УДК 517.5

О. В. Давыдов, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

ТЕОРЕМА ОБ УЖАХ ДЛЯ СЛАБЫХ ДЕКАРТОВЫХ СИСТЕМ

It is shown that Karlin's theorem about grass snakes remains true for polynomials in any weak Descartes system of continuous functions on a compact set without any change in the statement, and the existence part is valid for arbitrary weak Chebyshev systems.

Встановлено, що теорема Карліна про вужі справедлива без зміни формулювання для многочленів за будь-якою слабкою декартовою системою неперервних функцій на компакті, а у частині існування — для довільних слабких чебишовських систем.

1. Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — некоторый компакт на действительной прямой, $C(K)$ — пространство непрерывных действительных функций f на K с нормой $\|f\| = \max\{|f(t)|: t \in K\}$. Конечномерное подпространство $U \subset C(K)$ размерности n (предполагаем, что $n < \operatorname{card} K$) называется чебышевским пространством (T-пространством), если любой ненулевой элемент $u \in U$ имеет не более $n-1$ нулей в точках из K, и слабым чебышевским пространством (WT-пространством), если любой элемент $u \in U$ имеет не более $n-1$ перемен знака на K (т. е. не существует $n+1$ точек $t_i \in K$, $i = 1, \dots, n+1$, таких, что $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ и $(-1)^i u(t_i) > 0$, $i = 1, \dots, n+1$). Любой базис $u_1, \dots, u_n$ T-пространства (WT-пространства) U называется T-системой (WT-системой).

Систему функций $u_1, \dots, u_n$ из $C(K)$ будем называть слабой декартовой (WD-системой), если выполняется следующее (слабое) правило Декарта: число перемен знака на K любой функции $u = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, не превышает числа перемен знака в последовательности коэффициентов $c_1, \dots, c_n$ (нулевые члены последовательности не учитываются). Если у пространства $U \subset C(K)$ существует базис, являющийся WD-системой, то говорят, что U есть WD-пространство. Нетрудно понять, что любое WD-пространство является WT-пространством.

Примером WD-пространства на отрезке $[a, b]$ является пространство $S_m^k(\Delta_N)$ сплайнов порядка m с узлами в точках разбиения Δ_N: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ и дефектами $k = (k_1, \dots, k_{N-1})$ (см. [1], теорема 4.76).

Будем говорить, что подпространство $U \subset C(K)$ разделяет пару функций (φ, ψ), если существует $u \in U$ такая, что $\varphi(t) < u(t) < \psi(t)$ для всех $t \in K$.

Пусть U — конечномерное подпространство в $C(K)$, $\dim U = n$, $\varphi, \psi \in C(K)$, $\varphi(t) < \psi(t)$, $t \in K$. Следуя [2, с. 492], функцию $u \in U$ будем называть верхним (нижним) (φ, ψ)-ужем, если $\varphi(t) \le u(t) \le \psi(t)$ для всех $t \in K$ и существует по крайней мере одна система точек $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, в которых $u(t_i) = \psi(t_i)$ для i нечетных и $u(t_i) = \varphi(t_i)$ для i четных (соответственно $u(t_i) = \varphi(t_i)$ для i нечетных и $u(t_i) = \psi(t_i)$ для i четных).

С. Карлин [3] доказал, что если T-пространство $U \subset C[a, b]$ разделяет пару функций (φ, ψ), где $\varphi, \psi \in C[a, b]$, то в U найдутся единственные верхний и нижний (φ, ψ)-ужи. Позднее В. К. Дзядык и его ученики изучали ужи с меньшим, чем $n = \dim U$, числом „точек касания" [4, с. 85–97], а А. А. Женсыкбаев [5] доказал теорему об ужах для моносплайнов.

