УДК 517.9

И. П. Мельниченко, С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ И АЛГЕБРЫ МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА. III *

We obtain a new representation of potential and flow functions for space potential solenoidal fields with axial symmetry. We study principal algebraic-analytical properties of monogenic functions of vector variable with values in an infinite-dimensional Banach algebra of even Fourier series and describe the relationship between these functions and the axially symmetric potential and Stokes flow function. The suggested method for the description of the above-mentioned fields is an analog of the method of analytic functions in the complex plane for the description of plane potential fields.

Одержано нові зображення потенціалу та функції течії для просторових потенціальних соленоїдальних полів з осьовою симетрією. Вивчено основні алгебраїчно-аналітичні властивості моногенних функцій векторного аргумента із значеннями в нескінченновимірній банаховій алгебрі парних рядів Фур'є та встановлено зв'язок цих функцій з осесиметричним потенціалом та функцією течії Стокса. Запропонований підхід до опису вказаних полів є аналогом апарату аналітичних функцій у комплексній площині при опису плоских потенціальних полів.

Данная статья является продолжением работ [1, 2] и имеет общие с ними обозначения, нумерацию пунктов, формул и теорем.

3. Проблема построения методов описания трехмерных потенциальных полей, аналогичных методам теории аналитических функций комплексного переменного, которые применяются в задачах для двумерного уравнения Лапласа, сформулирована М. А. Лаврентьевым (см., например, [3, с. 205]). Для ее решения может быть использована идея построения таких ассоциативных и коммутативных банаховых алгебр, в которых моногенные функции удовлетворяют трехмерному уравнению Лапласа. В [4] построено семейство базисов в трехмерной алгебре с указанными свойствами, дифференцируемые функции в которой являются гармоническими. Показано также, что такие функции задают пары трехмерных гармонических векторов, и введено естественное понятие сопряженности этих векторов, полностью аналогичное понятию сопряженности компонент аналитических функций комплексного переменного. Последнее частично решает проблему, поставленную М. А. Лаврентьевым. Однако было установлено [5], что среди построенных в [4] гармонических функций не представляется возможным особо выделить класс осесимметричных потенциалов, задачи для которых вызывают большой интерес в приложениях.

Построение алгебры, связанной с осесимметричными потенциалами, осуществлено путем последовательного рассмотрения алгебр более высокого ранга. При этом среди конечномерных алгебр не удалось обнаружить таких, полиномы в которых имеют компоненты, описывающие осесимметричные потенциалы, но была найдена бесконечномерная алгебра H [6, 7], в которой полиномы имеют это свойство. Существенным для приложений является изоморфизм между комплексификацией $H_{\mathbb{C}}$ алгебры H и алгеброй четных комплексных абсолютно сходящихся тригонометрических рядов Фурье, который способствует эффективному построению аналитических функций, принимающих значения в алгебре $H_{\mathbb{C}}$ и являющихся главными продолжениями голоморфных функций комплексного переменного. Построение таких функций, осуществляемое ниже, решает проблему М. А. Лаврентьева для осесимметричных потенциалов.

Пусть l_1 — линейное пространство бесконечных последовательностей $a := (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ действительных чисел a_k, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Введением нормы

* Выполнена при частичной поддержке Международных научных фондов (гранты № UB 4200 ISF и № 94-1474 INTAS) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий (грант № 11.3/12).

© И. П. МЕЛЬНИЧЕНКО, С. А. ПЛАКСА, 1997

$$\| a \|_{l_1} := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

пространство l_1 превращается в банахово. Тогда элементы $e_1 := (1; 0; 0; \dots)$, $e_2 := (0; 1; 0; \dots)$, $e_3 := (0; 0; 1; \dots)$ и т. д. образуют нормированный базис в l_1, и произвольный элемент a из l_1 представляется в виде разложения $a := \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$.

Введение ассоциативной и коммутативной операции умножения ab элементов $a, b \in l_1$ с таблицей умножения для базисных элементов $e_k e_1 = e_k$, $e_m e_k = e_k e_m = (e_{m+k-1} + (-1)^{k-1} e_{m-k+1})/2$ для всех $m \geq k$, $k = 1, 2, \dots$, превращает l_1 в банахову алгебру H, рассмотренную в [6, 7].

Осуществим теперь комплексификацию алгебры H: $H_{\mathbb{C}} \equiv H \oplus iH := \{a + ib : a, b \in H\}$ так, что нормой в $H_{\mathbb{C}}$ будет

$$\| c \|_{H_{\mathbb{C}}} := \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|,$$

где

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H_{\mathbb{C}}.$$

Алгебра $H_{\mathbb{C}}$ изоморфна алгебре $\mathcal{F}$ абсолютно сходящихся тригонометрических рядов Фурье

$$a(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k i^{k-1} \cos(k-1)\tau \tag{65}$$

с комплексными коэффициентами a_k и нормой

$$\| a(\tau) \|_{\mathcal{F}} := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

При этом имеет место изоморфизм $e_k \leftrightarrow i^{k-1} \cos(k-1)\tau$.

