УДК 517.944

Л. Г. Хома, Н. Г. Хома, А. О. Ботюк (Терноп. пед. ін-т)

ІСНУВАННЯ ПРОСТОРІВ ВЕЙВОДИ – ШТЕДРИ*

We consider the linear periodic problem $u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)$, $u(x+2\pi,t)=u(x,t+T)=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ and establish conditions of the existence of its classical solution in spaces that are subspaces of the Vejvoda–Shtedry spaces.

Вивчається лінійна періодична задача $u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)$, $u(x+2\pi,t)=u(x,t+T)=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. Встановлено умови існування класичного розв'язку даної задачі у просторах, які є підпросторами просторів Вейводи – Штедри.

Досліджується розв'язність лінійної 2π-періодичної задачі по змінній x і T-періодичної задачі по змінній t для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку.

1. Існування розв'язку. У багатьох роботах (див., наприклад, [1, 2]) розглядається крайова періодична задача вигляду

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathbb{R},\tag{1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbb{R},\tag{2}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbb{R},\tag{3}$$

і вказуються конкретні простори функцій, в яких вона може бути розв'язана. В [2] показано, що задача (1) – (3) може мати єдиний розв'язок лише в трьох просторах A_1, A_2, A_3 функцій, що відповідають періодам $T_1=(2p-1)\pi/q$, $T_2=4\pi p/(2s-1)$, $T_3=2(2p-1)\pi/(2s-1)$, $p\in\mathbb{Z}$, $q,s\in\mathbb{N}$.

Доведемо, що в підпросторах A_k^0 просторів A_k існує класичний розв'язок такої періодичної задачі:

$$u_{tt}-u_{xx}=F(x,t),\tag{4}$$

$$u(x+2\pi,t)=u(x,t),\tag{5}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2,\tag{6}$$

а також встановимо аналітичні умови виникнення підпросторів A_k^0.

Для дослідження існування розв'язку задачі (4) – (6) розглянемо оператор

$$(RF)(x,t,b)=-\frac14\int_0^x d\xi\int_\xi^x\{F(\xi,t+\xi-\eta)+F(\xi,t-\xi+\eta)\}d\eta\ +$$

$$+\ \frac14\int_x^b d\xi\int_\xi^x\{F(\xi,t+\xi-\eta)+F(\xi,t-\xi+\eta)\}d\eta\ \equiv$$

$$\equiv\frac14\int_0^b Q(x)d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}F(\xi,\tau)d\tau,\tag{7}$$

де $Q(\xi)=1$, коли $0\le\xi\le x$, $Q(\xi)=-1$, коли $x<\xi\le b$, b — дійсне число, відмінне від нуля, і такі простори функцій: C — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$; G_t — простір функцій двох змінних, непе-

* Виконана при підтримці Міжнародної Соросівської програми підтримки освіти в галузі точних наук (грант № PSU061114).

рервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$ разом з похідною по t; $Q_{2\pi}$ — простір 2π-періодичних по x на $\mathbb{R}^2$ функцій; $Q_{2\pi}^-$ — простір непарних по x і 2π-періодичних по x на $\mathbb{R}^2$ функцій; Q_T — простір T-періодичних по t на $\mathbb{R}^2$ функцій; Q_T^- — простір непарних по t і T-періодичних по t на $\mathbb{R}^2$ функцій; $C^{i,j}(\mathbb{R}^2)$ — простір функцій, i раз диференційовних по x і j раз диференційовних по t. Якщо $i=j$, то $C^{i,j}(\mathbb{R}^2)=C^i(\mathbb{R}^2)$; H_b — простір функцій $F\in C$, що задовольняють такі умови:

$$F(b-x,t+x-\tau-b)+F(b-x,t-x+\tau+b)+F(-x,t+x-\tau)+ \\ +F(-x,t-x+\tau)=0; \tag{8}$$

$$\int_0^{2\pi}dz\int_0^b\{F(b-z,t+b-\theta)+F(b-z,t-b+\theta)\}d\theta=0. \tag{9}$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо* $F\in G_t\cap Q_T\cap Q_{2\pi}\cap H_b$, *то функція* $u=RF$ *є класичним* $(u\in C^2(\mathbb{R}^2))$ *розв'язком лінійної періодичної задачі* (4) – (6).

Доведення. На основі (7) безпосередньою перевіркою переконуємося, що для кожної функції $F\in G_t\cap Q_T$ функція $u=RF$ є класичним розв'язком рівняння (4) і $u\in Q_T$, тобто функція $u=RF$ задовольняє умови (4) і (6).

