УДК 519. 21

С. Я. Махно, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

The limit theorems for solutions of stochastic equations with periodic coefficients and integral functionals of them are obtained.

Доведено теореми про поведінку розв'язків стохастичних рівнянь з періодичними коефіцієнтами та інтегральних функціоналів від них при необмеженому зростанні часу.

В настоящей работе рассматриваются решения стохастических уравнений с периодическими коэффициентами. Получены предельные теоремы о сходимости решений и интегральных функционалов от них при $t \to \infty$.

Обозначим через E_d d-мерное евклидово пространство, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение его элементов, ∇ — символ градиента. Для функции $f(t, x)$ положим $f^{\varepsilon}(t, x) = f(t/\varepsilon^2, x/\varepsilon)$. Класс периодических с периодом 1 по всем аргументам функций $f(t, x)$, l раз непрерывно дифференцируемых по $t \in [0, \infty)$ и k раз непрерывно дифференцируемых по $x \in E_d$, обозначим через $\boldsymbol{P}_{l,k}$. Среднее периодической функции обозначим $\langle\ \rangle$.

Рассматриваемые случайные процессы и величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, E — символ математического ожидания, сходимость в смысле распределений обозначим $\Rightarrow$, для многомерного нормального распределения с параметрами (h, H) используем обозначение $N(h, H)$. Иногда для сокращения записи будем опускать аргументы функций, если ясен их вид.

Пусть $\xi(t)$ — решение стохастического уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t b(s, \xi(s))ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s))dw(s).$$

Здесь $w(t)$ — m-мерный стандартный винеровский процесс, $b(t, x)$ — вектор с координатами $b_i(t, x)$, $i = \overline{1, d}$, $\sigma(t, x)$ — матрица с элементами $\sigma_{ij}(t, x)$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, m}$, $t \in [0, \infty)$, $x \in E_d$. Положим $a(t, x) = \sigma(t, x)(\sigma(t, x))'$, „$'$" — символ транспонирования.

Сделаем предположения относительно коэффициентов.

1. Функции $b_i(t, x) \in \boldsymbol{P}_{1,1}$, $a_{ij}(t, x) \in \boldsymbol{P}_{2,2}$, $i, j = \overline{1, d}$.

2. Существуют постоянные λ, Λ, $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$, такие, что $\forall \theta \in E_d$ $\lambda|\theta|^2 \le (a(t, x)\theta, \theta) \le \Lambda|\theta|^2$.

При предположениях 1, 2 существует решение $p(t, x) \in \boldsymbol{P}_{1,2}$ уравнения [1]

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(t, x)p) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(t, x)p) = 0,$$

$$\langle p \rangle = 1.$$

Если $F(t, x) \in \boldsymbol{P}_{1,1}$, $\langle Fp \rangle = 0$, то существует [1] единственное решение $u(t, x) \in \boldsymbol{P}_{1,2}$ уравнения

* Выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(a(t,x)\nabla,\nabla) + (b(t,x)\nabla u) = F(t,x),$$
$$\langle u \rangle = 0. \tag{1}$$

Доказательства предельных теорем будут проводиться методом введения малого параметра ε. Нетрудно получить уравнение для процесса $\xi^{\varepsilon}(t) = \varepsilon\xi(t/\varepsilon^2)$:

$$\xi^{\varepsilon}(t) = \varepsilon x + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b^{\varepsilon}(s,\xi^{\varepsilon}(s))\,ds + \int_0^t \sigma^{\varepsilon}(s,\xi^{\varepsilon}(s))\,dw^{\varepsilon}(s), \tag{2}$$

где $w^{\varepsilon}(t) = \varepsilon w(t/\varepsilon^2)$ — стандартный винеровский процесс.

Пусть $\alpha_i = \langle b_i p\rangle$, $\alpha \in E_d$ — вектор с координатами α_i; $u_k(t,x) \in \boldsymbol{P}_{1,2}$, $k = \overline{1,\ d}$, — решение задачи (1) при $F(t,x) = \alpha_k - b_k(t,x)$; $u(t,x)$ — вектор-функция с координатами $u_i(t,x)$. Положим

$$\hat{\sigma}_{ij}(t,x) = \sigma_{ij}(t,x) + \sum_{l=1}^{d} \sigma_{lj}(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_l},$$

$\hat{\sigma}(t,x)$ — матрица с элементами $\hat{\sigma}_{ij}(t,x)$,

$$h_{ij}(t,x) = (\hat{\sigma}(t,x)\hat{\sigma}'(t,x))_{ij}, \quad H_{ij} = \langle h_{ij} p\rangle,$$

H — матрица с элементами H_{ij}.