Отметим некоторые свойства алгебры $H_{\mathbb{C}}$. Структура максимальных идеалов алгебры абсолютно сходящихся комплексных рядов Фурье, описанных в [8], позволяет сделать заключение о строении максимальных идеалов алгебры $H_{\mathbb{C}}$, а также о необратимости в $H_{\mathbb{C}}$ базисных элементов e_k, $k = 2, 3, \dots$. В дальнейших построениях важную роль будет играть максимальный идеал

$$I_0 := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H_{\mathbb{C}} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\operatorname{Re} c_{2k-1} - \operatorname{Im} c_{2k}) = 0, \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\operatorname{Re} c_{2k} + \operatorname{Im} c_{2k-1}) = 0 \right\}$$

алгебры $H_{\mathbb{C}}$. Он изоморфен максимальному идеалу алгебры $\mathcal{F}$, состоящему из рядов (65), которые обращаются в нуль при $\tau = 0$. Идеалу I_0 соответствует линейный функционал

$$f_{I_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k\right) :=$$

$$:= -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\operatorname{Re} c_{2k-1} - \operatorname{Im} c_{2k}) - i\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\operatorname{Re} c_{2k} + \operatorname{Im} c_{2k-1})$$

на $H_{\mathbb{C}}$, ядром которого является I_0.

Выделим в $H_{\mathbb{C}}$ линейную оболочку векторов e_1, e_2 над $\mathbb{R}$, являющуюся плоскостью $\mu := \{\zeta = x e_1 + y e_2 :\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Условимся, что всюду в дальнейшем $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Функцию $\Phi :\ G_\zeta \to H_{\mathbb{C}}$ назовем моногенной в области $G_\zeta \subset \mu$, если для каждой точки $\zeta \in G_\zeta$ существует вектор $\Phi'(\zeta) \in H_{\mathbb{C}}$ такой, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0,\\ \varepsilon \in \mathbb{R}}} \|(\Phi(\zeta + \varepsilon\eta) - \Phi(\zeta))\,\varepsilon^{-1} - \eta\,\Phi'(\zeta))\|_{H_{\mathbb{C}}} = 0 \quad \forall\, \eta \in \mu.$$

Обозначим через G область декартовой плоскости xOy, конгруэнтную области $G_\zeta \subset \mu$ при взаимно однозначном соответствии $\zeta = x e_1 + y e_2 \leftrightarrow (x, y) \in$ $\in G$.

Для моногенных функций $\Phi :\ G_\zeta \to H_{\mathbb{C}}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 15. *Для того чтобы функция* $\Phi :\ G_\zeta \to H_{\mathbb{C}}$ *вида*

$$\Phi(x e_1 + y e_2) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y)\, e_k,$$

где $U_k :\ G \to \mathbb{C}$, *была моногенной в области* $G_\zeta \subset \mu$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* U_k, $k = 1, 2, \ldots$, *были дифференцируемы в области* G *и при этом в* G *выполнялись следующие условия*:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_1}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2}{\partial x},\\ \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3}{\partial x},\\ \frac{\partial U_k}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{k-1}}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{k+1}}{\partial x}, \quad k = 3, 4, \ldots,\end{gathered} \tag{66}$$

а также соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial U_k}{\partial x}\right| < \infty, \tag{67}$$

$$\lim_{s^2 + t^2 \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \left| U_k(x+s, y+t) - U_k(x, y) - \frac{\partial U_k}{\partial x} s - \frac{\partial U_k}{\partial y} t \right| (s^2 + t^2)^{-1/2} = 0. \tag{68}$$

Доказательство теоремы 15 аналогично доказательству соответствующей теоремы теории аналитических функций комплексного переменного [9, с. 20, 21]. Отметим, что условия (66) аналогичны условиям Коши – Римана для моногенных функций комплексного переменного.

Рассмотрим аналитические функции переменной $\zeta \in \mu$. Функцию Ψ: $G_\zeta \to H_{\mathbb{C}}$ назовем аналитической в области $G_\zeta \subset \mu$, если в некоторой окрестности каждой точки $\zeta_0 \in G_\zeta$ она представима суммой сходящегося степенного ряда:

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - \zeta_0)^k, \quad c_k \in H_{\mathbb{C}}.$$

Очевидно, что аналитическая в области $G_\zeta \subset \mu$ функция $\Psi: G_\zeta \to H_{\mathbb{C}}$ является моногенной в этой области и производная $\Psi'(\zeta)$ также моногенна в G_ζ. При этом остается неясным, является ли всякая моногенная в области $G_\zeta \subset \mu$ функция аналитической в этой области.

Для аналитических функций переменной $\zeta \in \mu$ справедлива теорема единственности, формулировка и доказательство которой полностью аналогичны теореме единственности аналитических функций комплексного переменного [9, с. 68, 69].

Пусть, как и в [1, 2], D — правильная в направлении оси Oy область декартовой плоскости xOy. Аналитическую в области D_ζ функцию $\Psi: D_\zeta \to$ $\to H_{\mathbb{C}}$ назовем $\mathbb{C}$-аналитической, если в некоторой окрестности каждой точки $x_0 e_1 \in D_\zeta$, $x_0 \in \mathbb{R}$, она представляется суммой сходящегося степенного ряда с комплексными коэффициентами:

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - x_0 e_1)^k, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, $\mathbb{C}$-аналитическая функция является главным продолжением некоторой голоморфной функции комплексного переменного в смысле, определенном в [10, с. 182]. Известно, что главное продолжение всегда единственно.

Пусть γ — жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$. Интеграл по γ от функции $g: \gamma \to H_{\mathbb{C}}$, имеющей вид

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\, e_k, \quad t \in \gamma,$$

где $g_k: \gamma \to \mathbb{C}$, определим следующим образом:

$$\int_\gamma g(t)\, dt := \sum_{k=1}^{\infty} e_k \int_\gamma g_k(t)\, dt.$$

При этом ряд в правой части равенства должен являться элементом алгебры $H_{\mathbb{C}}$.

