УДК 517. 956. 35

Т. П. Гой,
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

We study the problem for weakly nonlinear hyperbolic equations of order n, $n \geq 3$, with constant coefficients in the linear part of the operator with nonlocal two-point conditions in time and periodic conditions in space variables. Generally speaking, the investigation of the solvability of this problem requires studying the problem of small denominators, which were estimated from below by using the metric approach. For almost all (with respect to Lebesgue measure) coefficients of the equation and parameters of the domain, we establish conditions for the existence of a unique classical solution of the problem.

Досліджена задача з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовою змінною для слабконелінійних гіперболічних рівнянь порядку n, $n \geq 3$, із сталими коефіцієнтами у лінійній частині оператора. Розв'язність задачі, взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано метричний підхід. Для майже всіх (відносно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння та параметрів області встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку розглядуваної задачі.

Задачі з нелокальними умовами за часовою змінною, найпростішими з яких є умови періодичності, для гіперболічних рівнянь (як лінійних, так і нелінійних) почали досліджуватись порівняно недавно (див., наприклад, [1–19] і бібліографію в [2, 3]). Однією з причин цього були, очевидно, труднощі, пов'язані з малими знаменниками, що виникають при побудові розв'язків цих задач. Такі задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь вивчались, головним чином, для рівнянь і систем першого та другого порядків.

У даній роботі досліджена нелокальна крайова задача дла слабконелінійних гіперболічних рівнянь порядку $n, n \geq 3$. Значна увага тут звернена на розв'язання проблеми малих знаменників.

1. В області $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, T], x \in Q\}$, де Q — коло одиничного радіуса, розглянемо задачу

$$Lu = \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^{n-s} \partial x^s} = \varepsilon f(t, x, u(t, x)) + \Phi(t, x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}\right|_{t=T} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

в якій $n \geq 3$, $a_s \in \mathbb{R}$, $a_0 = 1$, $\varepsilon, \mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$; 1; оператор L строго гіперболічний за І. Г. Петровським; функція $f(t, x, u)$ визначена, неперервна за змінною t і досить гладка за x та u в області $D_1 = \{(t, x, u) : (t, x) \in D, u \in \overline{S}(u^0, r)\}$, де $\overline{S}(u^0, r) = \{u(t, x) \in C^n(D) : \|u - u_0\|_{C^n(D)} \leq r\}$, $u^0 = u^0(t, x)$ — розв'язок незбуреної задачі (1), (2) (коли $\varepsilon = 0$); функція $\Phi(t, x) \in C^{(0,3)}(D)$, де $C^{(0,q)}(D)$ — банахів простір функцій $v(t, x)$ з нормою

$$\|v(t, x)\|_{C^{(0,q)}(D)} = \sum_{j=0}^{q} \max_D \left|\frac{\partial^j v(t, x)}{\partial x^j}\right|.$$

Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t, x)$, $\Phi(t, x)$ і $f(t, x, u)$.

Розв'язок розглядуваної задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ikx). \tag{3}$$

Підставивши ряд (3) у рівняння (1) та умови (2), для визначення коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, одержуємо таку крайову задачу для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{n} a_s (ik)^s u_k^{(n-s)}(t) = \varepsilon f_k(t, \{u_m(t)\}) + \Phi_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

$$l_j[u_k(t)] \equiv u_k^{(j)}(0) - \mu u_k^{(j)}(T) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \; k \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де

$$f_k(t, \{u_m(t)\}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f\left(t, x, \sum_{|m| \ge 0} u_m(t) \exp(imx)\right) \exp(-ikx)\, dx, \tag{6}$$

$$\Phi_k(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \Phi(t, x) \exp(-ikx)\, dx. \tag{7}$$

Покажемо, що задача (1), (2) еквівалентна деякому нелінійному інтегральному рівнянню.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ розглянемо задачу з умовами (5) для лінійного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} a_s (ik)^s u_k^{(n-s)}(t) = \Phi_k(t). \tag{8}$$

Згідно з припущенням про гіперболічність оператора L, корені рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^{n-s} = 0,$$

