УДК 533.9

**Н. А. Бритов,** канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# ОБ УСЛОВИИ ТРИВИАЛЬНОСТИ ЯДРА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

The first boundary value problem for a system of equations of magnetic hydrodymanics is considered for a cylinder of infinite length with an ideally conducting surface in the case when it has a flat solution. For the problem linearized in a neighborhood of this solution, sufficient conditions where obtained for it to have only the trivial solution.

Розглянуто першу крайову задачу для системи рівнянь магнітної гідродинаміки у нескінченно довгому циліндрі з поверхнею, що є ідеальним провідником, при умовах, коли вона має плоский розв'язок. Для лінеаризованої в околі цього розв'язку задачі одержано достатні умови, при виконанні яких вона має тривіальний розв'язок.

Рассматривается краевая задача, описывающая стационарное течение вязкой, несжимаемой, электропроводной жидкости в бесконечно длинном цилиндре. Сечение цилиндра плоскостью $\Pi$, перпендикулярной его образующей, — ограниченная, замкнутая, неодносвязная область $D$, граница которой $S=\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров. Предполагается, что поверхность цилиндра — идеальный проводник, а его внешность имеет магнитную проницаемость вакуума. Течение возбуждается заданным на поверхности цилиндра движением, имеющим только касательную к $S$ составляющую $U_\tau$. На течение наложено внешнее постоянное магнитное поле индукцией $\boldsymbol{b}_0$ ($|\boldsymbol{b}_0|>0$ в $D\cup S$), не имеющее потенциальной составляющей и компланарное плоскости $\Pi$. Кроме этого предполагается, что поле $\boldsymbol{b}_0$ не касательно к контуру $S_0$.

**1. Краевая задача.** В рамках модели Навье – Стокса – Максвелла рассматриваемое течение описывается в безразмерных переменных следующей краевой задачей [1]*:

$$\begin{gathered}
(\nabla\times)^2\boldsymbol{U}+\nabla(P+0{,}5\,\mathrm{Re}|\boldsymbol{U}|^2)=\mathrm{Re}\,\boldsymbol{U}\times(\nabla\times\boldsymbol{U})+\mathrm{Ha}^2(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}-\nabla\varphi),\ \nabla\cdot\boldsymbol{U}=0,\\
\nabla\times\boldsymbol{B}=\mathrm{Re}_m(-\nabla\varphi+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}),\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{E}=\nabla\varphi,\\
\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nu}_{|\Sigma}=0,\quad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\tau}_{|\Sigma}=U_\tau,\quad \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\varphi_{|\Sigma}=0,\\
\int_{S_i}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds_i=0,\quad \int_{S_0}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nu})^2\,ds_0>0.
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $\mathrm{Re}$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Re}_m$ — магнитное число Рейнольдса, $\mathrm{Ha}$ — число Гартмана, $\Sigma$ — поверхность цилиндра; $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — соответственно внешняя нормаль и единичный касательный к $S$ вектор; $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\tau}$; $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля в цилиндре. Задача (1) имеет решение при любых наперед заданных значениях $\mathrm{Re}$, $\mathrm{Re}_m$, $\mathrm{Ha}$. В частности, у нее есть плоское решение $(\boldsymbol{U}_0, P_0, \boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{E}_0=0)$.

Наряду с задачей (1) рассматривается линеаризованная в окрестности плоского решения краевая задача для возмущений:

$$(\nabla\times)^2\boldsymbol{V}+\nabla(Q+\mathrm{Re}\,\boldsymbol{U}_0\times\boldsymbol{V})=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{U}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{U}_0)\right]+$$

* Точкой $(\cdot)$ и косым крестиком $(\times)$ обозначены соответственно скалярное и векторное произведения векторов.

$$+ \ \mathrm{Ha}^2 [(\boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}_0 - \nabla\varphi) \times \boldsymbol{B}_0], \quad \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0,$$
$$\nabla \times \boldsymbol{b} = \mathrm{Re}_m(-\nabla\varphi + \boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}_0), \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{b} = 0, \quad \boldsymbol{V}_{|\Sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\nu} \times \nabla\varphi_{|\Sigma} = 0.$$

Пусть $x$ — переменная, изменяющаяся в направлении образующей цилиндра Рассматриваются финитные по $x$, т. е. обращающиеся в нуль при $|x| > |x_0| > 0$ возмущения. Кроме этого предполагается, что составляющая возмущения индукции магнитного поля, коллинеарная образующей цилиндра, обращается в нуль на $\Sigma$.