Покажемо, що при виконанні умов теореми 1 функція $u=RF$ задовольняє умову періодичності (5). Для цього доведемо справедливість рівності

$$(RF)(x+2\pi,t,b)=(RF)(x,t,b). \tag{10}$$

Перетворимо ліву частину рівності (10), визначену формулою (7), зробивши спочатку заміну $\xi=2\pi-y$ у зовнішньому інтегралі, а потім $\eta=2\pi-\tau$ у внутрішньому. Маємо

$$(RF)(x+2\pi,t,b)=-\frac{1}{4}\int_0^{x+2\pi}d\xi\int_\xi^{x+2\pi}\{F(\xi,t+\xi-\eta)+F(\xi,t-\xi+\eta)\}d\eta+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x+2\pi}^{b}d\xi\int_\xi^{x+2\pi}\{F(\xi,t+\xi-\eta)+F(\xi,t-\xi+\eta)\}d\eta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_{2\pi}^{-x}dy\int_y^{-x}\Phi(t,y,\tau)d\tau+\frac{1}{4}\int_{-x}^{2\pi-b}dy\int_y^{-x}\Phi(t,y,\tau)d\tau\equiv$$

$$\equiv-\frac{1}{4}\int_{2\pi}^{0}dy\int_y^{-x}\Phi(t,y,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_{0}^{-x}dy\int_y^{-x}\Phi(t,y,\tau)d\tau+\frac{1}{4}\int_{-x}^{-b}dy\int_y^{-x}\Phi(t,y,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-b}^{2\pi-b}dy\int_y^{-x}\Phi(t,y,\tau)d\tau=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

де $\Phi(t,y,\tau)=F(2\pi-y,t-y+\tau)+F(2\pi-y,t+y-\tau)$.

В інтегралах I_2 та I_3 зробимо спочатку заміну $y=-\xi$ у зовнішніх інтегралах, а потім $\tau=-\eta$ у внутрішніх. З урахуванням того, що $F\in Q_{2\pi}$, остання рівність набуває вигляду

$$(RF)(x+2\pi,t,b)=I_1+(RF)(x,t,b)+I_4. \tag{11}$$

Перетворимо інтеграл I_4, зробивши відповідні заміни:

$$I_4 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dz \int_{z-b}^{-x} \{ F(b-z, t+b-z+\tau) + F(b-z, t-b+z-\tau) \} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dz \int_b^{x+z} \{ F(b-z, t+b-\theta) + F(b-z, t-b+\theta) \} d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dz \int_0^{b} \{ F(b-z, t+b-\theta) + F(b-z, t-b+\theta) \} d\theta -$$

$$- \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dz \int_0^{x+z} \{ F(b-z, t+b-\theta) + F(b-z, t-b+\theta) \} d\theta \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dz \int_0^{b} \{ F(b-z, t+b-\theta) + F(b-z, t-b+\theta) \} d\theta -$$

$$- \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dz \int_z^{-x} \{ F(b-z, t+b-z+\theta) + F(b-z, t-b+z-\theta) \} d\theta. \tag{12}$$

Якщо припустити, що $F \in H_b$, то на основі (11) і (12) одержимо, що $(RF)(x+2\pi, t, b) = (RF)(x, t, b)$, що й треба було довести.

Якщо позначити норму функції $F(x, t)$ так:

$$\| F(x,t) \|_C = \sup \left\{ | F(x,t) |;\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

то, використовуючи означення оператора (7), переконуємось у справедливості такого твердження.

Теорема 2. *Якщо* $F \in G_l \cap Q_T$, *то функція* $u = RF$ *є класичним розв'язком задачі* (4), (6), *для якого справедливі оцінки*

$$\| u(x,t) \|_C \le \left(b^2/4 \right) \| F(x,t) \|_C, \qquad \| u_t(x,t) \|_C \le (b/2) \| F(x,t) \|_C,$$

$$\| u_x(x,t) \|_C \le (b/2) \| F(x,t) \|_C,$$

2. Простори розв'язків. Природно виникає питання: яка структура загального простору, вказаного в теоремі 1, і як визначити число b?

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Кожна функція* $F \in Q_T^-$, *що задовольняє умову*

$$F(b-x, b+z) + F(-x, z) = 0 \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^2, \tag{13}$$

задовольняє й умову (8).

Доведення. Справді, для функції $F \in Q_T^-$ умову (8) можна записати таким чином:

$$F(b-x, b+(t-x+\tau)) + F(-x, t-x+\tau) =$$

$$= F(b-x, b+(-(t+x-\tau))) + F(-x, -(t+x-\tau)). \tag{14}$$

Отже, якщо виконується умова (13), то виконується умова (14) $(0 \equiv 0)$, а отже, й умова (8). Лему 1 доведено.