В настоящей работе показано, что теорема Карлина об ужах справедлива без изменения формулировки для WD-пространств, а в части существования — для любых WT-пространств на произвольном компакте K. Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}$ *— компакт,* $U \subset C(K)$ *— WT-пространство. Если* U *разделяет пару функций* (φ, ψ), $\varphi, \psi \in C(K)$, *то в* U *существуют по крайней мере два различных* (φ, ψ)*-ужа, один из которых верхний, а другой — нижний.*

Теорема 2. *Если в условиях предыдущей теоремы* U *является* WD*-пространством, то верхний и нижний* (φ, ψ)*-ужи единственны.*

Отметим, что теорема 1 в качестве гипотезы приведена в ([6], предположение 22.11).

Приведем пример WT-пространства U, в котором существует бесконечное множество (φ, ψ)-ужей для некоторой пары (φ, ψ), разделяемой этим пространством.

Пусть $K = [-1, 1]$, U — двумерное пространство, порожденное функциями

$$u_1(t) = \begin{cases} 1/2 - |t|, & t \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & t \in [-1, 1] \setminus [-1/2, 1/2], \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} t + 1/2, & t \in [-1, -1/2), \\ 0, & t \in [-1/2, 1/2], \\ t - 1/2, & t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что U есть WT-пространство. Однако для $\varphi(t) \equiv -1$, $\psi(t) \equiv$ $\equiv 1$ существует бесконечно много как верхних, так и нижних (φ, ψ)-ужей. Например, верхним (φ, ψ)-ужем является любая функция вида $u = \alpha u_1 - 2u_2$, где $\alpha \in [-2, 2]$.

2. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется два вспомогательных утверждения, первое из которых является уточнением теоремы Б. Штокенберга [7].

Лемма 1. *Пусть* $U \subset C(K)$ *—* WT*-пространство размерности* n. *Положим* $A = \{t \in K : \exists\, u \in U \;\; u(t) \neq 0\}$, $\alpha = \inf A$. *Существует подпространство* $U' \subset U$ *размерности* $n-1$ *и элемент* $u' \in U \setminus U'$ *такие, что:*

а) U' *есть* WT*-пространство;*

б) найдется $\varepsilon > 0$ *такое, что* $u'(t) > 0$ *для всех* $t \in (\alpha, \alpha + \varepsilon) \cap A$;

в) для каждого $u \in U'$ $\lim\limits_{t \to \alpha,\, t \in A} u(t)/u'(t) = 0.$

Доказательство. Возьмем любую последовательность точек $t_k \in A$ такую, что $t_k \to \alpha$ при $k \to \infty$, и рассмотрим последовательность подпространств $U_k = \{u \in U : u(t_k) = 0\}$. Зафиксируем произвольный базис $v_1, \ldots, v_n$ пространства U. Если U отождествить с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ по правилу

$$u = \sum_{i=1}^{n} c^i v_i \to c = (c^1, \ldots, c^n) \in \mathbb{R}^n,$$

то U_k будет соответствовать гиперплоскость

$$\Gamma_k = \{c \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} c^i v_i(t_k) = 0\}.$$

Пусть $a_k = \left(a_k^1, \ldots, a_k^n\right)$ — единичный вектор нормали к Γ_k, так что $a_k^i =$ $= \lambda_k v_i(t_k)$, где

$$\lambda_k = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(v_i(t_k)\right)^2\right)^{-1/2}, \; k = 1, 2, \ldots .$$

В пространстве U этому вектору соответствует элемент $u_k = \sum_{i=1}^{n} a_k^i v_i$. В силу компактности единичного шара в конечномерном пространстве и эквивалентности любых норм на нем можно считать, что последовательность $\{u_k\}$ сходится по норме пространства $C(K)$ к некоторой функции $u' \in U$, а значит,

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u' \| = 0, \tag{1}$$

причем

$$u' = \sum_{i=1}^{n} a^i v_i, \quad a^i = \lim_{k\to\infty} a_k^i . \tag{2}$$

Гиперплоскость, ортогональную к вектору $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ и проходящую через начало координат, обозначим через Γ', а соответствующее ей подпространство в U — через U'. Таким образом,

$$\Gamma' = \left\{ c \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} c^i a^i = 0 \right\},$$

$$U' = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} c^i v_i : c = (c^1, \ldots, c^n) \in \Gamma' \right\}. \tag{3}$$

Убедимся, что U' и u' (или $-u'$) имеют свойства, сформулированные в лемме.