Известно [2], что для того чтобы числа $(\mathrm{Re}_0, \mathrm{Re}_{m0}, \mathrm{Ha}_0)$ образовывали точку бифуркации плоского решения, необходимо, чтобы задача (2) имела нетривиальные решения при этих значениях $\mathrm{Re}$, $\mathrm{Re}_m$, $\mathrm{Ha}$. Целью работы является получение условий, при выполнении которых задача (2) имеет только тривиальное решение.

**2. Уравнение баланса энергии.** В дальнейшем $Q = D \times [-x_0, x_0]$. Как обычно [1], $\boldsymbol{J}(Q)$ $(\boldsymbol{J}_0(Q))$ — множество гладких (гладких, финитных) в $Q$ соленоидальных векторных полей; $\boldsymbol{H}(Q)$ $(\boldsymbol{H}_0(Q))$ — гильбертово пространство, образованное замыканием $\boldsymbol{J}(Q)$ $(\boldsymbol{J}_0(Q))$ по норме, порождаемой скалярным произведением $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \langle (\nabla \times \boldsymbol{a}_1) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}_2) \rangle$. Здесь и в дальнейшем

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \int_Q \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \, dQ, \quad \|\boldsymbol{a}\|_p = \left\{ \int_Q |\boldsymbol{a}|^p \, dQ \right\}^{1/p}, \quad |\boldsymbol{a}|_p = \left\{ \int_D |\boldsymbol{a}|^p \, dD \right\}^{1/p};$$

в случае $p = 2$ индекс в обозначении нормы опускаем.

Векторные поля $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{b}$ раскладываются на компланарные и ортогональные плоскости $\Pi$ составляющие: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_d + \boldsymbol{\kappa} V'$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_d + \boldsymbol{\kappa} b'$. Согласно предположению $b'_{|\Sigma} = 0$. Для задачи (2) стандартным образом записывается уравнение баланса энергии:

$$\|\nabla \times \boldsymbol{V}\|^2 + \mathrm{Ha}^2 \mathrm{Re}_m^{-2} \|\nabla \times \boldsymbol{b}\|^2 =$$
$$= \mathrm{Re} \langle \nabla \times \boldsymbol{V}, \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{U}_0 \rangle + \mathrm{Ha}^2 [\langle \boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_d \times \boldsymbol{V}_d \rangle + \mathrm{Re}_m^{-2} \langle \nabla \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{b} \rangle]. \tag{3}$$

**3. Вспомогательные предложения.** Ниже приведены утверждения, которые используются при доказательстве основного результата.

**Предложение 1** *(мультипликативное неравенство для двумерных соленоидальных полей). Если* $\boldsymbol{a}(a_1, a_1) \in H_0(D)$, *то при* $2 < p < 6$ *справедливо неравенство*

$$|a_1|_p \le \beta |a_1|^{1-3\alpha} |a_2|^{\alpha} |\nabla \times \boldsymbol{a}|^{2\alpha}, \tag{4}$$

*где* $\alpha = (p-2)/2p$, $\beta = 2^{10\alpha}$.

Неравенство (4) доказывается аналогично обычному мультипликативному неравенству [3] с заменой в силу соленоидальности поля $a$ производной $\partial a_1/\partial x_1$ на производную $\partial a_2/\partial x_2$.

**Предложение 2.** *Если векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_d + \boldsymbol{\kappa} a' \in \boldsymbol{H}(Q)$ *и выполняются условия*

$$\| a \|_p \le M_p \| \nabla \times a \|. \tag{6}$$

Доказательство предложения для $p = 2$ имеется в [3]. Для случая $p > 2$ оно аналогично.

В дальнейшем $U_{01}, U_{02}$ — составляющие поля $U_0$, соответственно коллинеарная и ортогональная полю $B_0$.