Таким чином, функціональна залежність (13) може визначати підпростори функцій простору H_b. Покажемо, що на її основі можна, щонайменше, утворити три простори функцій, в яких задача (4) – (6) має розв'язок і які є підпросторами просторів A_1, A_2, A_3 Вейводи – Штедри [2].

I. Нехай

$$F \in Q_{2\pi} \cap Q_T^-; \quad b_1 = Tq, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

У цьому випадку рівність (13) набуває вигляду

$$F(Tq - x, z) + F(-x, z) = 0. \tag{16}$$

Оскільки $F \in Q_{2\pi}$, то з (16) одержуємо $Tq \neq 2\pi k$.

Покладемо

$$Tq = (2p-1)\pi, \quad (2p-1, q) = 1, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

де запис $(k, s) = 1$ означає, що числа k і s взаємно прості. Тепер рівність (16) запишеться у вигляді

$$F(\pi - x, z) = -F(-x, z). \tag{18}$$

Враховуючи (18) і зроблені вище припущення, можна визначити число b_1, період T_1 і для функції $F \in Q_T^-$ підпростір A_1^0 функцій, у якому може бути справедлива теорема 1:

$$b_1 = T_1 q, \quad T_1 = (2p-1)\pi / q, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (2p-1, q) = 1,$$
$$A_1^0 \equiv \{F\colon F(x,t) = F(\pi - x, t) = F(x, t + T_1) = -F(-x, t) = -F(x, -t)\}. \tag{19}$$

Лема 2. *Якщо* $F \in A_1^0$, *то* $F \in Q_{2\pi}$.

Доведення. Справді,

$$F(x + 2\pi, t) = F(\pi - (-\pi - x), t) = -F(\pi + x, t) =$$
$$= -F(\pi - (-x), t) = -F(-x, t) = F(x, t),$$

що й треба було довести.

II. Нехай $F \in Q_{2\pi} \cap Q_T^-$; $b = (Tq)/2$, $q = 2s - 1$, $s \in \mathbb{N}$. У цьому випадку рівність (13) набуває вигляду

$$F\left(\frac{Tq}{2} - x, \frac{Tq}{2} + z\right) + F(-x, z) = 0. \tag{20}$$

Оскільки $q = 2s - 1$, $s \in \mathbb{N}$, — непарне число, то покладемо

$$Tq = 2\pi r, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad q = 2s - 1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (q, r) = 1. \tag{21}$$

Тепер на основі (20) і (21) в залежності від вибору числа r (парним чи непарним) визначимо ще два підпростори A_j^0, $j = 2, 3$, функцій, в яких може бути справедлива теорема 1:

$$b_2 = \frac{T_2 q}{2}, \quad T_2 = \frac{4\pi p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q = 2s - 1, \quad (p, q) = 1,$$

$$A_2^0 \equiv \{F\colon F(x,t) = F(2\pi + x, t) = -F(-x, t) = -F(x, -t) = -F(x, t + T_2/2)\};$$

$$b_3 = \frac{T_3 q}{2}, \quad T_3 = \frac{2\pi(2p-1)}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q = 2s - 1, \quad (2p-1, q) = 1,$$

$$A_3^0 \equiv \{F\colon F(x,t) = F(2\pi + x, t) = -F(-x, t) =$$
$$= -F(x, -t) = F(x, t + T_3) = F(\pi - x, t + T_3/2)\}.$$

Лема 3. *Якщо* $F \in A_2^0$, *то* $F \in Q_{T_2}$.

Доведення. Справді, $F(x, t + T_2) = F(x, t + T_2/2 + T_2/2) = -F(x, t + T_2/2) = F(x, t)$, що й треба було довести.

Лема 4. *Якщо* $F \in A_k^0$, *то* $F \in H_b$.

Доведення. Оскільки $F \in A_k^0$, то виконується умова (8) — перша умова простору H_b. Нехай $F \in A_k^0$. Тоді ліва частина рівності (9) при $b = b_k$ запишеться у вигляді

$$\int_0^{2\pi} dz \int_0^{b_k} \{ F(b_k - z, t + b_k - \theta) + F(b_k - z, t - b_k + \theta) \} d\theta, \qquad k = 1, 2, 3,$$

еквівалентному у всіх просторах A_k^0 виразу

$$\int_0^{2\pi} dz \int_0^{b_k} \{ F(z, t - \theta) + F(z, t + \theta) \} d\theta, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Оскільки $F(x, t)$ — непарна 2π-періодична по x, то останній інтеграл тотожно рівний нулю, що й треба було довести.