Теорема 16. *Пусть граница ∂D_z области $D_z \subset \mathbb{C}$ — жорданова спрямляемая кривая и функция $h: \partial D_z \to \mathbb{C}$ суммируема на ∂D_z. Тогда интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} (t e_1 - \zeta)^{-1} h(t)\, dt$$

представляет $\mathbb{C}$-аналитическую функцию в области D_ζ.

Доказательство. Пусть $\zeta = x e_1 + y e_2$, $t \in \mathbb{C}$. Для определения коэффициентов в разложении элемента $(te_1-\zeta)^{-1}$ по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ используем изоморфизм алгебр $H_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{F}$, а также выражение интеграла [11, с. 27]

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos m\tau}{a+b\cos\tau}\,d\tau,$$

позволяющее выписать коэффициенты Фурье функции $(t-x--yi\cos\tau)^{-1}$. Таким образом, получаем

$$(te_1-\zeta)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\left(e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}-(t-x)}{y}\right)^k e_{k+1}\right), \qquad (69)$$

$$t\notin s[z,\overline{z}], \quad z=x+iy, \quad y\neq 0,$$

где отрезок $s[z,\overline{z}]$ — спектр элемента ζ.

Теперь теорема доказывается аналогично доказательству разложимости в степенной ряд интеграла типа Коши в комплексной плоскости [12, с. 107, 108].

Отличие доказанной теоремы от аналогичной теоремы для банаховых алгебр [10, с. 182, 183] состоит в том, что функция $h:\ \partial D_z\to\mathbb{C}$ является суммируемой.

Введем линейный оператор A, который каждой функции $\Phi:\ G_\zeta\to H_{\mathbb{C}}$, $G_\zeta\subset\mu$, ставит в соответствие по формуле $F(x+iy):=f_{I_0}(\Phi(x\,e_1+y\,e_2))$ функцию $F:\ G_z\to\mathbb{C}$, где множество G_z является образом множества G_ζ при отображении $z=f_{I_0}(\zeta)$, $\zeta\in G_\zeta$. Тогда очевидно, что если функция Φ моногенна в области G_ζ, то функция F голоморфна в области G_z.

В следующей теореме определяется вид интегральной формулы Коши для $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\zeta\in\mu$.

Теорема 17. *Если функция* $\Psi:\ D_\zeta\to H_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$*-аналитична в области* D_ζ, *то*

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(te_1-\zeta)^{-1}(A\Psi)(t)\,dt \quad \forall\,\zeta\in D_\zeta, \qquad (70)$$

где γ *— произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в* $\mathbb{C}$, *которая ограничивает правильную в направлении мнимой оси область* D'_z *такую, что* $\overline{D'_z}\subset D_z$ *и* $f_{I_0}(\zeta)\in D'_z$.

Доказательство. Обе части равенства (70) являются $\mathbb{C}$-аналитическим продолжением в плоскости μ голоморфной функции $(A\Psi)(z)$, $z\in D_z$, и совпадают на вещественной оси. По теореме единственности такое продолжение единственно. Теорема доказана.

Покажем, что $\mathbb{C}$-аналитические функции являются в определенном смысле компонентами функций, моногенных в области D_ζ. Установим также связь между $\mathbb{C}$-аналитическими функциями в области D_ζ и решениями системы (1) в D.

Теорема 18. *Любая моногенная в области* D_ζ *функция* $\Phi:\ D_\zeta\to H_{\mathbb{C}}$ *представляется в виде*

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (te_1 - \zeta)^{-1}(A\Phi)(t)\,dt + \Phi_0(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta, \tag{71}$$

где кривая γ *имеет такие же свойства, как и в теореме* 17, *а* $\Phi_0 : D_\zeta \to I_0$ *— некоторая моногенная в области* D_ζ *функция, принимающая значения в идеале* I_0. *При этом*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (te_1 - \zeta)^{-1}(A\Phi)(t)\,dt =$$

$$= e_1 \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{(A\Phi)(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{\infty} e_{k+1}\int\limits_{\gamma} \frac{(A\Phi)(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t-x)}{y}\right)^k dt =:$$

$$=: \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y)\,e_k, \tag{72}$$

$$\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta, \quad z = x + iy, \quad y \neq 0,$$

и пара функций

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y), & (x,y) \in D,\ y \neq 0; \\ \lim\limits_{\substack{\eta \to 0, \\ (x,\eta) \in D}} U_1(x,\eta), & (x,y) \in D,\ y = 0, \end{cases}$$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2} U_2(x,y), & (x,y) \in D,\ y \neq 0; \\ 0, & (x,y) \in D,\ y = 0, \end{cases} \tag{73}$$

является решением системы (1) *в области* D.

Доказательство. Легко видеть, что определяемая из равенства (71) моногенная в области D_ζ функция Φ_0 принадлежит ядру оператора A, т. е. $\Phi_0(\zeta) \in I_0$ для всех $\zeta \in D_\zeta$. Так как равенство (72) является следствием разложения (69), то согласно теореме 5 [1] пара функций (73) является решением системы (1) в области D. Теорема доказана.

Из теоремы 18 следует, что алгебра моногенных в области D_ζ функций разлагается в прямую сумму алгебры $\mathbb{C}$-аналитических в D_ζ функций и алгебры моногенных в D_ζ функций, принимающих значения в идеале I_0.