**Предложение 3.** *Для* $2 < r < 4$ *справедливы оценки*

$$|U_0|_r \le M_v \,\mathrm{Ha}^{(r-2)/4r}, \quad |U_{02}|_r \le M_{v2}\,\mathrm{Ha}^{(r-4)/2r}. \tag{7}$$

***Доказательство.*** Поле $U_0$ с помощью конструкции Хопфа [1] представляется в виде $U_0 = U_{0\varepsilon} + W_0$ $(W_{0|_S} = 0)$, причем $\varepsilon$ можно выбрать так, чтобы выполнялась оценка $|U_{0\varepsilon}|_r \le M_{\varepsilon r}\,\mathrm{Ha}^{-1/r}$. Поле $W_0 = W_{01} + W_{02}$, где, как и выше, $W_{01}$ и $W_{02}$ — соответственно коллинеарная и ортогональная полю $B_0$ составляющие. В [4] доказаны оценки

$$|W_{01}|_r \le M_{01}(\mathrm{Re}), \quad |W_{02}|_r \le M_{02}(\mathrm{Re})\,\mathrm{Ha}^{-1/2}, \quad |\nabla \times U_0| \le M_\nabla(\mathrm{Re})\,\mathrm{Ha}^{1/2}.$$

Оценки (7) следуют из этих оценок и неравенства (4).

**4. Основные оценки.** Из невырожденности поля $b_0$ и результатов [4] следует, что для поля $B_0$ существуют постоянные $m$ и $M$ такие, что $m \le |B_0| \le M$. В $D$ вводится система координат, локальный базис которой образован единичными векторами $\beta_1 = |B_0|^{-1} B_0$ и $\beta_2 \perp \beta_1$. В этом базисе $V_d = V_1\beta_1 + V_2\beta_2$, $U_0 = U_{01}\beta_1 + U_{02}\beta_2$.

**Лемма 1.** *Для каждого* $\mathrm{Re} > 0$ *и* $\mathrm{Ha} > \mathrm{Ha}_{01}$, $\mathrm{Re}_m < \mathrm{Re}_{m0}(\mathrm{Ha})$, $2 < r < 4$, *где*

$$\mathrm{Ha}_{01} = (4\,\mathrm{Re}\, M_s M_{v2})^{2r/(4-r)}, \quad \sigma = (r-2)/4r,$$

$$\mathrm{Re}_{m0}(\mathrm{Ha}) = \frac{\left(M_s^2 M_v^2\,\mathrm{Ha}^{-2\sigma} + 3M^2 M_4^4 M_{v2}^2\right)^{1/2} - M_s M_v\,\mathrm{Ha}^{-\sigma}}{2M^2 M_4^4 M_{v2}}\,\mathrm{Ha}^{-1/2},$$

*справедливы оценки*

$$\begin{gathered} \|\nabla \times V\| \le M_V(\mathrm{Re})\,\mathrm{Ha}^{(r-1)/2r}(\|V_2\| + \|V'\|), \\ \|\nabla \times b\| \le M_b(\mathrm{Re})\,\mathrm{Re}_m\,\mathrm{Ha}^{-(r+1)/2r}(\|V_2\| + \|V'\|). \end{gathered} \tag{8}$$

***Доказательство.*** Сначала оценим слагаемые в правой части уравнения баланса энергии (3). Из неравенств Гельдера и (6) следует

$$\begin{gathered} |\langle \nabla \times b, U_0 \times b\rangle| \le M_s \|\nabla \times b\|^2 |U_0|_r, \\ 1/r + 1/s = 1/2, \quad r < s. \end{gathered} \tag{9а}$$

Из неравенств Гельдера, Юнга и (6), (7) вытекает

$$|\langle U_0 \times B_0, b_d \times V_d\rangle| \le \frac{1}{2} M_4 (\varepsilon_1 \|\nabla \times V\|^2 + \varepsilon_1^{-1} M^2 M_{v2}^2\,\mathrm{Ha}^{-1}\|\nabla \times b\|^2). \tag{9б}$$

Для оценки слагаемого $\langle \nabla \times V, V \times U_0\rangle$ в (9а) представим его в виде

$$\langle \nabla \times V, V \times U_0\rangle = \langle \nabla \times V, V_1 U_{02}\kappa\rangle + \langle \nabla \times V, V_2 U_{01}\kappa\rangle + \langle \nabla \times V, V'\kappa \times U_0\rangle,$$