Зауваження. Отже, нами доведено, що, справді, крайова періодична задача (1) – (3) може бути розв'язана, принаймні, в трьох просторах Вейводи – Штедри A_k, оскільки задача (4) – (6) є частинним випадком задачі (1) – (3).

3. Властивості операторів. Підсумовуючи все викладене вище, введемо три оператори:

$$(R_k F)(x, t, b_k) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_\xi^x \{ F(\xi, t + \xi - \eta) + F(\xi, t - \xi + \eta) \} d\eta \; +$$

$$+ \; \frac{1}{4}\int_x^{b_k} d\xi \int_\xi^x \{ F(\xi, t + \xi - \eta) + F(\xi, t - \xi + \eta) \} d\eta \; \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4}\int_0^{b_k} Q(\xi) d\xi \int_{t + x - \xi}^{t - x + \xi} F(\xi, \tau) d\tau, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{22}$$

На основі теорем 1, 2 і леми 4 справедливе таке твердження.

Теорема 3. *Якщо* $F \in G_t \cap A_k^0$, *то функція* $u = R_k F$, $k = 1, 2, 3$, *є класичним* ($u \in C^2(\mathbb{R}^2)$) *розв'язком періодичної задачі* (4) – (6), *для якої справедливі оцінки*

$$\|u(x, t)\|_C \le (b^2/4) \, \|F(x, t)\|_C, \qquad \|u_t(x, t)\|_C \le (b/2) \, \|F(x, t)\|_C,$$

$$\|u_x(x, t)\|_C \le (b/2) \, \|F(x, t)\|_C.$$

Справедливі наступні твердження.

Лема 5. *Якщо* $F \in A_k^0$, *то оператори* (22) *мають наступні властивості*:

$$(R_k F)(x, t, b_k) = (R_k F)(x, t + T_k, b_k) = -(R_k F)(x, -t, b_k), \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$(R_2 F)(x, t + T_2/2, b_2) = -(R_2 F)(x, t, b_2). \tag{23}$$

Доведення проводиться безпосередньою перевіркою.

Лема 6. *Якщо* $F \in A_k^0$, *то виконується співвідношення*

$$\int\limits_{-b_k}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau = 0.$$

Доведення. Справедливі рівності

$$\int\limits_{-b_k}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau = \int\limits_{-b_k}^{0} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau + \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_{0}^{b_k} d\eta \int\limits_{t-x+\eta-b_k}^{t+x-\eta+b_k} F(b_k-\eta,\tau)\,d\tau + \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_{0}^{b_k} d\eta \int\limits_{t-x+\eta-2b_k}^{t+x-\eta} F(b_k-\eta, b_k+\theta)\,d\theta + \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi-2b_k}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau + \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi-2b_k} F(\xi,\tau)\,d\tau + \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t-x+\xi-2b_k} F(\xi,\tau)\,d\tau = \int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{0}^{-2b_k} F(\xi,\tau)\,d\tau \equiv 0,$$

оскільки $2b_k = T_k n$, $n \in \mathbb{N}$, і $F \in A_k^0$. Лему 6 доведено.

Лема 7. *Якщо* $F \in A_k^0$, $k = \overline{1,3}$, *то функція* $u_k = (R_k F)(x, t, b_k)$ *не. по змінній* x.

Доведення. Оскільки оператор (22) допускає зображення

$$(R_k F)(x,t,b_k) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau,$$

то виконуються рівності

$$(R_k F)(-x,t,b_k) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-x} d\xi \int\limits_{t+x+\xi}^{t-x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{b_k} d\xi \int\limits_{t+x+\xi}^{t-x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{t+x-y}^{t-x+y} F(-y,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{-b_k} dy \int\limits_{t+x-y}^{t-x+y} F(-y,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{t-x+y}^{t+x-y} F(y,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{-b_k} dy \int\limits_{t-x+y}^{t+x-y} F(y,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{t-x+y}^{t+x-y} F(y,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{b_k} dy \int\limits_{t-x+y}^{t+x-y} F(y,\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{0}^{b_k} dy \int_{t-x+y}^{t+x-y} F(y,\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int_{-b_k}^{0} dy \int_{t-x+y}^{t+x-y} F(y,\tau)\,d\tau =$$

$$= -(R_kF)(x,t,b_k) + \int_{-b_k}^{b_k} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi,\tau)\,d\tau.$$

Тепер на основі леми 6 маємо

$$(R_kF)(-x,t,b_k) = -(R_kF)(x,t,b_k),$$

що й треба було довести.

На основі лем 4, 5 і 7 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 4. *Якщо* $F \in G_t \cap A_2^0$, *то функція* $u = R_2F \in C^2 \cap A_2^0$ *і задовольняє умови* (4) – (6).

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.

Одержано 05.06.96