УДК 517.51

Т. О. Банах (Львів. нац. ун-т),
С. М. Куцак, В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко (Чернівец. нац. ун-т)

ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ БЕРІВСЬКОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ ІНТЕГРАЛІВ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД ПАРАМЕТРА

We investigate a problem of the Baire classification of integrals $g(y) = (If)(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ depending on a parameter y, which belongs to the topological space Y, for functions f separately continuous and similar to this type. For a given function g, we consider an inverse problem of constructing the function f such that $g = If$. In particular, for compact spaces X and Y and a finite Borel measure μ on X, we prove the following result: In order that the separately continuous function $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ with $g = If$ to exist, it is necessary and sufficient that all the restrictions $g|_{Y_n}$ of the function $g\colon Y \to \mathbb{R}$ should be continuous for some closed covering $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ of the space Y.

Досліджується питання про те, до яких берівських класів належать інтеграли $g(y) = (If)(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$, залежні від параметра y, що пробігає топологічний простір Y, для нарізно неперервних і подібних до них функцій f, і обернена задача про побудову для даної функції g такої функції f, що $g = If$. Зокрема, доведено, що для компактних просторів X і Y і скінченної борелівської міри μ на X для того, щоб існувала нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ з $g = If$, необхідно і досить, щоб усі звуження $g|_{Y_n}$ функції $g\colon Y \to \mathbb{R}$ були неперервними для деякого замкненого покриття $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ простору Y.

0. Вступ. Для нарізно неперервної функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ розглянемо інтеграл, залежний від параметра, тобто функцію $g(y) = (If)(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx$, визначену на відрізку $[0, 1]$. З теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла випливає, що g є неперервною, якщо f — обмежена. В загальному випадку функція g може виявитися розривною, але обов'язково належить до першого класу Бера. Наприклад, для нарізно неперервної функції f, яка визначається співвідношеннями $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{(x^4 + y^4)\operatorname{arctg} y^{-2}}$ при $0 \le x \le 1$ і $0 < y \le 1$ і $f(x, 0) = 0$ при $0 \le x \le 1$, маємо $g(y) = 1$ при $0 < y \le 1$ і $g(0) = 0$. Виникає природне питання [1, 2]: які функції першого класу Бера на $[0, 1]$ можна подати у вигляді інтеграла, залежного від параметра з нарізно неперервною підінтегральною функцією?

Виявляється, що є функції першого класу Бера, які не можна подати в такому вигляді. Зокрема, такою є відома функція Рімана. Воно й не дивно, тому що для нарізно неперервної функції f функція $g = If$ буде σ-неперервною, тобто для неї існує така послідовність замкнених множин F_n, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = [0, 1]$ і всі звуження $g|_{F_n}$ є неперервними. Але у σ-неперервної функції $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ множина точок розриву ніде не щільна, в той час як у функції Рімана вона скрізь щільна. Множина σ-неперервних функцій $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ідентична з множиною усіх поточкових границь так званих стабільно збіжних послідовностей неперервних функцій $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, у яких для кожного $y \in [0, 1]$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $g_{n+p}(y) = g_n(y)$ для довільного $p \in \mathbb{N}$, або, як ми говоримо, з множиною функцій стабільного першого класу Бера, яка є власною частиною першого класу Бера. І вже для кожної σ-неперервної функції g: $[0,1] \to \mathbb{R}$ існує така нарізно неперервна функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $g = If$.

Ці спостереження поклали початок дослідженням, результати яких викладаються в даній праці. Будемо розглядати інтеграли

$$g(y) = If(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x),$$

залежні від параметра y, що пробігає деякий топологічний простір Y, для функцій f, визначених на добутку $X \times Y$ простору X з мірою μ і простору Y. Для таких інтегралів вивчається пряма задача про достатні умови належності функції $g = If$ до того чи іншого берівського класу і обернена задача про побудову для даної функції g такої функції f з певного класу, що $g = If$.

Наскільки нам відомо, досі систематичні дослідження в цьому напрямку не проводилися. З досягнень попередників ми знаємо лише глибокий результат Ж. Бурже, Д. Фремліна і М. Талаґрана [3]: якщо (X, μ) — простір зі скінченною σ-адитивною борелівською мірою μ, Y — повнометризовний топологічний простір і $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — обмежена функція, яка вимірна відносно першої змінної і належить до першого класу Бера відносно другої, то функція $g = If$ також належить до першого класу Бера. Обернені задачі раніше взагалі не розглядалися.

Будемо сподіватися, що з появою цієї праці дослідження у вказаній області пожвавляться.