после чего каждое слагаемое оценим отдельно. Первое слагаемое оценивается с помощью неравенств Гельдера, Пуанкаре и (6) (в дальнейшем при интегрировании по переменной $x$ пределы интегрирования не указываются):

$$|\langle \nabla \times \boldsymbol{V}, V_1 U_{02} \kappa \rangle| \le |\boldsymbol{U}_{02}|_r \int |\nabla \times \boldsymbol{V}| \, |\boldsymbol{V}_1|_s \, dx \le$$

$$\le M_s |\boldsymbol{U}_{02}|_r \| \nabla \times \boldsymbol{V} \| \left( \int |\nabla \times \boldsymbol{V}|^2 dx \right)^{1/2} \le M_s^2 |\boldsymbol{U}_{02}|_r \| \nabla \times \boldsymbol{V} \|^2.$$

Второе и третье слагаемые оцениваются однотипно с помощью неравенств Гельдера, Юнга и мультипликативного:

$$|\langle \nabla \times \boldsymbol{V}, V_2 U_{01} \kappa \rangle| \le |\boldsymbol{U}_{01}|_r \| \nabla \times \boldsymbol{V} \| \left( \int |V_2|_s^2 \, dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le M_s |\boldsymbol{U}_{01}|_r \| \nabla \times \boldsymbol{V} \| \left( \int |\nabla V_2|^{4/r} |V_2|^{2-4/r} dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le M_s |\boldsymbol{U}_{01}|_r \| \nabla \times \boldsymbol{V} \| (2r^{-1} \varepsilon_2^{r/2} \| \nabla \boldsymbol{V}_2 \|^2 + s^{-1} \varepsilon_2^{-s} \| \boldsymbol{V}_2 \|^2)^{1/2},$$

$$|\langle \nabla \times \boldsymbol{V}, V' \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{U}_0 \rangle| \le$$

$$\le M_s |\boldsymbol{U}_0|_r \| \nabla \times \boldsymbol{V} \| (2r^{-1} \varepsilon_2 r^{r/2} \| \nabla \boldsymbol{V}' \|^2 + s^{-1} \varepsilon_2^{-s} \| \boldsymbol{V}' \|^2)^{1/2},$$

$$\| \nabla \boldsymbol{V}_2 \| \le \| \nabla \times \boldsymbol{V} \|, \quad \| \nabla \boldsymbol{V}' \| \le \| \nabla \times \boldsymbol{V} \|.$$

Подстановка оценок слагаемых в уравнение баланса энергии приводит к основному неравенству

$$\{ 1 - 1/2 \, \mathrm{Ha}^2 M_4^2 \varepsilon_1 - \mathrm{Re} \, M_s (|\boldsymbol{U}_{02}|_r + 4 |\boldsymbol{U}_0|_r r^{-1} \varepsilon_2^{r/2}) \} \| \nabla \times \boldsymbol{V} \|^2 +$$

$$+ \mathrm{Ha}^2 \mathrm{Re}_m^{-2} (1 - 1/2 \, \mathrm{Re}_m^2 \varepsilon_1^{-1} M^2 M_4^2 |\boldsymbol{U}_{02}|^2 - \mathrm{Re}_m M_s (|\boldsymbol{U}_0|_r) \| \nabla \times \boldsymbol{b} \|^2 \le$$

$$\le 2 \, \mathrm{Re} \, M_s s^{-1} \varepsilon_2^{-s} |\boldsymbol{U}_0|_r (\| \boldsymbol{V}_2 \| + \| \boldsymbol{V}' \|) \| \nabla \times \boldsymbol{V} \|. \qquad (10)$$

Постоянные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и величины $\mathrm{Ha}_0, \mathrm{Re}_{m0}(\mathrm{Ha})$ выбираются из условия положительности множителей при $\| \nabla \times \boldsymbol{V} \|^2, \| \nabla \times \boldsymbol{b} \|^2$:

$$\varepsilon_1 = (2 M_4^2 \mathrm{Ha}^2)^{-1}, \quad \varepsilon_2 = (16 \mathrm{Re} \, M_s |\boldsymbol{U}_0|_r r^{-1})^{-2/r},$$

$$\mathrm{Re} \, M_s |\boldsymbol{U}_{02}|_r = 1/4,$$

$$1/2 \, \mathrm{Re}_m^2 \varepsilon_1^{-1} M^2 M_4^2 |\boldsymbol{U}_{02}|^2 + \mathrm{Re}_m M_s |\boldsymbol{U}_0|_r = 3/4.$$

Оценки (8) получаются теперь из неравенства (10) путем выделения полного квадрата при $\| \nabla \times \boldsymbol{V} \|^2$ и подстановки оценок для $|\boldsymbol{U}_0|_r$ и $|\boldsymbol{U}_{02}|_r$.

