УДК 517.54

Г. П. Бахтина (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев),
А. К. Бахтин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

We study two extremal problems on the product of powers of conformal radii of symmetric nonoverlapping domains.

Вивчено дві екстремальні задачі про добуток степенів конформних радіусів симетричних неналягаючих областей.

Впервые экстремальные задачи для неналегающих областей возникли в работе [1], где была решена задача о произведении конформных радиусов пары неналегающих областей. В дальнейшем эта тематика интенсивно развивалась и обобщалась в работах многих авторов (см., например, [2 – 6]).

Целью данной работы является рассмотрение задачи о произведении степеней конформных радиусов в случае, когда неналегающие области имеют симметрию относительно единичной окружности. Эти задачи относятся к разряду задач со свободными полюсами на единичной окружности. Впервые задачи указанного типа были поставлены и изучены в работе Г. П. Бахтиной [7]. В дальнейшем такие задачи изучались в работах В. Н. Дубинина [6, 8] и Е. Г. Емельянова [9], где постановки задач обобщались и усиливались в разных направлениях. Особо следует отметить новый метод В. Н. Дубинина, основанный на кусочно-разделяющем преобразовании.

1. Пусть U_w — круг $|w|<1$ на комплексной w-плоскости C_w, $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ — произвольные попарно различные точки окружности $l=\partial U_w=$ $=\{|w|=1\}$, а P_n — объединение всех систем $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ неналегающих, односвязных, симметричных относительно l областей w-плоскости таких, что $a_k \in B_k$, $k=1,2,\ldots,n$, по всем возможным наборам $\{a_k\}_{k=1}^n$ попарно различных точек l. (Область B называется симметричной относительно окружности $|w|=1$, если для любой точки $w\in B$ точка $(\overline{w})^{-1}\in B$ ($\overline{w}$ — точка, комплексно сопряженная с точкой w).) Классу P_n сопоставим класс $\mathcal{F}_n$ всех наборов функций $F_n=\{f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)\}$ таких, что $w=f_k(z)$, $k=1,$ $2,\ldots,n$, мероморфны и однолистны в единичном круге U_z и отображают его соответственно на области B_k, $k=1,2,\ldots,n$, причем $f_k(0)=a_k\in l$, $f_k'(0)>0$.

Для $n=4$ на классе $\mathcal{F}_4$ рассмотрим функционал

$$I_\alpha(F_4) = |f_1'(0)|\,|f_2'(0)|^\alpha\,|f_3'(0)|\,|f_4'(0)|^\alpha, \tag{1}$$

где α — некоторое фиксированное число, $\alpha>0$, $F_4\in\mathcal{F}_4$.

Выполнена при частичной финансовой поддержке Международных научных фондов (гранты № UB 4200 ISF и 94-1474 INTAS) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

Подкласс $\mathcal{F}_n$, состоящий из систем $F_n = \{ f_k \}_{k=1}^{n}$, для которых $f_k(z)$ регулярны и однолистны при всех $k = 1, 2, \ldots, n$, обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}_n$.

Для $n = 2$ на классе $\tilde{\mathcal{F}}_2$ рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}_\alpha(F_2) = |f_1'(0)||f_2'(0)|^\alpha, \quad F_2 = \{ f_1, f_2 \} \in \tilde{\mathcal{F}}_2. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем α — фиксированное положительное число.

В работе решаются следующие задачи.

Задача 1. На классе $\mathcal{F}_4$ найти максимум функционала (1) и определить все экстремальные системы.

Задача 2. На классе $\tilde{\mathcal{F}}_2$ найти максимум функционала (2) и определить все экстремальные системы.

Существование экстремальных систем устанавливается стандартным образом.

В дальнейшем нам понадобятся сведения из теории квадратичных дифференциалов, которые можно найти в монографии [5]. Критическим множеством квадратичного дифференциала $Q(w)\,dw^2$ будем называть замыкание объединения всех траекторий $Q(w)\,dw^2$, имеющих предельную концевую точку в некоторой конечной критической точке $Q(w)\,dw^2$.