Выпишем некоторые разложения по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ для элементарных $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\zeta \in \mu$ (заметим, что с учетом изоморфизма алгебр $H_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{F}$ получение таких разложений сводится к определению коэффициентов Фурье). Пусть $\zeta = xe_1 + ye_2$. Тогда разложение степенной функции имеет вид

$$\zeta^n = (x^2+y^2)^{n/2}\left(P_n(\cos\theta)\,e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+k)!}(\operatorname{sgn} y)^k P_n^k(\cos\theta)\,e_{k+1}\right), \tag{74}$$

где целое число n больше нуля,

$$\cos\theta := \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\operatorname{sgn} y := \begin{cases} 1, & \text{если } y \ge 0; \\ -1, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

P_n и P_n^k — полиномы и присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \tag{75}$$

$$P_n^k(t) := (1-t^2)^{k/2}\frac{d^k}{dt^k}P_n(t). \tag{76}$$

Для функций e^ζ, $\sin\zeta$ и $\cos\zeta$ будем иметь

$$e^\zeta = e^x\left(J_0(y)\,e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(y)\,e_{k+1}\right),$$

$$\sin\zeta = \sin x\left(J_0(iy)\,e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(iy)\,e_{2k+1}\right) -$$

$$-\ 2i\cos x \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(iy)\,e_{2k},$$

$$\cos\zeta = \cos x\left(J_0(iy)\,e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(iy)\,e_{2k+1}\right) +$$

$$+\ 2i\sin x \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(iy)\,e_{2k},$$

где

$$J_k(t) := \frac{(-i)^k}{\pi}\int_0^{\pi} e^{it\cos\tau}\cos k\tau\,d\tau$$

— функции Бесселя. Для функций ζ^{-1} и $\operatorname{Ln}\zeta$ получим

$$\zeta^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(e_1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right)^k e_{k+1}\right), & \text{если } x>0; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(e_1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}\right)^k e_{k+1}\right), & \text{если } x<0, \end{cases}$$

$$\operatorname{Ln}\zeta =$$

$$= \begin{cases} \left(\left(\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2} + 2m\pi i\right)e_1 + \right. \\ \qquad \left. + \, 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right)^k e_{k+1}\right), & \text{esly } x>0; \\ \left(\left(\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2} + (2m+1)\pi i\right)e_1 + \right. \\ \qquad \left. + \, 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}\right)^k e_{k+1}\right), & \text{esly } x<0, \end{cases}$$

где m — целое число. При этом функции ζ^{-1} и $\operatorname{Ln}\zeta$ не определены при $x=0$.

Так как множество

$$\mu\setminus\{\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\colon \sqrt{x^2+y^2} < N\}$$

связно при любых N, то аналогично теореме Рунге [12, с. 124 – 126] доказывается следующий аналог этой теоремы для $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\zeta\in\mu$.

Теорема 19. *Пусть функция $\Psi\colon D_\zeta \to H_{\mathbb{C}}$ является $\mathbb{C}$-аналитической в области D_ζ и K_ζ — произвольное компактное подмножество D_ζ. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется полином $P(\zeta)$ с комплексными коэффициентами такой, что*

$$\sup_{\zeta\in K_\zeta}\|\Psi(\zeta) - P(\zeta)\|_{H_{\mathbb{C}}} < \varepsilon.$$

Из теоремы 19 и соотношений (73), (74) следует, что на каждом компактном подмножестве области D осесимметричный потенциал $\varphi(x, y)$, удовлетворяющий условиям теоремы 6 [1], равномерно приближается линейными комбинациями полиномов

$$L_n(x, y) := (x^2+y^2)^{n/2}P_n(x(x^2+y^2)^{-1/2}),$$

а функция тока Стокса $\psi(x, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 7 [1], равномерно приближается линейными комбинациями полиномов

$$L_n^1(x, y) := (n+1)^{-1}|y|(x^2+y^2)^{n/2}P_n^1(x(x^2+y^2)^{-1/2}),$$

где функции P_n и P_n^1 определены равенствами (75), (76).

В плоскости μ справедлив также следующий аналог принципа симметрии классической теории аналитических функций комплексного переменного.

Теорема 20. *Пусть функция*

$$\Psi(xe_1 + ye_2) = \sum_{k=1}^{\infty}U_k(x, y)\,e_k$$

непрерывна на множестве $\{xe_1 + ye_2\in D_\zeta\colon y\ge 0\}$ и аналитична в области $\{xe_1+ye_2\in D_\zeta\colon y>0\}$, при этом $U_n(x, 0)=0$, $n=2, 3, \ldots$, а функция $U_1(x, 0)$ бесконечно дифференцируема по x. Пусть, кроме того, при всех k существуют пределы

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{\partial^m U_k}{\partial x^m}(x, y) =: U_k^{(m,0)}(x, 0) \quad \forall\, m > 0,$$

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{\partial^{m+1} U_k}{\partial x^m \partial y}(x, y) =: U_k^{(m,1)}(x, 0) \quad \forall\, m \geq 0,$$

функции $U_k^{(m,1)}(x, 0)$ *дифференцируемы по* x *и при этом выполняются соотношения*

$$U_k^{(m,0)}(x, 0) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} U_k(x, 0) \quad \forall\, m > 0,$$

$$U_k^{(m,1)}(x, 0) = \lim_{y \to 0+0} \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^m U_k}{\partial x^m}(x, y) - U_k^{(m,0)}(x, 0)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} U_k^{(m-1,1)}(x, 0) \quad \forall\, m > 0,$$

$$U_k^{(0,1)}(x, 0) = 0, \quad k = 1\,; 3\,; 4\,; \ldots\,,$$

$$U_2^{(0,1)}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, 0)\,.$$

Тогда функция

$$\tilde{\Psi}(x e_1 + y e_2) = \begin{cases} \Psi(x e_1 + y e_2), & x e_1 + y e_2 \in D_\zeta,\ y \geq 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} U_k(x, -y)\, e_k, & x e_1 + y e_2 \in D_\zeta,\ y < 0, \end{cases}$$

является $\mathbb{C}$*-аналитической в области* D_ζ.