1. Слабка розривність і σ-неперервність. Нехай X і Y — топологічні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ будемо називати *σ-неперервним*, якщо існує така послідовність замкнених в X множин F_n, що $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_n = X$ і всі звуження $f|_{F_n}$ є неперервними. Ми говоримо, що відображення f *σ-неперервне в точці* $x \in X$, якщо існує послідовність замкнених в X множин $F_n(x)$ така, що множина $U(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_n(x)$ є околом точки x у просторі X і всі звуження $f|_{F_n(x)}$ неперервні. Сукупність усіх σ-неперервних відображень $f\colon X \to Y$ будемо позначати символом $\sigma C(X, Y)$.

Лема 1. *Нехай X — паракомпактний простір, Y — топологічний простір і відображення $f\colon X \to Y$ σ-неперервне у кожній точці x з X. Тоді f — σ-неперервне.*

Доведення. Візьмемо для кожної точки $x \in X$ відповідні послідовності замкнених множин $F_n(x)$ і окіл $U(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_n(x)$. З паракомпактності простору X випливає, що існує відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{V}$ простору X, яке вписане в покриття $\{U(x)\colon x \in X\}$. Для кожного $V \in \mathcal{V}$ виберемо таку точку $x_V \in X$, що $V \subseteq U(x_V)$. Покладемо $F_n = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \overline{V} \cap F_n(x_V)$. З локальної скінченності системи $\mathcal{V}$ безпосередньо випливає, що F_n є замкненими в X і всі звуження $f|_{F_n}$ неперервні. Крім того, зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = X$.

Лему доведено.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *слабко розривним* [4], якщо для кожної множини A в X звуження $f|_A$ має ніде не щільну в A множину точок розриву. Для відображення $f\colon X \to Y$ через $C(f)$ і $D(f)$ будемо позначати відповідно множини всіх його точок неперервності і точок розриву. Оскільки $D(f|_A) \subseteq D(f|_{\overline{A}})$ і множина A щільна в $\overline{A}$, то відображення f буде слабко розривним тоді і тільки тоді, коли для кожної замкненої в X множини F множина $D(f|_F)$ ніде не щільна в F. Відомо [5, 6], що для регулярного простору Y відображення $f: X \to Y$ буде слабко розривним тоді і тільки тоді, коли $C(f|_A) \neq \varnothing$ для кожної непорожньої множини A в X.

Вивчимо зв'язки між σ-неперервністю і слабкою розривністю.

Теорема 1. *Нехай X — досконалий паракомпактний простір, Y — топологічний простір і $f: X \to Y$ — слабко розривне відображення. Тоді f — σ-неперервне.*

Доведення. Розглянемо множину G всіх тих точок $x \in X$, в яких відображення f є σ-неперервним. Зрозуміло, що G — відкрита множина в X. На підставі леми 1 досить довести, що $G = X$. Припустимо, що $G \neq X$. Тоді доповнення $F = X \setminus G$ — це непорожня замкнена в X множина. За умовою множина $D = D(f|_F)$ ніде не щільна в F. Отже, існує така непорожня відкрита в X множина U, що $U \cap D = \varnothing$ і $U \cap F \neq \varnothing$. З досконалості простору X випливає, що для множин $A = U \setminus F$ і $B = U \cap F$ існують такі послідовності замкнених множин A_n і B_n, що $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Оскільки $B_n \subseteq F \setminus D = C(f|_F)$, то звуження $f|_{B_n}$ є неперервними. Для кожного n маємо $A_n \subseteq G$. Отже, звуження $f|_{A_n}$ є σ-неперервними в кожній точці $x \in A_n$. Тому за лемою 1 звуження $f|_{A_n}$ σ-неперервні, адже замкнений підпростір A_n паракомпактного простору X сам паракомпактний. У такому разі для кожного n існує така послідовність замкнених у X множин A_{nm}, що $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}$ і всі звуження $f|_{A_{nm}}$ є неперервними. Але $\left(\bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = U$. Отже, $U \subseteq G$, і тому $U \cap F = \varnothing$, що приводить до суперечності.

Теорему 1 доведено.

Нагадаємо, що множина A в топологічному просторі X називається *залишковою*, якщо її доповнення $X \setminus A$ є множиною першої категорії. Топологічний простір X називається *берівським*, якщо кожна залишкова в X множина скрізь щільна в X, і *спадково берівським*, якщо кожний його замкнений підпростір є берівським.