В неравенствах (7) оцениваются роторы возмущений скорости и индукции магнитного поля через составляющие возмущений скорости, ортогональные полю $B_0$. Для получения основного результата необходима и обратная оценка.

В [4] доказана оценка: $|\nabla \times \boldsymbol{B}_0| \le M_{b0}(\mathrm{Re}) \, \mathrm{Re}_m \, \mathrm{Ha}^{-1/2}$. Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Для любого* $\mathrm{Re} > 0$ *и* $2 \le r \le 4$ *справедливо неравенство*

$$\| V_2 \|^2 + \| V' \|^2 \le m^{-2} \{ (\mathrm{Re}_m^{-2} + M_r^2 M_s^2 \mathrm{Ha}^{(r-2)/4r}) \| \nabla \times \boldsymbol{b} \|^2 +$$

$$+ 8^{4(p-2)/(p+6)} [ (M_s M_\nabla \mathrm{Ha}^{1/2} + M_q \mathrm{Ha}^{1/2p}) \| \nabla \times \boldsymbol{b} \| +$$

$$+ (M + M_q M_{b0} \mathrm{Re}_m \mathrm{Ha}^{-1/2}) \| \nabla \times \boldsymbol{V} \| ]^{4r/(r+6)} [ M_2 (\mathrm{Re}_m^{-1} +$$

$$+ M_r M_s \mathrm{Ha}^{(r-2)/2r})\|\nabla\times \boldsymbol{b}\|]^{2(6-r)/(6+r)}\}, \quad q = 2r/(r-2). \tag{11}$$

***Доказательство.*** Для получения обратной оценки используется линеаризованное уравнение Максвелла (2), из которого следует

$$\boldsymbol{\beta}_1\cdot\nabla\varphi = \boldsymbol{\beta}_1\cdot(\boldsymbol{U}_0\times \boldsymbol{b}) - \mathrm{Re}_m^{-1}\boldsymbol{\beta}_1\cdot(\nabla\times \boldsymbol{b}), \tag{12а}$$

$$\|\nabla\varphi\|^2 \le \|\varphi\|_r\|\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times \boldsymbol{U}_0)+\boldsymbol{U}_0\cdot(\nabla\times \boldsymbol{b})+$$

$$+B_0\cdot(\nabla\times \boldsymbol{V})+\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\times \boldsymbol{B}_0)\|_p, \quad p<2, \quad 1/r+1/p = 1, \tag{12б}$$

$$\|V_2\|^2 + \|V'\|^2 \le m^{-2}(\mathrm{Re}_m\|\nabla\times \boldsymbol{b}\|^2+\|\nabla\varphi\|^2+\|U_0\times \boldsymbol{b}\|^2). \tag{12в}$$

В силу равенства нулю касательной к $\Sigma$ составляющей градиента $\varphi$ можно считать, что $\varphi$ обращается в нуль на внешней поверхности $\Sigma$ и постоянна на внутренних поверхностях. Поэтому из (12а), неравенств Пуанкаре и (6) следуют оценки

$$\|U_0\times \boldsymbol{b}\| \le M_s|U_0|_r\|\nabla\times \boldsymbol{b}\|,$$

$$\|\varphi\| = M_2(M_s\|\boldsymbol{U}_0\|_r+\mathrm{Re}_m^{-1})\|\nabla\times \boldsymbol{b}\|. \tag{13}$$

Из мультипликативного неравенства и (12б) получаем оценку

$$\|\nabla\varphi\|^2 \le 8^{1-2/r}\|\varphi\|^{(6-r)/2r}(|\nabla\times \boldsymbol{U}_0|\|\boldsymbol{b}\|_q+|\boldsymbol{U}_0|_q\|\nabla\times \boldsymbol{b}\|+$$

$$+M\|\nabla\times V\|+|\nabla\times \boldsymbol{B}_0|\|V\|_q).$$

Подстановка этой оценки в (12в) и применение оценок (6), (13) и оценки для $|\nabla\times \boldsymbol{B}_0|$ приводят к требуемому неравенству.