які позначимо через λ_j, $j = 1, \ldots, n$, є дійсними та різними. Тому однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (8), має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \begin{cases} \exp(i\lambda_j kt), & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \\ & \qquad\qquad j = 1, \ldots, n, \\ t^{j-1}, & k = 0, \end{cases}$$

а характеристичний визначник $\Delta(k)$ задачі (5), (8) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \begin{cases} (ik)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \le p < q \le n} (\lambda_q - \lambda_p) \sum_{j=1}^{n} (1 - \mu \exp(i\lambda_j kT)), & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \\ (1-\mu)^n 1!\, 2! \ldots (n-1)!, & k = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Із формули (9) випливає, що визначник $\Delta(k)$ відмінний від нуля для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

1) $|\mu| \ne 1$; 2) $\lambda_j kT + \varphi \ne 2\pi q$, $j = 1, \ldots, n$, $q \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \arg \mu$.

Нехай $\Delta(k) \ne 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Тоді незбурена задача (1), (2) не може мати двох різних розв'язків (див. [3], розд. 5, §4), і для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існує єдина функція Гріна $G_k(t, \tau)$ задачі (5), (8), за допомогою якої її розв'язок зображується формулою

$$u_k^0(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

При цьому розв'язок $u^0(t,x)$ незбуреної задачі (1), (2) формально зображується рядом

$$u^0(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau \exp(ikx). \tag{11}$$

У квадраті $K_T = \{(t,\tau)\colon 0 \leq t, \tau \leq T\}$, за винятком сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$ визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = 2^{-1}(ik)^{1-n}\sum_{j=1}^{n} \exp(i\lambda_j k(t-\tau)) \prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n} (\lambda_j - \lambda_q)^{-1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{sgn}(t-\tau) + (1+\mu\exp(i\lambda_j kT))/(1-\mu\exp(i\lambda_j kT))\right), \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{12}$$

$$G_0(t,\tau) = (2(n-1)!)^{-1}\left\{\operatorname{sgn}(t-\tau)(t-\tau)^{n-1} + (1-\mu)^{-n}\left(\prod_{q=1}^{n-2} q!\right)^{-1} \times\right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{j} (-1)^{n-j} t^{p-1}\Delta_{jp}(\tau^{n-j} + \mu(\tau - T)^{n-j})/(n-j)!\right\}, \tag{13}$$

де Δ_{jp}, $p = 1, \ldots, j$, $j = 1, \ldots, n$, — алгебраїчне доповнення у визначнику $\det\left\| l_{j-1}[t^{p-1}]\right\|_{j,p=1}^{n}$ елемента, що стоїть на перетині j-го рядка і p-го стовпця. На стороні $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата K_T кожна з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, доозначується за неперервністю справа (зліва).

За допомогою системи функцій $\{G_k(t,\tau), k \in \mathbb{Z}\}$ задачу (4), (5) зводимо до еквівалентної їй нескінченної системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$u_k(t) = u_k^0(t) + \varepsilon\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau, \{u_m(\tau)\})\,d\tau, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

де функції $u_k^0(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, визначаються формулою (10).

Позначимо

$$K(t,x,\tau,\xi) = (2\pi)^{-1}\sum_{|k|\geq 0} G_k(t,\tau)\exp(ik(x-\xi)). \tag{15}$$

При умові, що ряд (15) рівномірно збігається в області $D \times D$, а функція $u^0(t, x)$, визначена формулою (11), належить простору $C^n(D)$, із формул (3), (6) та (14) одержуємо, що задача (1), (2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon\int_D K(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau d\xi. \tag{16}$$

2. Збіжність рядів (11) і (15) пов'язана, взагалі, з проблемою малих знаменників, бо модулі відмінних від нуля виразів $1 - \mu\exp(i\lambda_j kT)$, $j = 1, \ldots, n$, що входять знаменниками у формулі (12) для функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа цілих k.