Теорема 1. *При предположениях* 1, 2

$$\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}} - \alpha\sqrt{t} \underset{t\to\infty}{\Rightarrow} N(0, H).$$

Доказательство. Исследование отмеченной в формулировке случайной величины при $t \to \infty$ эквивалентно исследованию сходимости случайной величины $\xi^{\varepsilon}(1) - \lambda/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ (необходимо взять $\varepsilon = 1/\sqrt{t}$). Для процесса $\xi^{\varepsilon}(t)$ выполнены условия теоремы работы [2]. Следовательно, $\xi^{\varepsilon}(1) - \lambda/\varepsilon \Rightarrow \Rightarrow H^{1/2}w(1)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Из теоремы 1 вытекает, что для любой положительной функции $\varphi(t)$, стремящейся к ∞, $\varphi^{-1}(t)(\xi(t)/(\sqrt{t}) - \alpha\sqrt{t})$ сходится по вероятности к нулю. В следующей теореме получено неравенство, позволяющее оценить скорость сходимости, устанавливается сходимость с вероятностью единица.

Обозначим

$$M = \max_k \max_{t,x} |u_k(t,x)|, \quad M_1 = \max_k \max_{t,x} |\nabla u_k(t,x)|^2.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1, 2. *Тогда*

1) *для любой положительной функции* $\varphi(t)$

$$P\left\{\frac{1}{\varphi(t)}\left|\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}} - \alpha\sqrt{t}\right| > C\right\} \le$$
$$\le 2d\exp\left\{-\frac{C^2}{4d(M_1+1)\Lambda}\varphi^2(t) + \frac{C[2M+|x|]}{2\Lambda(M_1+1)\sqrt{d}}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}\right\};$$

2) *для положительной монотонно возрастающей функции* $\psi(t)$ *такой, что* $\int_1^{\infty}\psi^{-2}(2^t)dt < \infty$,

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\psi(t)}\left|\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}-\alpha\sqrt{t}\right|=0\right\}=1.$$

Доказательство. Применим к функции $\varepsilon u_i^{\varepsilon}(t,x)$ и процессу $\xi^{\varepsilon}(t)$ формулу Ито:

$$\varepsilon u^{\varepsilon}(t,\xi^{\varepsilon}(t)) = \varepsilon u_i^{\varepsilon}(0,\xi^{\varepsilon}(0))+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(\alpha_i-b_i^{\varepsilon}(s,\xi^{\varepsilon}(s)))ds+$$

$$+\int_0^t\left(\nabla u_i\left(\frac{s}{\varepsilon^2},\frac{\xi^{\varepsilon}(s)}{\varepsilon}\right),\sigma^{\varepsilon}(s,\xi^{\varepsilon}(s))dw^{\varepsilon}(s)\right).$$

Отсюда с учетом (2) получим

$$\xi_i^{\varepsilon}(t)-\frac{\alpha_i t}{\varepsilon} = \varepsilon\left[x_i+u_i^{\varepsilon}(0,\xi^{\varepsilon}(0))-u_i^{\varepsilon}(t,\xi^{\varepsilon}(t))\right]+\int_0^t\left(\hat{\sigma}^{\varepsilon}(s,\xi^{\varepsilon}(s))dw^{\varepsilon}(s)\right)_i. \tag{3}$$

Обозначим $\varphi_{\varepsilon}=\varphi(\varepsilon^{-2})$. Далее, применяя экспоненциальное неравенство Чебышева, с некоторой постоянной L имеем

$$P\left\{\varphi_{\varepsilon}^{-1}\left|\xi^{\varepsilon}(1)-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right|>C\right\}\le\sum_{i=1}^{d}E\exp\left\{L\varphi_{\varepsilon}\left(\xi_i^{\varepsilon}(1)-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right)-\frac{CL\varphi_{\varepsilon}^2}{\sqrt{d}}\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{d}E\exp\left\{-L\varphi_{\varepsilon}\left(\xi_i^{\varepsilon}(1)-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right)-\frac{CL\varphi_{\varepsilon}^2}{\sqrt{d}}\right\}=I_1+I_2. \tag{4}$$

