УДК 519.21

В. В. Горяйнов, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА

We generalize the result of Quine on convergence to unity of extinction probability of a supercritical Galton – Watson process if the offspring mean tends to one without any restrictions on factorial moments.

Узагальнено результат Квайна про збіжність до одиниці ймовірності виродження суперкритичного процесу Гальтона – Ватсона, якщо середнє число нащадків наближається до одиниці при відсутності обмежень на факторіальні моменти.

Пусть $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — процесс Гальтона–Ватсона, т. е. ветвящийся процесс с одним типом частиц и дискретным временем (см., например, [1, 2]). Начальными данными этого процесса является распределение вероятностей случайной величины ξ_1: $p_k = \boldsymbol{P}\{\xi_1 = k\}$, которое выражает способность воспроизводства частиц. Основными характеристиками процесса являются вероятность вырождения $q = \lim\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{P}\{\xi_n = 0\}$ и среднее число потомков $m = \boldsymbol{M}\xi_1$. Для аналитического описания процесса удобно использовать его вероятностную производящую функцию $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$.

Как известно, если $m = f'(1) > 1$ и $p_0 > 0$, то вероятность вырождения q принадлежит интервалу $(p_0, 1)$. В работе [3] были получены оценки для q в терминах $m-1$ и второго и третьего факториальных моментов. Полученные там оценки показывают, что при сделанных предположениях на факториальные моменты вероятность вырождения должна приближаться к единице, если $m-1$ приближается к нулю. С другой стороны, легко видеть, что если не делать никаких дополнительных предположений, то из стремления к нулю величины $m-1$ не следует, вообще говоря, стремление к единице вероятности вырождения q.

Целью данной работы является получение оценок, связывающих q, $m-1$ и вероятностное распределение $\{p_0, p_1, \ldots\}$ без каких-либо ограничений на моменты выше первого порядка. При этом также будет наблюдаться эффект стремления q к единице при стремлении $m-1$ к нулю. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ — вероятностная производящая функция процесса Гальтона–Ватсона $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \ldots$ и $m = f'(1) > 1$. Тогда если $m - 1 \le \varepsilon$, то вероятность вырождения процесса q удовлетворяет неравенству*

$$q \ge \frac{1 - p_1 - \varepsilon}{1 - p_1 + \varepsilon}.$$

Доказательство. Условие $m > 1$ означает, что рассматриваемый ветвящийся процесс является надкритическим. Поэтому, как следует из результатов работы [4], вероятностная производящая функция процесса f допускает представление в виде

$$f(z) = q + (1-q)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \frac{z^n - q^n}{1-q^n},$$

где λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = 1$. При этом $p_1 = \lambda_1$ и

$$m - 1 = f'(1) - 1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n \frac{1-q}{1-q^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n\left(\frac{n}{1+q+\ldots+q^{n-1}} - 1\right).$$

Заметим теперь, что числа $a_n = n/(1+q+\ldots+q^{n-1})$, $n = 2, 3, \ldots$, образуют неубывающую последовательность. Действительно,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{1+q+\ldots+q^n} - \frac{n}{1+q+\ldots+q^{n-1}} =$$

$$= \frac{1+q+\ldots+q^{n-1} - nq^n}{\left(1+q+\ldots+q^n\right)\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right)} > 0.$$

Но тогда из условий на числа λ_n следует неравенство

$$m - 1 \geq \left(\frac{2}{1+q} - 1\right)\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n = (1-\lambda_1)\frac{1-q}{1+q} = (1-p_1)\frac{1-q}{1+q}.$$

Таким образом, из предположения $m - 1 \leq \varepsilon$ вытекает

$$(1-p_1)\frac{1-q}{1+q} \leq \varepsilon.$$

Разрешая последнее неравенство относительно q, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Заметим теперь, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ функция

$$\varphi(x) = \frac{x-\varepsilon}{x+\varepsilon}$$

является монотонно возрастающей в промежутке $0 < x < \infty$. Отсюда и из очевидного неравенства $1 - p_1 \geq p_0$ получаем следующее утверждение.

Следствие. *В условиях теоремы для вероятности вырождения процесса q выполняется неравенство $q \geq (p_0 - \varepsilon)/(p_0 + \varepsilon)$.*

Полученные неравенства показывают, что вероятность вырождения надкритического процесса Гальтона – Ватсона должна стремиться к единице, когда среднее число потомков стремится к единице по совокупности процессов, отделенных от сингулярного (в терминологии монографии [1]). Под сингулярным процессом понимается такой, частица которого за единицу времени трансформируется ровно в одну частицу, т. е. если общее число частиц со временем не меняется и равно в данном случае единице. Отделимость от сингулярного процесса можно задать, например, неравенством $1 - p_1 \geq \delta > 0$ или $p_0 \geq \sigma > 0$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 252 с.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 320 с.
3. *Quine M. P.* Bounds for the extinction probability of a simple branching process // J. Appl. Probab. – 1976. – **13**, № 1. – P. 9 – 16.
4. *Горяйнов В. В.* Дробное итерирование вероятностных производящих функций и вложение дискретных ветвящихся процессов в непрерывные // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 5. – С. 55 – 74.

Получено 21.03.94