Зауважимо, що при $|\mu| \neq 1$ малих знаменників немає; це випливає із справедливості таких оцінок:

$$|1-\mu\exp(i\lambda_j kT)| = |1-|\mu|(\cos(\lambda_j kT+\varphi)+i\sin(\lambda_j kT+\varphi))| =$$

$$= \sqrt{1+|\mu|^2 - 2|\mu|\cos(\lambda_j kT+\varphi)} \geq \big|1-|\mu|\big|, \quad j=1,\ldots,n. \tag{17}$$

Із формул (12), (13) та оцінок (17) одержуємо

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\int_0^T G_k(t,\tau)\,d\tau\right| \le$$

$$\le \begin{cases} 2T|k|^{1-n+q}\sum\limits_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(q)}\left|1-\mu\exp(i\lambda_j kT)\right|^{-1} + \delta_{nq}, & |\mu|=1; \\ T|k|^{1-n+q}(1+|\mu|)/|1-|\mu||\sum\limits_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(q)} + \delta_{nq}, & |\mu|\neq 1, \end{cases} \quad q=0,1,\ldots,n, \tag{18}$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\int_0^T G_0(t,\tau)\,d\tau\right| \le c_0 T^{-q}, \tag{19}$$

де $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\Lambda_j^{(q)} = |\lambda_j|^q\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{n}|\lambda_j-\lambda_m|^{-1}$, δ_{nq} — символ Кронекера; $q = 0, 1, \ldots, n$,

$$c_0 = T^{n-1}\left(1+|1+\mu|\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{j}M^{j-p}|1-\mu|^{p-j-1}(2(p-1)!)^{-1}\right),$$

$$M = \max\{1,|\mu|\}.$$

Якщо $|\mu|=1$, то ряди (11) і (15) є, взагалі, розбіжними, однак ми покажемо, що у цьому випадку для майже кожного (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа $\beta_j=\lambda_j T/(2\pi)$, $j=1,\ldots,n$, малі знаменники лише незначною мірою погіршують їх збіжність.

Лема. *Нехай* $|\mu|=1$. *Тоді для майже кожного (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) числа* $\beta=\lambda T/(2\pi)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, *ряд*

$$S = \sum_{|k|>0}|k|^{1-n}|1-\mu\exp(i\lambda kT)|^{-1} \tag{20}$$

збігається, якщо $n\geq 3$.

Доведення. Використовуючи нерівність $\sin x \ge 2x/\pi$, яка виконується для всіх $x\in[0,\pi/2]$, одержуємо, що для довільного дійсного λ справедлива оцінка

$$|1-\mu\exp(i\lambda kT)| = 2|\sin((\lambda kT+\varphi)/2)| =$$

$$= 2|\sin|(\lambda|k|T+\varphi\operatorname{sgn}k)/2)-d(k)\pi|| \ge |(\lambda|k|T+\varphi\operatorname{sgn}k)/(2\pi)-d(k)| =$$

$$= \lambda|k|T/(2\pi)\left|\frac{\lambda T|k|+\varphi\operatorname{sgn}k}{\lambda T|k|} - \frac{2\pi}{T\lambda}\frac{d(k)}{|k|}\right|, \tag{21}$$

де $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, а $d(k)$ — ціле число, для якого

$$|(\lambda|k|T+\varphi\operatorname{sgn}k)/(2\pi)-d(k)| \le 1\backslash 2. \tag{22}$$

Із (20), враховуючи оцінки (21), (22), маємо

$$S \le \sum_{|k|>0} |k|^{1-n}|\beta|k|+\varphi/(2\pi)\operatorname{sgn}k-d(k)|^{-1} = S_1+S_2, \tag{23}$$

де

$$S_j = \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-n}|\beta k-(-1)^j\varphi/(2\pi)-d_j(k)|^{-1}, \quad j=1;2, \tag{24}$$

а $d_j(k)$, $j=1, 2,$ — ціле число таке, що

$$|\beta k-(-1)^j\varphi\,/(2\pi)-d_j(k)| \le 1/2.$$

Для доведення збіжності рядів (24) скористаємось ідеєю доведення леми 2 з [20]. Розглянемо ряд S_1 і побудуємо ряди $S_1^{(p)}$ такого ж вигляду, як і S_1:

$$S_1^{(p)} = \sum_{k_q^{(p)}\in\Omega_p} \left(k_q^{(p)}\right)^{1-n}\left|\beta k_q^{(p)}+\varphi/(2\pi)-d_1\left(k_q^{(p)}\right)\right|^{-1}, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{25}$$