Рассмотрим следующие квадратичные дифференциалы:

$$Q_1(w)\,dw^2 = \frac{(\alpha-1)w^4 - 2(\alpha+1)w^2 + (\alpha-1)}{(w^4-1)^2}\,dw^2, \tag{3}$$

$$Q_2(w)\,dw^2 = \frac{(\alpha-1)w^2 - 2(\alpha+1)w + (\alpha-1)}{w(w^2-1)^2}\,dw^2. \tag{4}$$

Пусть T_A обозначает критическое множество для дифференциала (3), а T_B — для дифференциала (4). Тогда дифференциал (3) единственным образом определяет четверку неналегающих, односвязных областей $\{ D_k^0 \}_{k=1}^4$:

$$\bigcup_{k=1}^{4} D_k^0 = C_W \setminus T_A, \tag{5}$$

$$a_k = \exp\left\{ \frac{\pi}{2}(k-1)i \right\} \in D_k^0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (i)^2 = -1.$$

Набору областей $\{ D_k^0 \}_{k=1}^4 \in P_4$ соответствует единственная система $F_4^0 = \{ f_k^0 \}_{k=1}^4 \in \tilde{\mathcal{F}}_4$. Рассмотрим системы вида $F_4^0(\varepsilon) = \{ \varepsilon f_k(\varepsilon^{-1}z) \}_{k=1}^4 \in \tilde{\mathcal{F}}_4$ для всех $\varepsilon \in l$.

В свою очередь, дифференциал (4) определяет единственную пару B_1^0 и B_2^0 неналегающих областей из класса P_2 таких, что

$$B_1^0 \cup B_2^0 = C_W \setminus T_B, \tag{6}$$

$$a_k = \exp\{ \pi(k-1)i \} \in B_k^0, \quad k = 1, 2, \quad (i)^2 = -1.$$

Пара областей $\{ B_k^0 \}_{k=1}^2$ единственным образом определяет систему $F_2^0 = \{ \varphi_1^0, \varphi_2^0 \} \in \tilde{\mathcal{F}}_2$. Для произвольного $\varepsilon \in l$ рассмотрим систему вида $F_2^0(\varepsilon) = \{ \varepsilon \varphi_k^0(\varepsilon^{-1}z) \}_{k=1}^2 \in \tilde{\mathcal{F}}_2$.

В данной работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *В задаче* 1 *экстремальны системы* $F_4^0(\varepsilon)$, $\forall\ \varepsilon,\ \varepsilon \in l$, *и*
ко они.

Теорема 2. *В задаче* 2 *экстремальны системы* $F_2^0(\varepsilon)$, $\forall\ \varepsilon,\ \varepsilon \in l$, *и*
ко они.

Таким образом, экстремальные системы полностью описываются в терм
квадратичных дифференциалов (3), (4) и соотношений (5), (6).

2. ***Доказательство теоремы* 2.** В работах [7, 10] показано, что сис
областей $\{B_1, B_2\}$, соответствующая произвольной экстремальной паре
$=\{f_1(z), f_2(z)\} \in \tilde{\mathcal{F}}_2$, является допустимым семейством областей относит
но квадратичного дифференциала

$$Q(w)\,dw^2 = -2\left[\frac{a_1}{w(a_1-w)^2} + \frac{\alpha a_2}{w(a_2-w)^2}\right]dw^2,$$

где $a_k = f_k(0) \in l$, $B_k = f_k(U_z)$, $k = 1, 2$, $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 = \overline{C}_w$.

Экстремальную систему $F_2 = \{f_1, f_2\}$ можно нормировать следующи
разом:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = e^{2\theta i}, \quad \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Подставляя соотношения (8) в равенство (7) и производя необходимые вы
ления, получаем выражение

$$Q(w)\,dw^2 = -2e^{2\theta i}\frac{(e^{-2\theta i}+\alpha)w^2 - 2(\alpha+1)w + (e^{2\theta i}+\alpha)}{w(w-1)^2(w-e^{2\theta i})^2}dw^2.$$

Пару областей $\{B_1, B_2\}$, соответствующую экстремальной системе
$=\{f_1, f_2\}$, также будем называть экстремальной. Произведем круговую
метризацию (см. [5, 11, 12]) области B_1 относительно начала координат
ложительной вещественной полуоси, а области B_2 — относительно начал
ординат и отрицательной полуоси. В результате получим пару односвяз
неналегающих областей $\left\{B_1^*, B_2^*\right\} \in P_2$, $1 \in B_1^*$, $-1 \in B_2^*$, имеющих свой
$r(B_1, 1) \le r(B_1^*, 1)$, $r(B_2, e^{2i\theta}) \le r(B_2^*, -1)$, где $r(B, a)$ — внутренний ра
области B относительно точки $a \in B$ [12]. В случае односвязных обла
внутренний радиус совпадает с конформным. Из экстремальности пары
$B_2\}$ следует, что $r(B_1^*, 1) = r(B_1, 1)$ и $r(B_2^*, -1) = r(B_2, e^{2i\theta})$. В сил
зультатов Дженкинса [11] имеем $B_1^* = B_1$, $B_2^* = B_2$, $e^{2i\theta} = -1$. С учетом
ледних фактов получаем, что экстремальная система, нормированная усло
ми (8), является допустимым семейством для квадратичного дифференц
получаемого из (9):