Прежде всего ясно, что $\boldsymbol{a} \neq 0$, поэтому $\dim U' = \dim \Gamma' = n - 1$.

а) Если U' не является WT-пространством, то найдутся элемент $f \in U'$ и точки $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $x_1 < \ldots < x_n$ и

$$(-1)^i f(x_i) > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Пусть

$$f = \sum_{i=1}^{n} d^i v_i. \tag{5}$$

Обозначим через $\boldsymbol{d}_k = \left(d_k^1, \ldots, d_k^n\right)$ проекцию вектора $\boldsymbol{d} = (d^1, \ldots, d^n)$ на гиперплоскость Γ_k и положим

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} d_k^i v_i. \tag{6}$$

Таким образом,

$$d_k^i = d^i - a_k^i \sum_{j=1}^{n} d^j a_k^j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

и, так как $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{a}$, в силу (2) имеем

$$d^i = \lim_{k\to\infty} d_k^i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty} \| f - f_k \| = 0. \tag{9}$$

В силу (4) $x_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $x_1 \geq \alpha$. Если $x_1 = \alpha$, то ввиду непрерывности функции f для достаточно больших k получаем $f(t_k) \leq f(x_1)/2 <$

< 0. Тогда из (9) вытекает, что для некоторого k выполняется условие $f_k(t_k) < 0$. Но это невозможно, так как $f_k \in U_k$. Следовательно, $x_1 > \alpha$.

Отсюда для достаточно больших k имеем $t_k < x_1$. Увеличивая, если потребуется, k, в силу (4) и (9) можем считать, что $(-1)^i f_k(x_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Имеем $f_k(t_k) = 0$ и, так как $t_k \in A$, найдется функция $u \in U$ такая, что $u(t_k) > 0$. Нетрудно понять, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $\varepsilon u + f_k \in U$ имеет n перемен знака в точках $t_k, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это противоречит предположению, что U — WT-пространство. Тем самым утверждение п. а) доказано.

б) Пусть найдется последовательность $\{t'_k\} \subset A$ такая, что $t'_k > t'_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $t'_k \to \alpha$ при $k \to \infty$ и $u'(t'_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Согласно ([1], теорема 2.45) никакой элемент из U не может иметь больше чем n разделенных нулей в точках множества A. Поэтому из принятого предположения вытекает, что среди интервалов (t'_{k+1}, t'_k), $k = 1, 2, \ldots$, найдется лишь конечное число таких, на которых $u'(t)$ не является тождественным нулем. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что $u'(t) = 0$ для всех $t \in (\alpha, \alpha + \delta)$. Но тогда для достаточно больших k имеем $u'(t_k) = 0$, так что $u' \in U_k$, т. е. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}_k$. Отсюда в силу (2) при $k \to \infty$ $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}$, а значит, $\boldsymbol{a} = 0$, что не верно.

Таким образом, в некоторой окрестности $(\alpha, \alpha + \varepsilon') \cap A$ функция u' не обращается в нуль. Но тогда найдется и такая окрестность $(\alpha, \alpha + \varepsilon) \cap A$, в которой u' знакопостоянна, так как в противном случае она имела бы бесконечное число перемен знака. Умножая u', если потребуется, на -1, добьемся, чтобы она была положительна на $(\alpha, \alpha + \varepsilon) \cap A$.

в) Если утверждение этого пункта не верно, то для некоторой $f \in U'$, некоторого $\gamma > 0$ и некоторой последовательности $\{t'_k\} \subset A$, $t'_k \to \alpha$ при $k \to \infty$, будем иметь

$$f(t'_k) > \gamma u'(t'_k), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

С другой стороны, можно считать, что для достаточно больших k

$$f(t_k) < \gamma u'(t_k). \tag{11}$$

Повторив рассуждения п. а), представим f в виде (5) и найдем функции f_k по формулам (6) и (7). Тогда снова справедливы (8) и (9).