де $\Omega_p\subseteq\mathbb{N}$ — множина тих $k=k_q^{(p)}$, $q=1, 2, \ldots;$ $k_{q+1}^{(p)}>k_q^{(p)}$, для яких справджується нерівність

$$2^{-p-1} < \left|\beta k_q^{(p)}+\varphi/(2\pi)-d_1\left(k_q^{(p)}\right)\right| \le 2^{-p}, \quad p\in\mathbb{N}. \tag{26}$$

Очевидно, що $S_1=\sum_{p=1}^{\infty}S_1^{(p)}$, а тому для доведення збіжності ряду S_1 досить показати, що $\sum_{p=1}^{\infty}S_1^{(p)}<\infty$.

Із оцінок (26) знаходимо

$$\left|\beta\left(k_{q+1}^{(p)}-k_q^{(p)}\right)-\left(d_1\left(k_{q+1}^{(p)}\right)-d_1\left(k_q^{(p)}\right)\right)\right| < 2^{-p}, \quad p\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

Згідно з лемою 1 із [20], для майже кожного числа β існує стала $c_1=c_1(\beta)>$ >0 така, що нерівність

$$\left|\beta\left(k_{q+1}^{(p)}-k_q^{(p)}\right)-\left(d_1\left(k_{q+1}^{(p)}\right)-d_1\left(k_q^{(p)}\right)\right)\right| \ge c_1\left(k_{q+1}^{(p)}-k_q^{(p)}\right)^{-1-\delta}, \quad 0<\delta<1, \tag{28}$$

виконується для кожного $k_q^{(p)}\in\Omega_p$.

Із оцінок (27), (28) випливає, що для майже кожного числа β

$$M_p \equiv \min_{\Omega_p}\left(k_{q+1}^{(p)}-k_q^{(p)}\right) > (2^p c_1)^{1/(1+\delta)}, \quad p\in\mathbb{N}. \tag{29}$$

Очевидно, що для кожного $k_q^{(p)}\in\Omega_p$ справедлива оцінка

$$k_q^{(p)} \ge (q-1)M_p+k_1^{(p)}. \tag{30}$$

Із леми 2.4 з [3] (розд. 1) одержуємо, що для майже кожного (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа β існує стала $c_2=c_2(\beta)>0$, для якої нерівність

$$\left|\beta k_q^{(p)}+\varphi/(2\pi)-d_1\left(k_q^{(p)}\right)\right| \ge c_2\left(k_q^{(p)}\right)^{-1-\sigma}, \quad 0<\sigma<1, \tag{31}$$

справджується для всіх $k_q^{(p)}\in\Omega_p$ Тому з оцінок (26) і (31) маємо, що для майже всіх β

$$k_1^{(p)} \geq (2^p c_2)^{1/(1+\sigma)}, \quad k_1^{(p)} \in \Omega_p. \tag{32}$$

Не обмежуючи загальності, покладемо в (32) $\sigma = \delta$. Тоді з оцінок (29), (30) і (32) знаходимо

$$k_q^{(p)} > (q-1)(2^p c_1)^{1/(1+\delta)} + (2^p c_2)^{1/(1+\delta)} > 2^{p/(1+\delta)} C q, \tag{33}$$

де $k_q^{(p)} \in \Omega_p$, $C = (\min\{c_1 c_2\})^{1/(1+\delta)}$.

На підставі формули (25), враховуючи оцінки (26) і (33), одержуємо, що для майже кожного (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа β справедлива оцінка

$$S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} S_1^{(p)} < 2C^{1-n} \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p(2+\delta-n)/(1+\delta)} \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-n} =$$

$$= 2^{(3+2\delta-n)/(1+\delta)} C^{1-n} (1 - 2^{(2+\delta-n)/(1+\delta)})^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-n} < \infty.$$

Збіжність ряду S_2 доводиться аналогічно. Лему доведено.