$$Q(w)\,dw^2 = 2\frac{(\alpha-1)w^2 - 2(\alpha+1)w + (\alpha-1)}{w(w^2-1)^2}dw^2.$$

Квадратичный дифференциал (10) полностью определяет экстремальную
областей $\{B_1, B_2\} = \left\{B_1^0, B_2^0\right\}$ и, следовательно, пару $F_2^0 = \left\{\varphi_1^0, \varphi_2^0\right\} \in$
Все другие экстремальные системы совпадают с $F_2^0(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in l$.

3. ***Доказательство теоремы* 1.** Использовав методы работ [7, 10], п
чим характеристику произвольной экстремальной в задаче 1 системы в те

нах теории квадратичных дифференциалов. Для этого используем вариационную формулу Дюрена – Шиффера [13]

$$w^* = w + \frac{A\rho^2}{w - w_0} - \frac{\overline{A}\rho^2 w^3}{1 - w\overline{w}_0} + O(\rho^3), \tag{11}$$

где $A = A(\rho)$ — параметр граничной вариации [14], $\rho > 0$ — малый параметр, величина $\rho^{-3}|O(\rho^3)|$ равномерно ограничена на любом компакте комплексной плоскости, не содержащем точек w_0 и $1/\overline{w}_0$.

С помощью формулы (11) произвольная экстремальная система $F_4 = \{f_k\}_1^4 \in \mathcal{F}_4$ преобразуется в „близкую" систему $F_4^* = \{f_k^*\}_1^4$, где

$$f_k^*(z) = f_k(z) + \frac{A\rho^2}{f_k(z) - w_0} - \frac{\overline{A}\rho^2 f_k^3(z)}{1 - f_k(z)\overline{w}_0} + O(\rho^3),$$

$$w_0 \in \bigcup_{k=1}^{4} \partial B_k, \quad w_0 \neq \infty, \quad B_k = f_k(U_z), \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{12}$$

Из соотношения (12) получаем

$$f_k^{*\prime}(z) = f_k'(z)\left\{1 - \frac{A\rho^2}{(f_k(z) - w_0)^2} - \frac{\overline{A}\rho^2\left(3f_k^2(z) - 2f_k^3(z)\overline{w}_0\right)}{(1 - f_k(z)\overline{w}_0)^2} + O(\rho^3)\right\}.$$

Отсюда следует равенство

$$\left|f_k^{*\prime}(0)\right| = |f_k'(0)|\left|1 - \left[\frac{A\rho^2}{(a_k - w_0)^2} + \frac{\overline{A}\rho^2\left(3a_k^2 - 2a_k^3(z)\overline{w}_0\right)}{(1 - a_k\overline{w}_0)^2}\right] + O(\rho^3)\right|, \tag{13}$$

где $a_k = f_k(0)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Из равенства (13) с помощью тождества

$$|1 - \rho^2 C + O(\rho^3)| = 1 - \operatorname{Re}\rho^2 C + O(\rho^3)$$

получаем соотношение для значений функционала I_α на системах F_4 и F_4^* следующего вида:

$$I_\alpha(F_4^*) =$$

$$= I_\alpha(F_4)\left\{1 - \rho^2 \operatorname{Re} A \sum_{k=1}^{4} \alpha_k\left[\frac{1}{(a_k - w_0)^2} - \frac{3\overline{a}_k^2 - 2\overline{a}_k^3 w_0}{(1 - \overline{a}_k w_0)^2}\right] + O(\rho^3)\right\}, \tag{14}$$

где $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha$.