Имеем, по определению a^i_k и λ_k:

$$\lambda_k \sum_{i=1}^{n} |v_i(t_k)| \leq n^{1/2},$$

$$\lambda_k u_k(t_k) = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} a^i_k v_i(t_k) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$\lambda_k u'(t_k) \geq \lambda_k u_k(t_k) - \lambda_k |u'(t_k) - u_k(t_k)| \geq$$

$$\geq 1 - \lambda_k \sum_{i=1}^{n} |a^i - a^i_k| |v_i(t_k)| \geq 1 - n^{1/2} \max_{1 \leq i \leq n} |a^i - a^i_k|,$$

а так как $f_k(t_k) = 0$, то

$$\lambda_k |f(t_k)| = \lambda_k |f(t_k) - f_k(t_k)| \leq$$

$$\leq \lambda_k \sum_{i=1}^{n} |d^i - d_k^i||v_i(t_k)| \leq n^{1/2} \max_{1\leq i\leq n} |d^i - d_k^i|.$$

Учитывая (2) и (8), получаем отсюда

$$|f(t_k)|/u'(t_k) = \lambda_k |f(t_k)|/(\lambda_k u'(t_k)) \leq$$
$$\leq n^{1/2} \max_{1\leq i\leq n} |d^i - d_k^i| (1 - n^{1/2} \max_{1\leq i\leq n} |a^i - a_k^i|)^{-1} \to 0$$

при $k \to \infty$. Таким образом, для достаточно больших k действительно выполняется (11).

Однако, сопоставляя (10) и (11), видим, что функция $f - \gamma u' \in U$ имеет бесконечное число перемен знака в K, а это невозможно, так как U есть WT-пространство. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Любая пара $\Phi = [\varphi_+, \varphi_-]$ непрерывных строго положительных функций φ_+ и φ_- на K задает в пространстве $C(K)$ несимметричную норму

$$\|f\|_\Phi = \max_{t\in K} \left\{ \frac{|f(t)| + f(t)}{2\varphi_+(t)} + \frac{|f(t)| - f(t)}{2\varphi_-(t)} \right\}, \quad f \in C(K).$$

Функционал $\|\cdot\|_\Phi$ имеет свойства положительной однородности и полуаддитивности [2, с. 487]. Для произвольного конечномерного подпространства $U \subset \subset C(K)$ функция $u^* \in U$ называется элементом наилучшего Φ-приближения для $f \in C(K) \setminus U$, если

$$\|f - u^*\|_\Phi = \inf_{u\in U} \|f - u\|_\Phi := E(f, U)_\Phi.$$

Лемма 2. *Пусть $U \subset C(K)$ — WT-пространство размерности n. Какова бы ни была пара $\Phi = [\varphi_+, \varphi_-]$, для любой функции $f \in C(K) \setminus U$ найдется элемент u^* наилучшего Φ-приближения такой, что существует система точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$, $t_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$, в которых*

$$f(t_i) - u^*(t_i) = \begin{cases} d\varphi_+(t_i) & \text{для } i \text{ нечетных}, \\ -d\varphi_-(t_i) & \text{для } i \text{ четных} \end{cases}$$

либо

$$f(t_i) - u^*(t_i) = \begin{cases} -d\varphi_-(t_i) & \text{для } i \text{ нечетных}, \\ d\varphi_+(t_i) & \text{для } i \text{ четных}, \end{cases}$$

где $d = E(f, U)_\Phi$.

В симметричном случае $(\varphi_+(t) = \varphi_-(t) = 1)$ утверждение леммы 2 содержится в ([8], теорема 4.1). Чтобы доказать лемму 2 в общем виде, надо воспользоваться несимметричным вариантом теоремы Чебышева об альтернансе [2, с. 491] и, рассуждая так же, как и в [9], получить утверждение леммы 2 для случая $K = [a, b]$, и наконец, пользуясь рассуждениями из [8], установить его для произвольного компакта $K \subset \mathbb{R}$.