Доказательство. Легко устанавливается, что функция $\tilde{\Psi}(\zeta)$ аналитична в области $\{x e_1 + y e_2 \in D_\zeta :\ y < 0\}$. Очевидно также, что в точках $\zeta = x e_1 \in D_\zeta$ выполняются условия (66) – (68). Следовательно, по теореме 15 функция $\tilde{\Psi}(\zeta)$ моногенна в точках $\zeta = x e_1 \in D_\zeta$. Аналогично заключаем, что в этих точках моногенны ее производная $\tilde{\Psi}'(\zeta)$, а также производные любого порядка. Поэтому в некоторой окрестности каждой точки $x e_1 \in D_\zeta$ функция $\tilde{\Psi}(\zeta)$ разлагается в ряд Тейлора. Поскольку $U_k(x, 0) = 0$, $k = 2\,; 3\,; \ldots\,$, то коэффициенты в указанном разложении являются комплексными числами. Следовательно, функция $\tilde{\Psi}(\zeta)$ — $\mathbb{C}$-аналитична в области D_ζ. Теорема доказана.

Обозначим через E область декартовой плоскости xOy, правильную в направлении оси Ox. Последнее означает, что область E вместе с каждой точкой (x_0, y_0) содержит отрезок $\{(x, y_0) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \leq |x_0|\}$. Область E_z в комплексной плоскости при этом назовем правильной в направлении вещественной прямой.

Если $z_0 \in E_z$, $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$, то $\sqrt{-(z - z_0)(z + \bar{z}_0)}$ будем понимать как непрерывную ветвь аналитической функции $H(z) = \sqrt{-(z - z_0)(z + \bar{z}_0)}$ с разрезом $\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0,\ |\operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Re} z_0|\}$ такую, что $H(z) > 0$ для всех $z = i\eta$: $\eta < \operatorname{Im} z_0$.

Если $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{E_z}$, $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$, то $\sqrt{-(z - z_0)(z + \bar{z}_0)}$ будет обозначать непрерывную ветвь той же аналитической функции $H(z)$ с разрезом $\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z =$

$= \operatorname{Im} z_0,\ |\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Re} z_0|\}$, для которой $H(z) > 0$ для всех $z = i\eta:\ \eta < \operatorname{Im} z_0$.

Аналогично теореме 18 доказывается следующее утверждение.

Теорема 21. *Любая моногенная в* $\mu \setminus \overline{E_\zeta}$ *функция* $\Phi:\ \mu \setminus \overline{E_\zeta} \to H_{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\substack{\|\zeta\|_{H_{\mathbb{C}}} \to \infty, \\ \zeta \in \mu \setminus \overline{E_\zeta}}} \Phi(\zeta) = 0,$$

представима в виде

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e_2 (t e_2 - i\zeta)^{-1} (A\Phi)(t)\, dt + \Phi_0(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in \mu \setminus \overline{E_\zeta}.$$

Здесь γ *— произвольная замкнутая или замыкаемая в бесконечно удаленной точке жорданова спрямляемая кривая в* $\mathbb{C}$, *которая ограничивает правильную в направлении вещественной прямой область* E'_z *такую, что* $\overline{E_z} \subset E'_z$ *и* $f_{I_0}(\zeta) \in \mathbb{C} \setminus \overline{E'_z}$, *а* $\Phi_0:\ \mu \setminus \overline{E_z} \to I_0$ *— некоторая моногенная в* $\mu \setminus \overline{E_z}$ *функция со значениями в идеале* I_0. *При этом*

$$\int_\gamma e_2 (t e_2 - i\zeta)^{-1} (A\Phi)(t)\, dt =$$

$$= e_1 \int_\gamma \frac{(A\Phi)(t)}{\pm\sqrt{-(t-z)(t+\overline{z})}} \, \frac{\pm\sqrt{-(t-z)(t+\overline{z})} - x}{t - iy}\, dt -$$

$$- 2x \sum_{k=1}^{\infty} i^k e_{k+1} \int_\gamma \frac{(A\Phi)(t)}{\pm\sqrt{-(t-z)(t+\overline{z})}\,(t-iy)} \times$$

$$\times \left(\frac{\pm\sqrt{-(t-z)(t+\overline{z})} - x}{t - iy} \right)^k dt, \tag{77}$$

$$\zeta = x e_1 + y e_2 \in \mu \setminus \overline{E_\zeta}, \quad z = x + iy, \quad \pm x > 0.$$

Отметим, что для функции $H_t(x, y) := \sqrt{-(t - x - iy)(t + x - iy)}$ выполняется равенство $H_t(-x, y) = H_t(x, y)$ и, вообще говоря, неравенство $H_t(x, -y) \neq$ $\neq H_t(x, y)$, т. е. в декартовой плоскости xOy эта функция, можно сказать, имеет симметрию относительно оси Oy, а не Ox. Поэтому, очевидно, что компоненты интеграла (77) не связаны с решением системы (1).