Из экстремальности системы F_4 следует неравенство $I_\alpha(F_4^*) \le I_\alpha(F_4)$, которое вместе с равенством (14) приводит к выражению

$$\operatorname{Re} A \sum_{k=1}^{4} \alpha_k\left[\frac{1}{(a_k - w_0)^2} + \overline{a}_k^2 \frac{3 - 2\overline{a}_k w_0}{(1 - \overline{a}_k w_0)^2}\right] + O(\rho) \ge 0. \tag{15}$$

В силу того, что $|a_k| = 1$, соотношение (15) можно привести к виду

$$\operatorname{Re} A(\rho) 2 \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \frac{2 - a_k w_0}{(a_k - w_0)^2} + O(\rho) \ge 0. \tag{16}$$

Из леммы Шиффера [14] получаем, что система неналегающих областей $\{B_k\}_1^4$, $B_k = f_k(U_z)$, $k = 1, 2, 3, 4$, определяемых экстремальной системой, является допустимым семейством для квадратичного дифференциала

$$Q(w)\,dw^2 = -2\left[\frac{2-\overline{a}_1 w}{(a_1-w)^2} + \alpha\frac{2-\overline{a}_2 w}{(a_2-w)^2} + \frac{2-\overline{a}_3 w}{(a_3-w)^2} + \alpha\frac{2-\overline{a}_4 w}{(a_4-w)^2}\right]dw^2, \quad (17)$$

где $a_k = f_k(0) \in B_k = f_k(U_z)$, $a_k \in l$, $k = 1, 2, 3, 4$, $\bigcup_{k=1}^4 \overline{B}_k = \overline{C}_w$.

Замечание. Вообще говоря, система F_4^* не принадлежит классу $\mathcal{F}_4$, потому что $f_k^{*\prime}(0)$ могут не быть положительными числами. Но это не является существенным, поскольку легко подобрать числа σ_k, $|\sigma_k| = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$, так, чтобы $\tilde{F}_4^* = \left\{ f_4^*(\sigma_k z) \right\}_1^4 \in \mathcal{F}_4$. Тогда для производных получим равенство

$$(f_k(\sigma_k z))_z' =$$

$$= \sigma_k f_k'(\sigma_k z)\left\{1 - \left[\frac{A\rho^2}{(f_k(\sigma_k z) - w_0)^2} + \frac{\overline{A}\rho^2\left(3f_k^2(\sigma_k z) - 2f_k^3(\sigma_k z)\overline{w}_0\right)}{(1 - f_k(\sigma_k z)\overline{w}_0)^2}\right] + O(\rho^3)\right\}.$$

Отсюда видно, что формула (13) останется прежней, а потому и квадратичный дифференциал (17) не изменится.

Произведем дополнительную вариацию круга U_w с помощью функции

$$w^* = \frac{w - \varepsilon}{1 - \overline{\varepsilon} w}, \quad (18)$$

где ε — произвольный комплексный параметр.

Из равенства (18) получим разложение

$$w^* = w - \varepsilon + \overline{\varepsilon} w^2 + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

где величина $\dfrac{1}{\varepsilon^2} O(\varepsilon^2)$ равномерно ограничена на любом компакте $K \subset C_w$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда из формулы (19) следует, что система $F_4^* = \left\{ f_k^*(z) \right\}_1^4 \in \mathcal{F}_4$, где $f_k^*(z) = f_k(\sigma_k z) - \varepsilon + \overline{\varepsilon} f_k^2(\sigma_k z) + O(\varepsilon^2)$, система $F_4 = \{ f_k(z) \}_1^4 \in \mathcal{F}_4$ — экстремальная в задаче 1, а σ_k, $|\sigma_k| = 1$, — комплексные числа, подобранные так, что $f_k^{*\prime}(0) > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$. Отсюда легко находим

$$f_k^{*\prime}(0) = f_k'(0)\sigma_k + 2\overline{\varepsilon} f_k(0) f_k'(0)\sigma_k + O(\varepsilon^2), \qquad k = 1, 2, 3, 4. \quad (20)$$

Тогда из соотношения (20) получаем равенство

$$\left| f_k^{*\prime}(0) \right| = |f_k'(0)| \{ 1 + 2\mathrm{Re}\, \overline{\varepsilon} a_k + O(\varepsilon^2) \}, \quad (21)$$

$$a_k = f_k(0), \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

С помощью формулы (21) вычисляем значение функционала (1) для системы $F_4^* = \left\{ f_k^*(z) \right\}_1^4 \in \mathcal{F}_4$:

$$I_\alpha(F_4^*) = I_\alpha(F_4)\{1 + 2\mathrm{Re}\,\overline{\varepsilon}[a_1 + a_3 + \alpha(a_2 + a_4)] + O(\rho^3)\}. \quad (22)$$