Теорема 2. *Нехай X і Y — топологічні простори і $f: X \to Y$ — σ-неперервне відображення. Тоді:*

i) *$\overline{D(f)}$ — множина першої категорії в X;*

ii) *якщо простір X берівський, то $D(f)$ — ніде не щільна в X;*

iii) *якщо простір X спадково берівський, то відображення f слабко розривне.*

Доведення. i). Нехай $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність замкнених в X множин така, що всі звуження $f|_{F_n}$ неперервні і $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$. Легко перевірити, що тоді відкрита множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n$ буде залишковою в X і $G \subseteq C(f)$. Оскільки $\overline{D(f)} \subseteq X \setminus G$, то $\overline{D(f)}$ — множина першої категорії в X.

ii). Оскільки замкнена множина першої категорії в берівському просторі обов'язково ніде не щільна, то ii) безпосередньо випливає з i).

iii). Згідно з ii) для кожної замкненої в X множини F множина $D(f|_F)$ ніде не щільна в F, адже підпростір F берівський. Тому f є слабко розривним.

2. Стабільна збіжність і модифіковані берівські класи. Для підмножини M топологічного простору T символом $\overline{M}^s$ позначимо *секвенціальне замикання* множини M у просторі T, яке складається з усіх границь збіжних в T послідовностей точок t_n з M. Для топологічних просторів X і Y символ $C(X, Y)$ означає, як звичайно, множину всіх неперервних відображень $f\colon X \to Y$, символ Y^X — простір усіх відображень $f\colon X \to Y$ з топологією поточкової збіжності, а $C_p(X, Y)$ — простір $C(X, Y)$ з топологією, індукованою з Y^X.

Нагадаємо означення берівських класів $B_\alpha(X, Y)$, які визначаються для кожного не більш ніж зліченного порядкового числа α. Для $\alpha = 0$ покладають $B_0(X, Y) = C(X, Y)$. Якщо $\alpha > 0$ і класи $B_\xi(X, Y)$ визначені для $\xi < \alpha$, то покладають $B_\alpha(X, Y) = \overline{\bigcup\limits_{\xi<\alpha} B_\xi(X, Y)}^s$, де секвенціальне замикання береться у просторі Y^X.

Послідовність функцій $f_n \in Y^X$ називається *стабільно збіжною* до функції $f \in Y^X$, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий номер $N = N(x)$, що $f_n(x) = f_N(x)$, як тільки $n \geq N$. Стабільна збіжність — це поточкова збіжність у просторі Y_d^X, де Y_d — простір Y з дискретною топологією. Запис $f_n \xrightarrow{d} f$ означає, що послідовність функцій f_n стабільно збігається до f. *Стабільним замиканням* множини $M \subseteq Y^X$ будемо називати секвенціальне замикання множини M у просторі Y_d^X і позначати його символом $\overline{M}^d$. Множина $\overline{M}^d$ складається з усіх функцій $f \in Y^X$ таких, що $f_n \xrightarrow{d} f$ для деякої послідовності функцій $f_n \in M$. *Стабільні берівські класи* $B_\alpha^d(X, Y)$ вводяться за допомогою співвідношень $B_0^d(X, Y) = C(X, Y)$ і $B_\alpha^d(X, Y) = \overline{\bigcup\limits_{\xi<\alpha} B_\xi(X, Y)}^d$ при $0 < \alpha < \omega_1$.

Нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Y$ називається *секвенціально неперервним*, якщо для кожної точки $x \in X$ і довільної послідовності точок $x_n \in X$ з умови $x_n \to x$ випливає, що $f(x_n) \to f(x)$. Сукупність усіх секвенціально неперервних відображень $f\colon X \to Y$ позначатимемо символом $sC(X, Y)$. *Секвенціальні берівські класи* $sB_\alpha(X, Y)$ і *стабільні секвенціальні берівські класи* $sB_\alpha^d(X, Y)$ вводяться за допомогою співвідношень $sB_0(X, Y) = sB_0^d(X, Y) = sC(X, Y)$, $sB_\alpha(X, Y) = \overline{\bigcup\limits_{\xi<\alpha} sB_\xi(X, Y)}^s$ і $sB_\alpha^d(X, Y) = \overline{\bigcup\limits_{\xi<\alpha} sB_\xi(X, Y)}^d$ при $0 < \alpha < \omega_1$.

Якщо топологічний простір Y — це числова пряма $\mathbb{R}$, то в позначеннях введених функціональних класів символом $\mathbb{R}$ нехтуємо.

Множина F у топологічному просторі X називається *функціонально замкненою*, якщо існує така неперервна функція $f\colon X \to [0, 1]$, що $F = f^{-1}(0)$. Доповнення до функціонально замкнених множин — це *функціонально відкриті* множини. Відомо, що система всіх функціонально замкнених (відкритих) множин інваріантна відносно скінченних (зліченних) об'єднань і зліченних (скінченних) перетинів. *Функціональною* F_σ*-множиною* (G_δ*-множиною)* ми називаємо множину, яка подається у вигляді об'єднання (перетину) послідовності функціонально замкнених (відкритих) множин. Зауважимо, що різниця двох функціонально замкнених множин — це функціональна F_σ-множина.