Введем в рассмотрение элемент e_0, не принадлежащий $H_{\mathbb{C}}$, для которого справедливы правила умножения:

$$e_0 e_1 = e_0, \quad e_0 e_2 = -e_1,$$

$$e_0 e_{2k+1} = e_0 - 2 \sum_{m=1}^{k} e_{2m}, \quad e_0 e_{2k+2} = -e_1 - 2 \sum_{m=1}^{k} e_{2m+1}$$

при $k = 1, 2, \ldots$. Будем полагать, что при этом также остаются справедливыми аксиомы ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности. Поместим алгебру $H_{\mathbb{C}}$ в банахово пространство

$$\tilde{H}_{\mathbb{C}} := \left\{ c = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{C}, \ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|c\|_{\tilde{H}_{\mathbb{C}}} := \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|.$$

Заметим, что тем самым осуществлено пополнение только лишь линейного пространства l_1, а не алгебры $H_{\mathbb{C}}$, поскольку произведение $e_0 e_0$ не определено.

Теперь выделим в $\tilde{H}_{\mathbb{C}}$ плоскость $\tilde{\mu} := \{\tilde{\zeta} = x e_1 + y e_0 : x, y \in \mathbb{R}\}$ и обозначим через $G_{\tilde{\zeta}}$ область плоскости $\tilde{\mu}$, конгруэнтную области $G \subset \mathbb{R}^2$ при таком соответствии $\tilde{\zeta} = x e_1 + y e_0$, $(x, y) \in G$.

Функцию $\Phi : G_{\tilde{\zeta}} \to H_{\mathbb{C}}$ будем называть моногенной в области $G_{\tilde{\zeta}}$, если для каждой точки $\tilde{\zeta} \in G_{\tilde{\zeta}}$ существует вектор $\Phi'(\tilde{\zeta}) \in H_{\mathbb{C}}$ такой, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0, \\ \varepsilon \in \mathbb{R}}} \|(\Phi(\tilde{\zeta} + \varepsilon \tilde{\eta}) - \Phi(\tilde{\zeta}))\, \varepsilon^{-1} - \tilde{\eta}\, \Phi'(\tilde{\zeta})\|_{\tilde{H}_{\mathbb{C}}} = 0 \quad \forall\ \tilde{\eta} \in \tilde{\mu}.$$

Критерий моногенности функции $\Phi : G_{\tilde{\zeta}} \to H_{\mathbb{C}}$ устанавливается в следующей теореме.

Теорема 22. *Для того чтобы функция* $\Phi : G_{\tilde{\zeta}} \to H_{\mathbb{C}}$ *вида*

$$\Phi(x e_1 + y e_0) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x, y)\, e_k,$$

где $V_k : G \to \mathbb{C}$, *была моногенной в области* $G_{\tilde{\zeta}}$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* V_k, $k = 1, 2, \ldots$, *были дифференцируемы в области* G *и при этом в* G *выполнялись следующие условия Коши – Римана:*

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_{k+1}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_{k-1}}{\partial y}, \quad k = 3, 4, \ldots,$$

а также условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial V_k}{\partial x} \right| < \infty,$$

$$\lim_{s^2 + t^2 \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \left| V_k(x+s, y+t) - V_k(x, y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial V_k}{\partial x} s - \frac{\partial V_k}{\partial y} t \right| (s^2 + t^2)^{-1/2} = 0.$$

Доказательство теоремы 22 легко провести аналогично доказательству теоремы 15.

Расширим функционал f_{I_0} до линейного непрерывного функционала на пространстве $\tilde{H}_{\mathbb{C}}$, полагая $f_{I_0}(e_0)=i$. Введем линейный оператор B, который каждой функции $\Phi:\ G_{\tilde{\zeta}} \to H_{\mathbb{C}}$ по формуле $F(x+iy)=f_{I_0}(\Phi(xe_1+ye_0))$ ставит в соответствие функцию $F:\ G_z \to \mathbb{C}$. При этом очевидно, что если функция Φ моногенна в области $G_{\tilde{\zeta}}$, то функция F голоморфна в области G_z.

Легко доказать аналогично теореме 18 следующее утверждение.

Теорема 23. *Любая моногенная в* $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}}$ *функция* $\Phi:\ \tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}} \to H_{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\substack{\|\tilde{\zeta}\|_{\tilde{H}_{\mathbb{C}}} \to \infty, \\ \tilde{\zeta} \in \tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}}}} \Phi(\tilde{\zeta}) = 0,$$

представима в виде

$$\Phi(\tilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (te_1-\tilde{\zeta})^{-1}(B\Phi)(t)\,dt + \Phi_0(\tilde{\zeta}) \quad \forall\ \tilde{\zeta} \in \tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}}.$$

Здесь γ *— произвольная замкнутая или замыкаемая в бесконечно удаленной точке жорданова спрямляемая кривая в* $\mathbb{C}$, *которая ограничивает правильную в направлении мнимой оси область* D'_z *такую, что* $\overline{D_z} \subset D'_z$ *и* $f_{I_0}(\tilde{\zeta}) \in \mathbb{C} \setminus \overline{D'_z}$, *а* $\Phi_0:\ \tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}} \to I_0$ *— некоторая моногенная в* $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}}$ *функция со значениями в идеале* I_0. *При этом*

$$\int_{\gamma} (te_1-\tilde{\zeta})^{-1}(B\Phi)(t)\,dt =$$

$$= e_1\int_{\gamma} \frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}-y}{t-x}\,dt -$$

$$- 2y\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e_{k+1}\int_{\gamma}\frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\,(t-x)} \times$$

$$\times \left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}-y}{t-x}\right)^k dt, \tag{78}$$

$$\tilde{\zeta} = xe_1+ye_0 \in \tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}}, \quad z=x+iy, \quad \pm y>0.$$