Из равенства (22) и экстремальности системы $F_4 = \left\{ f_k \right\}_1^4 \in \mathcal{F}_4$ следует

$$a_1 + a_3 + \alpha(a_2 + a_4) = 0 \quad (23)$$

$$a_k = f_k(0), \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Соотношение (23) и условия $a_k = f_k(0) \in l$, $k = 1, 2, 3, 4$, дают возможность нормировать экстремальную систему следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 = -a_3 = 1, \\ a_2 = -a_4 = e^{i\varphi}, \\ \varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \tag{24}$$

С учетом условий нормировки (24) квадратичный дифференциал (17) принимает вид

$$Q(w)\,dw^2 = -8e^{2\varphi i}\frac{(\alpha + e^{-2\varphi i})w^4 - 2(\alpha+1)w^2 + (\alpha + e^{2\varphi i})}{(w^2-1)^2(w^2 - e^{2\varphi i})^2}dw^2. \tag{25}$$

Структура дифференциала (25) позволяет заключить, что

$$Q(-w)(d(-w))^2 = Q(w)\,dw^2. \tag{26}$$

Свойство (26) означает, что структура траекторий квадратичного дифференциала (25) имеет центральную симметрию относительно начала координат. Это свойство позволяет свести задачу 1 к решению задачи 2. Для этого в квадратичном дифференциале (25) произведем замену переменной по формуле $t = w^2$ и получим следующее равенство:

$$Q(t)\,dt^2 = -2e^{2\varphi i}\frac{At^2 - Bt + \overline{A}}{t(t-1)^2(t - e^{2\varphi i})^2}dt^2, \tag{27}$$

где $A = (\alpha + e^{-2\varphi i})$, $B = 2(1+\alpha)$.

Квадратичный дифференциал (27) в точности соответствует квадратичному дифференциалу (9). Функция $t = w^2$ отображет w-плоскость на двулистную накрывающую комплексной t-плоскости. При этом отображении центрально-симметричные круговые области квадратичного дифференциала (25) преобразуются в области на двулистной накрывающей, которые проектируются в круговые области квадратичного дифференциала (27). Учитывая тот факт, что экстремальной системой областей в задаче 1 (с учетом нормировки (24)) может быть только система круговых областей квадратичного дифференциала (25), приходим к выводу, что экстремальной системе областей в задаче 1 соответствует (при отображении $t = w^2$) экстремальная система областей в задаче 2, и наоборот, экстремальной системе задачи 2 соответствует экстремальная система задачи 1. Ввиду того, что все экстремальные системы задачи 2 описаны полностью, получаем, что квадратичный дифференциал (25) принимает вид

$$Q(w)\,dw^2 = 8\frac{(\alpha-1)w^4 - 2(\alpha+1)w^2 + (\alpha-1)}{(w^4-1)^2}dw^2,$$

а экстремальными системами будут системы $F_4^0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in l$, и только они. Теорема 1 доказана.

Замечание. Используя свойство (26), отражающее центральную симметрию траекторий квадратичного дифференциала (25), можно доказать теорему 1, не используя решение задачи 2. Для этого необходимо произвести круговую симметризацию экстремальной системы следующим образом: область B_1 симметризовать относительно начала координат и положительной полуоси, область B_3 — относительно начала и отрицательной полуоси, область B_2 — относительно начала и верхней половины оси ординат, B_4 — относительно начала и нижней половины оси ординат. Симметризованная система принадлежит рассматриваемому классу и экстремальна в нем. Теорема единственности Дженкинса [11] приводит к доказательству теоремы 1.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
4. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.
5. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
6. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с.
7. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1974. – 12 с.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
9. *Емельянов Е. Г.* О связи двух задач об экстремальном разбиении // Там же. – 1987. – **160**. – С. 91–98.
10. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21–27.
11. *Jenkins J. A.* Some uniqueness results in the theory of symmetrization // Ann. math. – 1955. – **61**, № 1. – P. 106–115.
12. *Hayman W. K.* Multivalent functions. – Cambridge: Cambridge Univ. press., 1994. – 263 p.
13. *Duren P. L., Schiffer M.* A variational method for functions schlicht in an annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – **9**. – P. 260–272.
14. *Schiffer M.* A method of variation within the family of simple functions // Proc. London Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 432–449.

Получено 28.12.95