$$(C - H^2 B_1)\, \bar{b}^{(1)} = 0, \tag{10}$$

де $C = C_1 - C_2^* C_3^{-1} C_2$.

Із умови існування нетривіального розв'язку системи (10) одержуємо характеристичне рівняння для визначення шуканих значень параметра H:

$$\det\left(C - H^2 B_1\right) = 0. \tag{11}$$

Порядок одержаної системи алгебраїчних рівнянь значно менший ніж порядок системи рівнянь (7), що робить алгоритм розв'язку більш стійким.

Таблиця 1

n_1	χ	H_1	H_2	H_3
8	2	7,983685	9,579620	10,989440
8	4	14,599540	18,347570	21,444430
8	6	17,689760	25,280330	30,763460
8	8	9,841923	28,591560	38,140740
8	10	—	22,212510	42,115020
8	12	—	—	56,759140
8	14	—	—	29,020550
7	8	9,842514	28,591892	38,152787
9	8	9,841521	28,591377	38,140741
10	8	9,841049	28,591177	38,140425

В табл. 1 наведено значення перших трьох власних значень задачі $H_k = f_k(\chi)$ при висоті заповнення $h = 0{,}5$. При цьому вибиралися числа $m = 40$, $n_1 = 8$, $n_2 = 20$. Для ілострації точності обчислень в нижніх рядках табл. 1 наведено для порівняння чисельні дані, одержані при різних значеннях числа n_1.

На основі даних табл. 1 можна побудувати графіки функціональних залежностей $H_k = f_k(\chi)$. Якщо зафіксувати деяке значення параметра $H = c$ і провести на графіку пряму $H = c$, то одержимо при заданому H величини власних значень задачі χ_1^-, χ_2^-, χ_3^-, χ_1^+, χ_2^+, χ_3^+. Уточнення значень χ_k^- і χ_k^+ проводимо на основі рівняння (11), в якому значення H вважаємо заданим, а χ — шуканим. Такий алгоритм дозволяє уточнювати також і комплексні власні значення.

Таблиця 2

H	χ_1^-	χ_1^+	χ_2^-	χ_2^+	χ_3^-	χ_3^+
5	1,232399	8,252359	1,232399	10,771825	0,904250	12,898077
10	2,548088	7,987791	2,548088	10,677902	2,090409	12,862540
15	4,153520	7,357645	4,153520	10,502628	2,749504	12,801312
20	6,213278	1,479489	4,420596	10,201476	3,713285	12,710835
25	6,645783	2,623833	5,900358	9,630435	4,727194	12,584162
30	7,056009	3,396144	8,217054	1,162277	5,822339	12,405290
35	7,445875	4,018363	8,666205	2,488809	7,064739	12,126065
40	7,816842	5,553274	9,110993	3,334071	8,684849	11,523741
45	8,170218	5,029327	9,548278	4,021340	10,61921	1,616037
	$\mathrm{Re}\,\chi_1$	$\mathrm{Im}\,\chi_1$	$\mathrm{Re}\,\chi_2$	$\mathrm{Im}\,\chi_2$	$\mathrm{Re}\,\chi_3$	$\mathrm{Im}\,\chi_3$

Результати обчислень наведено в табл. 2. При малих значеннях H всі власні значення дійсні. В процесі збільшення H значення χ_k^+ зменшуються, а χ_k^- збільшуються. При деякому критичному значенні $H = H^*$ співпадають значення величин χ_k^- і χ_k^+; при цьому відбувається якісна зміна спектра, яка полягає в тому, що ці числа сходять з дійсної осі і стають комплексно-спряженою парою власних значень задачі (1). Доповнюючи табл. 2, вкажемо величини критичних значень: $H_1^* = 17{,}6898$, $H_2^* = 28{,}5999$, $H_3^* = 42{,}2295$, $\chi_1^* = 6{,}0057$, $\chi_2^* = 8{,}0909$, $\chi_3^* = 10{,}3220$.

Одержані результати розрахунків повністю узгоджуються з теоретичними висновками робіт [1, 2].

Зауваження 2. Для повноти картини в табл. 2 наведено для величин $H > H_k^*$ значення комплексних власних значень $\mathrm{Re}\,\chi_k$ і $\mathrm{Im}\,\chi_k$. Вони обчислені на основі алгоритму, який грунтується на сформульованому в роботі проекційному методі, хоча і має деяку специфіку, деталі якої в даній роботі не розглядаються.

1. *Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // Функцион. анализ и его прил. – 1968. – **2**, № 2. – С. 21–32.
2. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1984. – 228 с.
3. *Барняк М. Я.* Малые колебания вязкой несжимаемой жидкости в сосуде. – Киев, 1989. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89-43).
4. *Барняк М. Я.* Изучение нормальных поперечных колебаний вязкой жидкости в горизонтальном канале с помощью проекционных методов // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 34–41.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Одержано 06.06.96