Доказательство *теоремы* 1. Так как U разделяет пару (φ, ψ), то найдется функция $u_0 \in K$ такая, что $\varphi(t) < u_0(t) < \psi(t)$ для всех $t \in K$. Пусть $\Phi = [\psi - u_0, u_0 - \varphi]$. В соответствии с леммой 1 найдем подпространство $U' \subset \subset U$ размерности $n - 1$ (где $n = \dim U$) и элемент $u' \in U \setminus U'$, удовлетворяющие условиям а), б) и в). Пусть $\lambda > 0$ — такое число, что $E(\lambda u', U')_\Phi = 1$. Ввиду леммы 2 найдется функция $u^* \in U'$ такая, что

$$\| \lambda u' - u^* \|_\Phi = 1 \tag{12}$$

и существует система точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ t_i \in K,\ i = 1, \ldots, n,$ в которых

$$\lambda u'(t_i) - u^*(t_i) = \begin{cases} \psi(t_i) - u_0(t_i) & \text{для } i \text{ нечетных,} \\ -u_0(t_i) + \varphi(t_i) & \text{для } i \text{ четных} \end{cases} \tag{13}$$

либо

$$\lambda u'(t_i) - u^*(t_i) = \begin{cases} -u_0(t_i) + \varphi(t_i) & \text{для } i \text{ нечетных,} \\ \psi(t_i) - u_0(t_i) & \text{для } i \text{ четных.} \end{cases} \tag{14}$$

Покажем, что на самом деле (14) не выполняется. Действительно, из (14) вытекает, в частности, что $(-1)^i(\lambda u'(t_i) - u^*(t_i)) > 0,\ i = 1, \ldots, n.$ Однако в силу изложенного в пп. б) и в) леммы 1, учитывая, что $u^* \in U'$, получаем, что при некотором $\delta > 0$ неравенство $\lambda u'(t) - u^*(t) > 0$ справедливо для всех $t \in$ $\in (\alpha, \alpha + \delta) \cap A$. Тем самым функция $\lambda u' - u^* \in U$ имеет n перемен знака в точках из K, а это невозможно, так как $n = \dim U$, а U — WT-пространство.

Таким образом, справедливо равенство (13), которое можно переписать в виде

$$\lambda u'(t_i) - u^*(t_i) + u_0(t_i) = \begin{cases} \psi(t_i) & \text{для } i \text{ нечетного,} \\ \varphi(t_i) & \text{для } i \text{ четного.} \end{cases}$$

Учитывая (12), из которого вытекает, что для всех $t \in K$ $-u_0(t) + \varphi(t) \le$ $\le \lambda u'(t) - u^*(t) \le \psi(t) - u_0(t)$, т. е. $\varphi(t) \le \lambda u'(t) - u^*(t) + u_0(t) \le \psi(t)$, видим, что функция $f_1 = \lambda u' - u^* + u_0 \in U$ является верхним (φ, ψ)-ужем.

Аналогичные рассуждения, примененные к функции $u''(t) = -u'(t)$, позволяют найти нижний (φ, ψ)-уж в виде $f_2 = \mu u'' - u^{**} + u_0$, где $\mu = (E(u'', U')_\Phi)^{-1}$, u^{**} — элемент наилучшего Ф-приближения функции $\mu u''$ подпространством U', имеющий свойства, описанные в лемме 2.

Наконец, по построению очевидно, что $f_1 \ne f_2$, так как $f_1 - f_2 = (\lambda + \mu) u' -$ $- u^* + u^{**}$, где $\lambda + \mu > 0$, $-u^* + u^{**} \in U'$. Теорема доказана.