Теорема 24. *Пусть выполнены условия теоремы* 23 *и область* $D_{\tilde{\zeta}}$ *ограничена. Тогда пара функций*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \pm V_1(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D},\ \pm y>0; \\ \lim\limits_{\substack{\eta\to 0+0, \\ (x,\eta)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}}} V_1(x,\eta), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D},\ y=0, \end{cases}$$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} |y|\sum\limits_{k=1}^{\infty} V_{2k}(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D},\ y\neq 0; \\ 0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D},\ y=0, \end{cases} \tag{79}$$

является решением системы (1) *в области* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. *При этом функции* $V_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, *определяются из равенства*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(te_1-\tilde{\zeta})^{-1}(B\Phi)(t)\,dt = -e_2\left(e_1\int_{\gamma}\frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt\,+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e_{k+1}\int_{\gamma}\frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}-y}{t-x}\right)^k dt\right) =:$$

$$=:\,-e_2\sum_{k=1}^{\infty}V_k(x, y)\,e_k, \tag{80}$$

$$\tilde{\zeta} = xe_1 + ye_0 \in \tilde{\mu}\setminus\overline{D_{\tilde{\zeta}}},\quad z = x+iy,\quad \pm y>0,$$

где γ *— замкнутая жорданова спрямляемая кривая в* $\mathbb{C}$, *ограничивающая область* D'_z *с такими же свойствами, как и в теореме* 23.

Доказательство. Исходя из равенства (78), легко устанавливаем соотношение (80). Согласно теореме 8 [2] и замечанию к ней пара функций (79) является решением системы (1) в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Теорема доказана.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 25. *Пусть область* $D_{\tilde{\zeta}}$ *не ограничена и выполнены условия теоремы* 23, *а также дополнительные условия*

$$\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}}} z(B\Phi)(z) = 0,$$

$$\int_{|y|}^{\infty}\left|(B\Phi)(x+i\eta)+(B\Phi)(x-i\eta)\right|d\eta < \infty \quad \forall\,(x, y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}.$$

Тогда пара функций (79) *является решением системы* (1) *в* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. *При этом функции* $V_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, *определяются из равенства* (80), *где* γ *— замыкаемая в бесконечно удаленной точке жорданова спрямляемая кривая в* $\mathbb{C}$, *ограничивающая область* D'_z *с такими же свойствами, как и в теореме* 23.

Это утверждение доказывается аналогично теореме 24. При этом необходимо использовать теорему 13 [2].

Введем определение $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\tilde{\zeta} \in \tilde{\mu}$. Функцию $\Psi\colon \tilde{\mu}\setminus\overline{D_{\tilde{\zeta}}} \to H_{\mathbb{C}}$ назовем $\mathbb{C}$-аналитической в $\tilde{\mu}\setminus\overline{D_{\tilde{\zeta}}}$, если существует голоморфная в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ функция $F\colon \mathbb{C}\setminus\overline{D_z}\to\mathbb{C}$ такая, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}}} F(z) = 0 \tag{81}$$

и

$$\Psi(\tilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(te_1-\tilde{\zeta})^{-1}F(t)\,dt \quad \forall\,\tilde{\zeta}\in\tilde{\mu}\setminus\overline{D_{\tilde{\zeta}}},$$

где кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 23.

Докажем теорему единственности для $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\tilde{\zeta} \in \tilde{\mu}$.

Теорема 26. *Если две* $\mathbb{C}$*-аналитические в* $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$ *функции* $\Psi_1 : \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta} \to H_{\mathbb{C}}$, $\Psi_2 : \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta} \to H_{\mathbb{C}}$ *совпадают на множестве, имеющем предельную точку в* $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$, *то* $\Psi_1(\tilde{\zeta}) = \Psi_2(\tilde{\zeta})$ *для всех* $\tilde{\zeta} \in \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$.

Доказательство. Пусть

$$\Psi_1(\tilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (te_1 - \tilde{\zeta})^{-1} F_1(t)\, dt,$$

$$\Psi_2(\tilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (te_1 - \tilde{\zeta})^{-1} F_2(t)\, dt \quad \forall\, \tilde{\zeta} \in \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta},$$

где F_1, F_2 — голоморфные в $\mathbb{C} \setminus \overline{D_z}$ функции, удовлетворяющие условию (81), а кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 23. Тогда $B\Psi_1 = F_1$, $B\Psi_2 = F_2$, и при этом функции F_1, F_2 совпадают на множестве, которое имеет предельную точку в $\mathbb{C} \setminus \overline{D_z}$. Согласно теореме единственности аналитических функций комплексного переменного [9, с. 68] $F_1 = F_2$ всюду в $\mathbb{C} \setminus \overline{D_z}$. Следовательно, $\Psi_1 = \Psi_2$ всюду в $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$. Теорема доказана.

Следствие. Если $\Psi : \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta} \to H_{\mathbb{C}}$ — $\mathbb{C}$*-аналитическая функция в* $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$, *то*

$$\Psi(\tilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (te_1 - \tilde{\zeta})^{-1} (B\Psi)(t)\, dt \quad \forall\, \tilde{\zeta} \in \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta},$$

где кривая γ *имеет такие же свойства, как и в теореме* 23.

Повторяя рассуждения, приведенные в [8, с. 50, 51], получаем, что для функций $\Phi_1 : \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta} \to H_{\mathbb{C}}$, $\Phi_2 : \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta} \to H_{\mathbb{C}}$, моногенных в $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$, справедливо равенство

$$\int\limits_{\gamma} (te_1 - \tilde{\zeta})^{-1} (B\Phi_1)(t)\, dt \int\limits_{\gamma} (te_1 - \tilde{\zeta})^{-1} (B\Phi_2)(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma} (te_1 - \tilde{\zeta})^{-1} (B(\Phi_1\Phi_2))(t)\, dt \quad \forall\, \tilde{\zeta} \in \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta},$$

где кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 23.