Оценим I_1. Из (3) и условия 2 находим

$$L\varphi_{\varepsilon}\left(\xi_i^{\varepsilon}(1)-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right)-\frac{CL\varphi_{\varepsilon}^2}{\sqrt{d}} = L\varphi_{\varepsilon}\varepsilon\left[x+u_i^{\varepsilon}(0,\xi^{\varepsilon}(0))-u_i^{\varepsilon}(1,\xi^{\varepsilon}(1))\right]+$$

$$+L\varphi_{\varepsilon}\int_0^1(\hat{\sigma}^{\varepsilon}dw^{\varepsilon})_i-\frac{1}{2}L^2\varphi_{\varepsilon}^2\int_0^1 h_{ii}^{\varepsilon}ds+L\varphi_{\varepsilon}^2\left[\frac{L}{2}\int_0^1 h_{ii}^{\varepsilon}ds-\frac{C}{\sqrt{d}}\right]\le$$

$$\le L\varphi_{\varepsilon}\varepsilon[|x|+2M]+L\varphi_{\varepsilon}^2\left[L\Lambda(M_1+1)-\frac{C}{\sqrt{d}}\right]+$$

$$+L\varphi_{\varepsilon}\int_0^1(\hat{\sigma}^{\varepsilon}dw^{\varepsilon})_i-\frac{1}{2}L^2\varphi_{\varepsilon}^2\int_0^1 h_{ii}^{\varepsilon}ds. \tag{5}$$

Выберем $L=C/2(\sqrt{d}\,\Lambda(M_1+1))$ и учтем, что

$$E\exp\left\{L\varphi_{\varepsilon}\int_0^1(\hat{\sigma}^{\varepsilon}dw^{\varepsilon})_i-\frac{1}{2}L^2\varphi_{\varepsilon}^2\int_0^1 h_{ii}^{\varepsilon}ds\right\}=1.$$

Тогда из (5) получим оценку для I_1:

$$I_1\le d\exp\left\{-\frac{C^2}{4d\Lambda(M_1+1)}\varphi_{\varepsilon}^2+\frac{C[|x|+2M]}{2\sqrt{d}\,\Lambda(M_1+1)}\varepsilon\varphi_{\varepsilon}\right\}.$$

Аналогичная оценка верна и для I_2. Отсюда и из (4) следует первое утверждение теоремы.

Докажем теперь утверждение 2. Запишем (3) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\,(\xi(t)-\alpha t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,(x+u(0,\xi(0))-u(t,\xi(t))) + \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \hat{\sigma}(s,\xi(s))dw(s).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\psi(t)\sqrt{t}}\,(\xi(t)-\alpha t) = \frac{1}{\psi(t)\sqrt{t}}\,(x+u(0,\xi(0))-u(t,\xi(t))) +$$
$$+\frac{1}{\psi(t)\sqrt{t}}\int_0^t \hat{\sigma}(s,\xi(s))dw(s). \tag{6}$$

Очевидно, первое слагаемое правой части равенства (6) сходится к нулю с вероятностью 1. Докажем это и для второго слагаемого. Обозначим

$$\xi_k = \sup_{t>2^k}\frac{1}{\psi(t)\sqrt{t}}\left|\int_0^t \hat{\sigma}(s,\xi(s))dw(s)\right|.$$

Докажем, что ξ_k при $k\to\infty$ сходятся по вероятности к нулю. Имеем

$$P\{\xi_k > C\} \le \sum_{m=k}^{\infty} P\left\{\sup_{2^m\le t\le 2^{m+1}}\left|\int_0^t \hat{\sigma}dw\right| > C\sqrt{2^m}\,\psi(2^m)\right\} \le$$

$$\le \sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{C^2 2^m\psi^2(2^m)}\,E\int_0^{2^{m+1}} \operatorname{Sp} h\,ds \le \frac{\Lambda(M_1+1)}{C^2}\sum_{m=k}^{\infty}\psi^{-2}(2^m) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Поскольку ξ_k с вероятностью 1 не возрастают, то

$$P\left\{\lim_{k\to\infty}\xi_k = 0\right\} = 1.$$

Теорема доказана.

Исследуем сходимость функционалов интегрального типа от процесса $\xi(t)$. Введем функционал

$$F_t(\xi) = \int_0^t g(s,\xi(s))ds + \int_0^t r(s,\xi(s))dw(s) + \int_0^t z(s,\xi(s))dw_1(s).$$

Здесь $w_1(t)$ — n-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от процесса $w(t)$, $g(t,x)$ — k-мерная вектор-функция, $r(t,x)$ и $z(t,x)$ — матрицы соответствующих размерностей, $t\in[0,\infty)$, $x\in E_d$. Обозначим $R(t,x)=r(t,x)r'(t,x)$, $Z(t,x)=z(t,x)z'(t,x)$ и сделаем предположение:

3. **Функции** $g_i(t,x)$, $R_{ij}(t,x)$, $Z_{ij}(t,x)\in \boldsymbol{P}_{1,1}$, $i,j=\overline{1,k}$. Обозначим $\gamma_i=\langle g_i p\rangle$, γ — вектор с координатами γ_i, $v_i(t,x)$ — решения уравнения (1) с $F(t,x)=\gamma_i - g_i(t,x)$, $i=\overline{1,k}$, $v(t,x)$ — вектор-функция с координатами $v_i(t,x)$,

$$\hat{r}_{ij}(t,x) = r_{ij}(t,x) + \sum_{l=1}^{d}\frac{\partial v_i(t,x)}{\partial x_l}\sigma_{lj}(t,x), \quad i=\overline{1,k}, \quad j=\overline{1,m},$$

$\hat{r}(t,x)$ — матрица с элементами $\hat{r}_{ij}(t,x)$,

$$\hat{R}(t,x) = \hat{r}(t,x)\hat{r}'(t,x), \quad G_{ij} = \langle(\hat{R}_{ij}+Z_{ij})p\rangle, \quad i,j=\overline{1,k},$$

G — матрица с элементами G_{ij}.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1 – 3. *Тогда*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} F_t(\xi) - \gamma\sqrt{t} \underset{t\to\infty}{\Rightarrow} N(0, G).$$

Доказательство. Исследование функционала, указанного в формулировке теоремы, при $t \to \infty$ эквивалентно исследованию при $\varepsilon \to 0$ функционала

$$F^\varepsilon(\xi^\varepsilon) - \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (g^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s)) - \gamma)ds +$$

$$+ \int_0^1 r^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))dw^\varepsilon(s) + \int_0^1 z^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))dw_1^\varepsilon(s),$$

где $w_1^\varepsilon(t) = \varepsilon w_1(t/\varepsilon^2)$.

Применив к функции $\varepsilon v_i^\varepsilon(t, x)$ и процессу $\xi^\varepsilon(t)$ формулу Ито, как и при доказательстве теоремы 2, получим

$$F^\varepsilon(\xi^\varepsilon) - \frac{\gamma}{\varepsilon} = \varepsilon v^\varepsilon(0, \xi^\varepsilon(0)) - \varepsilon v^\varepsilon(1, \xi^\varepsilon(1)) +$$

$$+ \int_0^1 \hat{r}^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))dw^\varepsilon(s) + \int_0^1 z^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))dw_1^\varepsilon(s). \tag{7}$$

Применяя лемму работы [2], заключаем, что $F^\varepsilon(\xi^\varepsilon) - \gamma/\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} G^{1/2}\tilde{w}(1)$ $\tilde{w}(t)$ — k-мерный стандартный винеровский процесс. Отсюда следует утверждение теоремы.

Используя представление (7), нетрудно получить для функционала $(F_t(\xi) - - \gamma t)/\varphi(t)\sqrt{t}$ оценки типа оценок теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1 – 3, *положительная функция* $\chi(t)$ *такова, что* $\lim\limits_{t\to\infty} \chi(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \chi(t)/\sqrt{t} = 0$. *Тогда для любого* $\theta \in E_k$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\chi^2(t)}{t} \ln E \exp\{\chi^{-1}(t)(\theta, F_t(\xi) - \gamma t)\} = \frac{1}{2}(G\theta, \theta).$$

Доказательство. Как и выше, введем параметр ε. Обозначим $\chi_\varepsilon = \chi(\varepsilon^{-2})$. Необходимо установить предел при $\varepsilon \to 0$ выражения

$$N^\varepsilon = \varepsilon^2\chi_\varepsilon^2 \ln E\exp\left\{(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-2}\int_0^1 (\theta, g^\varepsilon - \gamma)ds + (\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-1}\int_0^1 (\theta, \hat{r}^\varepsilon dw^\varepsilon + z^2 dw_1^\varepsilon)\right\} =$$

$$= \varepsilon^2\chi_\varepsilon^2 \ln E\exp\left\{\chi_\varepsilon^{-1}\left[v^\varepsilon(0, \xi^\varepsilon(0)) - v^\varepsilon(1, \xi^\varepsilon(1))\right] +\right.$$

$$+ (\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-1}\int_0^1 (\theta, \hat{r}^\varepsilon dw^\varepsilon + z^\varepsilon dw_1^\varepsilon) - \frac{1}{2}(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-2}\int_0^1 ((\hat{R}^\varepsilon + Z^\varepsilon)\theta, \theta)ds +$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-2}\int_0^1 ((\hat{R}^\varepsilon + Z^\varepsilon)\theta, \theta)ds\right\}.$$