**5. Условия тривиальности ядра.** Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** *Для любого значения числа* Re *и* $\mathrm{Ha}>\mathrm{Ha}_0$, $\mathrm{Re}_m<\mathrm{Re}_{m0}(\mathrm{Ha})$, *где*

$$\mathrm{Ha}_0 = \max(1, \mathrm{Ha}_{01}, \mathrm{Ha}_{02}),$$

$$\mathrm{Ha}_{02} = \Big(1+M_r M_s^2\mathrm{Re}_m^2\Big)M_b^2 +$$

$$+ 8^{4(r-2)/(6+r)}[(M_r+M_s M_\nabla)M_\nabla\mathrm{Re}_m+(M+M_r M_{b0}\mathrm{Re}_m)M_v]^{4r/(6+r)}+$$

$$+ [M_2(1+M_r M_s\mathrm{Re}_m)M_b]^{2(6-r)/(6+r)}\Big\}^{1/\sigma} m^{-2/\sigma},$$

$$\sigma = (2r^2-11r+6)/(6+r),$$

*задача* (2) *имеет только тривиальное решение.*

***Доказательство.*** Пусть выполнены условия леммы 1. Подставляя оценки (8) в неравенство (11), получаем

$$\|V_2\|^2 + \|V'\|^2 \le \Big\{\Big(1+M_r^2M_s^2\mathrm{Re}_m\mathrm{Ha}^{(r-2)/4r}\Big)M_b^2\mathrm{Ha}^{-2+1/r}+$$

$$+ 8^{4(r-2)/(6+r)}\Big[\Big(M_s M_\nabla\mathrm{Na}^{1/2}+M_q\mathrm{Na}^{1/2}\Big)M_b\mathrm{Re}_m\mathrm{Ha}^{-1+1/2r}+$$

$$+ \Big(M+M_q M_{b0}\mathrm{Re}_m\mathrm{Ha}^{-1/2}\Big)M_v\mathrm{Ha}^{1/2r}\Big]^{4r/(6+r)}\times$$

$$\times\Big[M_2\Big(1+M_r M_s\mathrm{Re}_m\mathrm{Ha}^{(r-2)/4r}\Big)M_b\mathrm{Ha}^{-1+1/2r}\Big]^{2(6-r)/(6+r)}\Big\}m^{-2}(\|V_2\|^2+\|V'\|^2) =$$

$$= A(\mathrm{Re},\mathrm{Re}_m,\mathrm{Ha})(\|V_2\|^2+\|V'\|^2).$$

При $\mathrm{Ha} > \max(1, \mathrm{Ha}_{01})$ $A(\mathrm{Re}, \mathrm{Re}_m, \mathrm{Ha})$ оценивается выражением

$$A(\mathrm{Re}, \mathrm{Re}_m, \mathrm{Ha}) \le \Big\{\big(1 + M_r M_s^2 \mathrm{Re}_m^2\big) M_b^2 + $$
$$+ 8^{4(r-2)/(6+r)}\big[(M_r + M_s M_\nabla) M_\nabla \mathrm{Re}_m + (M + M_r M_{b0} \mathrm{Re}_m M_v)\big]^{4r/(6+r)} +$$
$$+ \big[M_2 (1 + M_r M_s \mathrm{Re}_m) M_b\big]^{2(6-r)/(6+r)}\Big\} m^{-2}.$$

Пусть $r = 2 + \delta$, $\delta > 0$, — достаточно малое. Если $\mathrm{Ha} > \mathrm{Ha}_0$, то $A(\mathrm{Re}, \mathrm{Re}_m, \mathrm{Ha}) < 1$. Тогда из (14) следует требуемое утверждение.

***Замечания.*** **1.** Выражение для $A(\mathrm{Re}, \mathrm{Re}_m, \mathrm{Ha})$ намеренно загрублено с целью сделать его обозримым. В настоящей работе не приводятся выражения для постоянных $M_{01}, M_{01}, M_\nabla, M_{b0}$ ввиду их громоздкости. Эти выражения приведены в [4].

**2.** Условия теоремы гарантируют устойчивость решения $(\boldsymbol{U}_0, P_0, \boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{E}_0)$ относительно рассмотренного класса трехмерных возмущений, поскольку оператор линеаризованной задачи отрицательно определен.

1. *Солонников В. А.* О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1960. – **59**. – С. 174–187.
2. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 392 с.
3. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
4. *Бритов Н. А.* Априорные оценки, существование и единственность двумерных и осесимметричных безындукционных решений краевых задач магнитной гидродинамики // Магнитная гидродинамика. – 1988. – № 4. – С. 81–85.

Получено 22.10.93