Таким образом, из теоремы 23 следует, что алгебра моногенных в $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$ функций разлагается в прямую сумму алгебры $\mathbb{C}$-аналитических в $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$ функций и алгебры моногенных в $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$ функций, принимающих значения в идеале I_0.

Повторяя схему доказательства теоремы Рунге [12, с. 124–126], получаем следующее утверждение.

Теорема 27. *Пусть область* D_ζ *ограничена, функция* $\Psi : \tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta} \to H_{\mathbb{C}}$ *является* $\mathbb{C}$*-аналитической в* $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$ *и* K_ζ *— произвольное компактное подмножество* $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_\zeta}$. *Тогда для любой точки* $x_0 e_1 \in D_\zeta$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется полином* $P(c)$, $c \in H_{\mathbb{C}}$, *с комплексными коэффициентами такой, что*

$$\sup_{\tilde{\zeta} \in K_\zeta} \|\Phi(\tilde{\zeta}) - P((\tilde{\zeta} - x_0 e_1)^{-1})\|_{H_{\mathbb{C}}} < \varepsilon.$$

Теорема 27 и соотношения (79) в случае ограниченной области D позволяют построить функции, линейные комбинации которых равномерно на каждом компактном подмножестве $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ приближают решения системы (1).

Не ограничивая общности, будем полагать, что $(0,0) \in D$. Пусть $\tilde{\zeta} = x e_1 + y e_0$. Тогда аналогично тому, как это сделано выше для функции ζ^{-1}, получаем

$$\tilde{\zeta}^{-1} = \begin{cases} -e_2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(e_1 + 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - y}{x} \right)^k e_{k+1} \right), & \text{если } y > 0; \\ e_2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(e_1 + 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} + y}{x} \right)^k e_{k+1} \right), & \text{если } y < 0; \end{cases}$$

$\mathbb{C}$-аналитической в $\tilde{\mu} \setminus \overline{D_{\tilde{\zeta}}}$ функции $\tilde{\zeta}^{-1}$ соответствует пара функций

$$M_1(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2}, \quad N_1(x,y) = x(x^2+y^2)^{-1/2},$$

построенных согласно формулам (79). Кроме того, обозначим

$$M_{n+1}(x,y) := \frac{\partial^n}{\partial x^n} M_1(x,y), \quad N_{n+1}(x,y) := \frac{\partial^n}{\partial x^n} N_1(x,y),$$
$$n = 1, 2, \ldots .$$

Теперь можно утверждать, что если область D ограничена, то на каждом компактном подмножестве $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ осесимметричный потенциал $\varphi(x,y)$ равномерно приближается линейными комбинациями функций $M_n(x,y)$ (разумеется, если при этом $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 9 [2]), а функция тока Стокса — линейными комбинациями функций $N_n(x,y)$ (если при этом $\psi(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 10 [2]).

В заключение сформулируем теорему о разложении моногенной функции $\Phi\colon E_{\tilde{\zeta}} \to H_{\mathbb{C}}$, являющуюся аналогом теорем 18, 21, 23.

Теорема 28. *Любая моногенная в области* $E_{\tilde{\zeta}}$ *функция* $\Phi\colon E_{\tilde{\zeta}} \to H_{\mathbb{C}}$ *представима в виде*

$$\Phi(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e_0 (t e_0 - i\tilde{\zeta})^{-1} (B\Phi)(t)\, dt + \Phi_0(\tilde{\zeta}) \quad \forall\, \tilde{\zeta} \in E_{\tilde{\zeta}}.$$

Здесь γ *— произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в* $\mathbb{C}$, *которая ограничивает правильную в направлении вещественной прямой область* E'_z *такую, что* $\overline{E'_z} \subset E_z$ *и* $f_{I_0}(\tilde{\zeta}) \in E'_z$, *а* $\Phi_0\colon E_{\tilde{\zeta}} \to I_0$ *— некоторая моногенная в области* $E_{\tilde{\zeta}}$ *функция со значениями в идеале* I_0. *При этом*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e_0 (t e_0 - i\tilde{\zeta})^{-1} (B\Phi)(t)\, dt = e_1 \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{(B\Phi)(t)}{\sqrt{-(t-z)(t+\bar{z})}}\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e_{k+1} \int_{\gamma} \frac{(B\Phi)(t)}{\sqrt{-(t-z)(t+\bar{z})}} \times$$
$$\times \left(\frac{\sqrt{-(t-z)(t+\bar{z})} - (y+it)}{x} \right)^k dt,$$
$$\tilde{\zeta} = x e_1 + y e_0 \in E_{\tilde{\zeta}}, \quad z = x + iy, \quad x \neq 0.$$

1. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1518–1529.
2. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Там же. – № 12. – С. 1695–1703.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
4. *Мельниченко И. П.* О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, №. 5. – С. 606–613.
5. *Мельниченко И. П.* Методы теории функций в задачах осесимметричного потенциала // Некоторые вопросы современной теории функций. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. – С. 96–101.
6. *Melničenko I. P.* Представление дифференцируемыми функциями потенциалов с осевой симметрией // Conf. on anal. funct. (Blazejewko, 19–27 Aug. 1982): Abstracts. – Lodz: Univ. Lodz, 1982. – P. 35.
7. *Мельниченко И. П.* Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 98–102.
8. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. – М.: Физматгиз, 1960. – 316 с.
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
10. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
11. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.
12. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 28.12.95