Здесь использовано представления (7). Обозначим через $f(t, x)$ решение уравнения (1) с функцией $F(t, x) = (G\theta, \theta)/2 - ((\hat{R}(t, x) + Z(t, x))\theta, \theta)/2$. Используя формулу Ито, получаем

$$\frac{1}{2}(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-2}\int_0^1((\hat{R}^\varepsilon + Z^\varepsilon)\theta,\theta)ds = \frac{1}{2}(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-2}(G\theta,\theta) +$$

$$+ \chi_\varepsilon^{-2}\left[f^\varepsilon(0,\xi^\varepsilon(0)) - f^\varepsilon(1,\xi^\varepsilon(1))\right] + \chi_\varepsilon^{-2}\int_0^1\left(\nabla f\left(\frac{s}{\varepsilon^2},\frac{\xi^\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right), \sigma^\varepsilon(s,\xi^\varepsilon(s))dw^\varepsilon(s)\right).$$

Поэтому

$$N^\varepsilon = \frac{1}{2}(G\theta,\theta) + \varepsilon^2\chi_\varepsilon^2 \ln E\exp\left\{\chi_\varepsilon^{-1}\left[v^\varepsilon(0,\xi^\varepsilon(0)) - v^\varepsilon(1,\xi^\varepsilon(1))\right] +\right.$$

$$+ \chi_\varepsilon^{-2}\left[f^\varepsilon(0,\xi^\varepsilon(0)) - f^\varepsilon(1,\xi^\varepsilon(1))\right] + \varepsilon^{-1}\chi_\varepsilon^{-3}\int_0^1(\theta,\hat{r}^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)'\nabla f)ds +$$

$$\left.+ \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\chi_\varepsilon^{-4}\int_0^1(a^\varepsilon\nabla f,\nabla f)ds\right\}\exp\left\{(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-1}\int_0^1\left((\hat{r}^\varepsilon)'\theta + \frac{\varepsilon}{\chi_\varepsilon}(\hat{\sigma}^\varepsilon)'\nabla f, dw^\varepsilon\right) +\right.$$

$$+ (\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-1}\int_0^1(\theta, z^\varepsilon dw_1^\varepsilon) - \frac{1}{2}(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-2}\int_0^1\left|(\hat{r}^\varepsilon)'\theta + \varepsilon\chi_\varepsilon^{-1}(\hat{\sigma}^\varepsilon)'\nabla f\right|^2 ds -$$

$$\left.- \frac{1}{2}(\varepsilon\chi_\varepsilon)^{-2}\int_0^1(Z^\varepsilon\theta,\theta)ds\right\}.$$

Поскольку математическое ожидание второй экспоненты равно 1, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} N^\varepsilon = \frac{1}{2}(G\theta,\theta).$$

Теорема доказана.

В следующей теореме использована терминология [3].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* 1, 2, *положительная функция* $\kappa(t)$ *такова, что* $\lim_{t\to\infty}\kappa(t)/\sqrt{t} = \infty$, $\lim_{t\to\infty}\kappa(t)/t = 0$. *Для семейства вероятностных мер* $\mu^t(A) = P\{(\xi(t) - \alpha t)/\kappa(t) \in A\}$ *функция* $\kappa^2(t)(H^{-1}x,x)/(2t)$ *является функцией действия.*

Доказательство. Обозначим

$$M^t(\theta) = \ln E\exp\left\{\theta, \frac{\xi(t) - \alpha t}{\kappa(t)}\right\}.$$

Согласно результатам §1 гл. V [3] необходимо установить, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\kappa^2(t)}M^t\left(\frac{\kappa^2(t)}{t}\theta\right) = \frac{1}{2}(H\theta,\theta).$$

Последнее равенство есть следствие теоремы 4, $\chi(t) = t/\kappa(t)$. Теорема доказана.

Из теоремы 5, в частности, следует [3]

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\kappa^2(t)}P\left\{\left|\frac{\xi(t) - \alpha t}{\kappa(t)} - x\right| < \delta\right\} = -\frac{1}{2}(H^{-1}x,x).$$

1. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic stryctures. – Amsterdam etc.: North-Holland publ., 1978. – 700 p.
2. *Махно С. Я.* О поведении решения стохастического уравнения с неограниченным сносом // Теория случайн. процессов. – 1988. – Вып. 16. – С. 66 – 73.
3. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под воздействием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979. – 424 с.

Получено 22.10.93