3. ***Доказательство*** *теоремы* 2. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — базис пространства U, являющийся WD-системой. Тогда для любого $k = 1, \ldots, n$ подпространство U_k, порожденное элементами $u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n$, является WT-пространством размерности $n - 1$. Без ограничения общности, можно считать, что $\varphi(t) < 0 < \psi(t)$, $t \in K$, так как в противном случае можно перейти к рассмотрению пары $(u_0 - \varphi, \psi - u_0)$, где $\varphi(t) < u_0(t) < \psi(t)$, $t \in K$, для некоторого $u_0 \in U$.

Пусть f_1 и f_2 — (φ, ψ)-ужи. Число перемен знака любого (φ, ψ)-ужа в рассматриваемом случае равно $n - 1$. Разложим f_1 и f_2 по базису $u_1, \ldots, u_n$:

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i u_i, \quad j = 1, 2.$$

Так как $u_1, \ldots, u_n$ — WD-система, число перемен знака в последовательности коэффициентов $a_j^1, \ldots, a_j^n$ не менее числа перемен знака функции f_j, $j = 1, 2$, и, таким образом, не менее $n - 1$. Отсюда сразу следует, что $a_j^i \ne 0, i = 1, \ldots, n,$ $j = 1, 2$, и знаки коэффициентов чередуются, $a_j^i a_j^{i+1} < 0, i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, 2.$

Поэтому существуют только две возможности: либо

$$\operatorname{sgn} a_1^k = \operatorname{sgn} a_2^k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

либо

$$-\operatorname{sgn} a_1^k = \operatorname{sgn} a_2^k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Если справедливо (15), то, как мы покажем, $f_1 = f_2$. Чтобы в этом убедиться, положим $\lambda_k = a_1^k / a_2^k$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда при каждом k функция $f_1 - \lambda_k f_2$ принадлежит U_k. Если при этом $\lambda_k \neq 1$, то, как легко понять, $f_1 - \lambda_k f_2$ имеет $n - 1$ перемен знака, а это невозможно, так как U_k есть WT-пространство размерности $n - 1$. Таким образом, $\lambda_k = 1$, $k = 1, \ldots, n$, и тем самым $a_1^k = a_2^k$, $k = 1, \ldots, n$, а значит, $f_1 = f_2$.

Итак, если $f_1 \neq f_2$, то обязательно выполняется (16). Если при этом f_3 — (φ, ψ)-уж,

$$f_3 = \sum_{i=1}^{n} a_3^i u_i,$$

то обязательно либо $\operatorname{sgn} a_3^1 = \operatorname{sgn} a_1^1$, либо $\operatorname{sgn} a_3^1 = \operatorname{sgn} a_2^1$, откуда с учетом изложенного выше, видим, что либо $f_3 = f_1$, либо $f_3 = f_2$.

Таким образом, существует не более двух различных (φ, ψ)-ужей и, так как в силу теоремы 1, по крайней мере один верхний и по крайней мере один нижний ужи существуют, то они единственны. Теорема доказана.

1. *Schumaker L.* Spline functions: Basic theory.– New York: Wiley, 1981. – 553 p.
2. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
3. *Karlin S.* Representation theorems for positive functions // J. Math. Mech. – 1963. – **12**, № 4. – P. 599 – 618.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
5. *Женсыкбаев А. А.* Об экстремальности моносплайнов минимального дефекта // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – **46**. – С. 1175–1198.
6. *Zielke R.* Discontinuous Čebyšev systems. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1979. – 111 p.
7. *Stockenberg B.* Subspaces of weak and oriented Čebyšev spaces // Manuscripta Math. – 1977. – **20**. – P. 401– 407.
8. *Deutsch F., Nürnbergerr G., Singer I.* Weak Chebyshev subspaces and alternation // Pacific J. Math. – 1980. – **89**, № 1. – P. 9–31.
9. *Jones R. C., Karlovitz L. A.* Equioscillation under nonuniqueness in the approximation of continuous functions // J. Approx. Theory. – 1970. – **3**, № 2. – P. 138–145.

Получено 22.03.93