Із оцінок (18) і леми випливає, що для довільного $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ і майже кожного (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа $\beta_j = \lambda_j T/(2\pi)$, $j = 1, \ldots, n$, при $n \geq 3$ ряд (15) рівномірно збігається в області $D \times D$.

Покажемо тепер, що $u^0(t, x) \in C^n(D)$. Позначимо

$$\gamma = c_0 (T^{-n} - 1)/(T^{-1} - 1), \quad \omega_q = \sum_{|k|>0} |k|^{-q}, \quad q = 2; 3,$$
$$D_p = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j^{(p)}, \quad p = 0, 1, \ldots, n. \tag{34}$$

Із формули (7) випливає

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\Phi_k(t)| \leq \tilde{\Phi} |k|^{-3}, \quad \tilde{\Phi} = \max_D \left| \partial^3 \Phi(t, x) / \partial x^3 \right|. \tag{35}$$

На підставі формули (11), враховуючи оцінки (18), (19) і (35), при $|\mu| = 1$ знаходимо

$$\| u^0(t, x) \|_{C^n(D)} \leq \sum_{|s| \leq n} \max_D \left| \frac{\partial^{|s|}}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}} \sum_{|k| \geq 0} \int_0^T G_k(t, \tau) \Phi_k(\tau) d\tau \exp(ikx) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{|k| \geq 0} \sum_{|s| \leq n} |k|^{s_2} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^{s_1}}{\partial t^{s_1}} \int_0^T G_k(t, \tau) \Phi_k(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \tilde{\Phi} \left(2T \sum_{|k|>0} \sum_{|s| \leq n} \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j^{(s_1)} |k|^{|s|-n-2} |1 - \mu \exp(i\lambda_j kT)|^{-1} + \omega_3 + c_0 \sum_{s_1=0}^{n-1} T^{-s_1} \right) \leq$$

$$\leq \tilde{\Phi} \left(2T \sum_{|s| \leq n} \sum_{|k|>0} \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j^{(s_1)} |k|^{-2} |1 - \mu \exp(i\lambda_j kT)|^{-1} + \omega_3 + \gamma \right). \tag{36}$$

Зауважимо, що, згідно з лемою, ряди

$$B_p = \sum_{|k|>0} \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j^{(p)} |k|^{-2} |1 - \mu \exp(i\lambda_j kT)|^{-1}, \quad p = 0, 1, \ldots, n, \tag{37}$$

є збіжними для майже кожного числа β_j, $j = 1, \ldots, n$.

Тому із (36), (37) одержуємо, що при $|\mu| = 1$ для майже кожного (відносно міри Лебега) числа β_j, $j = 1, \ldots, n$, вірна оцінка

$$\| u^0(t, x) \|_{C^n(D)} \leq \| \Phi(t, x) \|_{C^{(0,3)}(D)} \left(2T \sum_{p=0}^{n} (n+1-p) B_p + \omega_3 + \gamma \right) \equiv \rho_1 < \infty. \tag{38}$$

У випадку $|\mu| \neq 1$, шляхом аналогічних міркувань, приходимо до оцінки

$$\| u^0(t, x) \|_{C^n(D)} \leq \| \Phi(t, x) \|_{C^{(0,3)}(D)} \times$$
$$\times \left(T(1+|\mu|)/|1-\mu| \omega_2 \sum_{p=0}^{n} (n+1-p) D_p + \omega_3 + \gamma \right) \equiv \rho_2. \tag{39}$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\Phi(t, x) \in C^{(0,3)}(D)$. Тоді для майже кожного (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа $\lambda_j T/(2\pi)$, $j = 1, \ldots, n$, якщо $|\mu| = 1$, і для довільних $T > 0$ та a_s, $s = 0, 1, \ldots, n$, якщо $|\mu| \neq 1$, існує єдиний розв'язок $u^0(t, x) \in C^n(D)$ незбуреної задачі* (1), (2), *який зображується рядом* (11) *і неперервно залежить від функції $\Phi(t, x)$.*

3. Розглянемо питання про існування розв'язку інтегрального рівняння (16). Введемо такі позначення:

$$\Psi_1(y) = \tilde{f} \left(2T \left(B + \sum_{j=1}^{3} y^j H_{n-3+j} \right) + \omega_3 y^3 + \gamma \right),$$

$$\Psi_2(y) = \tilde{f} \left(\omega_2 T(1+|\mu|)/|1-|\mu|| \left(\sum_{p=0}^{n-3} (n-2-p) D_p + \sum_{j=1}^{3} y^j W_{n-3+j} \right) + \omega_3 y^3 + \gamma \right),$$

де

$$\tilde{f} = \max_{0 \leq |s| \leq 4} \max_{D_1} \left| \frac{\partial^{|s|} f(t, x, u)}{\partial x^{s_1} \partial u^{s_2}} \right|, \qquad B = \sum_{p=0}^{n-3} (n-2-p) B_p,$$

$$H_q = \sum_{p=0}^{q} B_p, \qquad W_q = \sum_{p=0}^{q} D_p, \quad q = n-2, n-1, n;$$

$$\varepsilon_1 = \min \left(\frac{r}{\Psi_1(1+r+\rho_1)}, \frac{1}{\Psi_1(2+r+\rho_1)} \right),$$

$$\varepsilon_2 = \min \left(\frac{r}{\Psi_2(1+r+\rho_2)}, \frac{1}{\Psi_2(2+r+\rho_2)} \right),$$

а числа γ, ω_q, D_p, B_p, ρ_1, ρ_2 визначені формулами (34), (37)–(39).

Теорема 2. *Нехай $\Phi(t, x) \in C^{(0,3)}(D)$, а функція $f(t, x, u)$ неперервна по t і має обмежені похідні за змінними x, u до четвертого порядку включно в області D_1. Тоді якщо $|\mu| = 1$, то для майже кожного (відносно міри Лебега* *в* $\mathbb{R}$*) числа* $\beta_j = \lambda_j T/(2\pi)$, $j = 1, \ldots, n$, *і для всіх* $\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_1$, *а якщо* $|\mu| \neq 1$, *то для довільних* $T > 0$ *та* a_s, $s = 0, 1, \ldots, n$, *і для всіх* $\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_2$, *існує єдиний розв'язок рівняння* (16), *який належить кулі* $\overline{S}(u^0, r) \subset C^n(D)$ *і неперервно залежить від функції* $\Phi(t, x)$.

Доведення. Скористаємось принципом стискуючих відображень. Розглянемо випадок $|\mu| = 1$. Запишемо рівняння (16) у вигляді

$$u(t, x) = A_{u^0}[u(t, x)],$$

де A_v — нелінійний інтегральний оператор

$$A_v[u(t, x)] \equiv v(t, x) + \varepsilon \int\limits_D K(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, u(\tau, \xi))\, d\tau d\xi, \tag{40}$$

визначений у кулі $\overline{S}(u^0, r)$.

Позначимо через V сукупність функцій $v(t, x) \in C^n(D)$, для яких

$$\| v(t, x) - u^0(t, x) \|_{C^n(D)} \leq \kappa = r - |\varepsilon| \Psi_1 (1 + r + \rho_1),$$

і покажемо, що для довільної функції $v(t, x)$ із V оператор A_v переводить кулю $\overline{S}(u^0, r)$ у себе.

Зауважимо, що якщо функція $u(t, x)$, яка зображується рядом вигляду (3), належить кулі $\overline{S}(u^0, r)$, то на підставі формули (6) одержуємо

$$\max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t, \{u_m(t)\})| \leq |k|^{-\alpha} \max_D |\partial^\alpha f(t, x, u(t, x)) / \partial x^\alpha|, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{41}$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції, знаходимо

$$\max_D |\partial^\alpha f(t, x, u(t, x)) / \partial x^\alpha| \leq \tilde{f} \left(1 + \|u(t, x)\|_{C^n(D)}\right)^\alpha \leq$$

$$\leq \tilde{f} \left(1 + \left\|u(t, x) - u^0(t, x)\right\|_{C^n(D)} + \left\|u^0(t, x)\right\|_{C^n(D)}\right)^\alpha \leq$$

$$\leq \tilde{f} (1 + r + \rho_1)^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{42}$$

На підставі формули (40), враховуючи (15) та оцінки (18), (19), (41), (42), одержуємо

$$\| A_v[u(t, x)] - u^0(t, x) \|_{C^n(D)} \leq \| v(t, x) - u^0(t, x) \|_{C^n(D)} +$$

$$+ |\varepsilon| (2\pi)^{-1} \left\| \int\limits_D \sum_{|k| \geq 0} G_k(t, \tau) f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) \exp(ik(x - \xi))\, d\tau d\xi \right\|_{C^n(D)} \leq \kappa +$$

$$+ |\varepsilon| (2\pi)^{-1} \sum_{|k| \geq 0} \sum_{|s| \leq n} \max_D \left| \frac{\partial^{|s|}}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}} \int\limits_0^T G_k(t, \tau) \int\limits_0^{2\pi} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) \exp(ik(x - \xi))\, d\tau d\xi \right| \leq$$

$$\leq \kappa + |\varepsilon| \left(\sum_{|k| > 0} \left(\max_{D_1} |f(t, x, u(t, x))| \sum_{|s| \leq n-3} |k|^{s_2} \times \right.\right.$$

$$\times \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^{s_1}}{\partial t^{s_1}} \int\limits_0^T G_k(t, \tau)\, d\tau \right| + \sum_{n-2 \leq |s| \leq n} |k|^{n - s_1 - 3} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^{s_1}}{\partial t^{s_1}} \int\limits_0^T G_k(t, \tau)\, d\tau \right| \times$$

$$\times \max_{D_1}\left|\frac{\partial^{|s|-n+3} f(t,x,u(t,x))}{\partial x^{|s|-n+3}}\right|\Bigg) + \max_{D_1}\left|f(t\,x,u(t,x))\right| \times$$

$$\times \sum_{s_1=0}^{n-1}\left|\frac{\partial^{s_1}}{\partial t^{s_1}}\int_0^T G_0(t,\tau)\,d\tau\right|\Bigg) \le$$

$$\le \kappa + |\varepsilon|\tilde{f}\Bigg(2T\sum_{|s|\le n-3}\sum_{|k|>0}\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(s_1)}|k|^{|s|-n+1}|1-\mu\exp(i\lambda_j kT)|^{-1} +$$

$$+ \sum_{n-2\le|s|\le n}(1+r+\rho_1)^{|s|-n+3}\Bigg(2T\sum_{|k|>0}\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(s_1)}|k|^{-2}|1-\mu\exp(i\lambda_j kT)|^{-1} +$$

$$+ \delta_{|s|,n}\omega_3\Bigg)+c_0\sum_{s_1=0}^{n-1}T^{-s_1}\Bigg) \le$$

$$\le \kappa + |\varepsilon|\tilde{f}\left(2T\left(B+\sum_{j=1}^{3}(1+r+\rho_1)^j H_{n-3+j}\right) + (1+r+\rho_1)^3\omega_3 + \gamma\right) =$$

$$= \kappa + |\varepsilon|\Psi_1(1+r+\rho_1) = r.$$

Покажемо тепер, що для довільної функції $v(t,x)\in V$ оператор A_v є оператором стиску. Нехай $u_1(t,x), u_2(t,x)\in \overline{S}(u^0,r)$. Позначимо

$$F(t,x) \equiv f(t,x,u_1(t,x)) - f(t,x,u_2(t,x)),$$

$$\tilde{u}(t,x) \equiv \theta u_1(t,x) + (1-\theta)u_2(t,x), \quad 0\le\theta\le 1.$$

Із формули (40), враховуючи лему, оцінки (18), (19), (42), формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо, що для майже кожного числа β_j, $j = 1,\ldots,n$, справджується оцінка

$$\|A_v[u_1(t,x)] - A_v[u_2(t,x)]\|_{C^n(D)} \le$$

$$\le |\varepsilon|(2\pi)^{-1}\left\|\int_D\sum_{|k|\ge 0}G_k(t,\tau)F(\tau,\xi)\exp(ik(x-\xi))\,d\tau d\xi\right\|_{C^n(D)} \le$$

$$\le |\varepsilon|\tilde{f}\|u_2(t,x)-u_1(t,x)\|_{C^n(D)}\times$$

$$\times\left(2TB+\gamma+\sum_{n-2\le|s|\le n}\sum_{j=0}^{|s|+3-n}C^j_{|s|+3-n}\left(1+r+\|\tilde{u}(t,x)\|_{C^n(D)}\right)^j\left(2TB_{s_1}+\delta_{|s|,n}\omega_3\right)\right) \le$$

$$\le |\varepsilon|\tilde{f}\|u_2(t,x)-u_1(t,x)\|_{C^n(D)}\times$$

$$\times\left(2T\left(B+\sum_{q=1}^{3}(2+r+\rho_1)^q H_{n-3+q}\right)+\gamma+\omega_3(2+r+\rho_1)^3\right) =$$

$$= |\varepsilon|\Psi_1(2+r+\rho_1)\|u_2(t,x)-u_1(t,x)\|_{C^n(D)}.$$

Отже, якщо $|\mu|=1$ і $|\varepsilon|\Psi_1(2+r+\rho_1)\le 1$, то оператор A_v є оператором стиску для майже кожного числа β_j, $j=1,\ldots,n$.

Неперервність оператора A_v за v очевидна. Тому, згідно з теоремами 1 і 3 із [21] (розд. 16, §1), рівняння (16), а отже, і задача (1), (2), має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від функції $\Phi(t, x)$.

У випадку $|\mu| \neq 1$ доведення теореми проводиться за тією ж схемою.

Теорему доведено.

Зауваження. **1.** Розв'язок задачі (1), (2) можна шукати як границю послідовності $\{u_s(t, x)\}$, де $u_0 = u^0(t, x)$, $u_{s+1} = A_{u^0}[u_s(t, x)]$, $s \in \mathbb{N}$; A_{u^0} — інтегральний оператор, визначений формулою (40).

2. Результати роботи узагальнюються на випадок $p, p \geq 2$, просторових змінних, коли область Q є p-вимірним тором.

1. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15–50.
2. *Vejvoda O., Harrmann L., Lovicar V. et al.* Partial differential equations: Time-periodic solutions // Alphen an den Rijn. – Sijthoff: Noordhoff, 1981. – 358 + XIII p.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.
5. *Третьякова Л. Г.* К задаче о 2π-периодических решениях уравнения колебаний нелинейной струны // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1986. – № 3. – С. 49–51.
6. *Sinestrari Eugenio, Webb G. F.* Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – **121**, № 2. – P. 449–464.
7. *Маринец В. В.* О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1393–1397.
8. *Плотников П. И., Юнгерман Л. Н.* Периодические решения слабонелинейного волнового уравнения с иррациональным отношением периода к длине интервала // Там же. – № 9. – С. 1599–1607.
9. *Byszewski L.* Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{ix} = F(x, t, u, u_x)$ // J. Appl. Math. and Stochast. Anal. – 1990. – **3**, № 3. – P. 163–168.
10. *Byszewski Ludwik, Lakshmikanthan V..* Monotone iterative techique for nonlocal hyperbolic differential problem // J. Math. and Phys. Sci. – 1992. – **26**, № 4. – P. 345–359.
11. *Жестков С. В.* О существовании ω-периодических решений квазилинейных волновых систем с n-пространственными переменными // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 2. – С. 5–11.
12. *Кміть І. Я.* Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1307–1313.
13. *Кмить И. Я.* Об одной задаче с нелокальными по времени условиями для систем гиперболического типа // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 21–25.
14. *Кигурадзе Т. И.* Об одной краевой задаче для гиперболических систем // Докл. РАН. Мат. – 1993. – **328**, № 2. – С. 135–138.
15. *Кигурадзе Т. И.* Об ограниченных и периодических в полосе решениях квазилинейных гиперболических систем // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 10. – С. 1760–1773.
16. *Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б.* О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 1657–1653.
17. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
18. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. V // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1115–1121.
19. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.
20. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.
21. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

Одержано 22.02.96