Лема 2. *Нехай* $F_1, \ldots, F_n$ *— попарно неперетинні функціонально замкнені множини в топологічному просторі* X *і* $f_1, \ldots, f_n$ *— дійснозначні неперервні функції на* X. *Тоді існує така неперервна функція* $f\colon X \to \mathbb{R}$, *що* $f(x) = f_i(x)$ *на* F_i *для кожного* $i = 1, \ldots, n$.

Доведення. Для кожного $i = 1, \ldots, n$ існує така неперервна функція $\alpha_i\colon X \to [0,1]$, що $F_i = \alpha_i^{-1}(0)$. Покладемо $\beta_i(x) = \prod_{j \neq i} \alpha_j(x)$ і $\varphi_i(x) = \dfrac{\beta_i(x)}{\alpha_i(x) + \beta_i(x)}$ на X. Тоді функція $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_i$ і буде шуканою.

Теорема 3. *Нехай* X *— топологічний простір і* $f \in \mathbb{R}^X$. *Тоді наступні умови є рівносильними:*

i) $f \in B_1^d(X)$;

ii) *існують послідовності функціонально замкнених множин* F_n *і неперервних функцій* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *такі, що* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = X$ *і* $f|_{F_n} = f_n|_{F_n}$ *для кожного номера* n;

iii) *існують послідовності функціональних* F_σ*-множин* E_n *і неперервних функцій* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *такі, що* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = X$ *і* $f|_{E_n} = f_n|_{E_n}$ *для кожного номера* n.

Доведення. i) $\Rightarrow$ ii). Нехай $f \in B_1^d(X)$, $f_n \in C(X)$ і $f_n \xrightarrow{d} f$. Покладемо

$$F_n = \{x \in X\colon (\forall\, p \in \mathbb{N})(f_{n+p}(x) = f_n(x))\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = X$ і $f|_{F_n} = f_n|_{F_n}$. Крім того, всі множини F_n функціонально замкнені.

ii) $\Rightarrow$ iii). Ця імплікація є очевидною.

iii) $\Rightarrow$ ii). Нехай множини E_n і функції f_n такі, як в iii). Тоді для кожного номера n існує така послідовність функціонально замкнених множин E_{nk}, що $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{nk} = E_n$. Нехай $f_{nk} = f_n$ для довільних номерів n і k. Розглянемо біекцію $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ і покладемо $F_m = E_{\varphi(m)}$ і $g_m = f_{\varphi(m)}$. Тоді $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m = X$, $f|_{F_m} = g_m|_{F_m}$ для кожного m.

ii) $\Rightarrow$ i). Нехай F_n і f_n такі, як в ii). Покладемо $E_n = F_n \setminus \bigcup\limits_{k<n} F_k$ при $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = X$ і $E_n \cap E_m \neq \varnothing$ при $n \neq m$. Кожна з множин E_n — це функціональна F_σ-множина, отже, вона подається у вигляді об'єднання зростаючою послідовності функціонально замкнених множин E_{nk}. Покладемо $A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{k} E_{nk}$. Зрозуміло, що $A_k \subseteq A_{k+1}$ для кожного k і $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = X$. За лемою 2 для кожного k існує неперервна функція $g_k\colon X \to \mathbb{R}$ така, що

$g_k|_{E_{nk}} = f_n|_{E_{nk}}$ для кожного $n = 1, \ldots, k$. Оскільки $E_{nk} \subseteq F_n$, то $f_n|_{E_{nk}} = f|_{E_{nk}}$. Отже, $g_k|_{A_k} = f|_{A_k}$. Але послідовність $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ зростає, тому $g_k \xrightarrow{d} f$. Таким чином, $f \in B_1^d(X)$.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір. Тоді:*

i) $B_1^d(X) \subseteq \sigma C(X)$;

ii) *якщо простір X нормальний, то* $B_1^d(X) = \sigma C(X)$.

Доведення. i). Безпосередньо випливає з імплікації i) $\Rightarrow$ ii) теореми 3.

ii). Нехай $f \in \sigma C(X)$. Тоді існує зростаюча послідовність замкнених в X множин F_n така, що функції $g_n = f|_{F_n}$ є неперервними. За теоремою Тітце – Урисона [7, с. 116] для кожного n існує неперервна функція $f_n : X \to \mathbb{R}$ така, що $f_n|_{F_n} = g_n$. Тоді $f_n \xrightarrow{d} f$, отже, $f \in B_1^d(X)$.

Теорему 4 доведено.

Множина $A \subseteq \mathbb{R}^X$ називається *неперервною алгеброю*, якщо для довільної неперервної функції $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функція $\varphi(f_1, \ldots, f_n) \in A$, як тільки $f_1, \ldots, f_n \in A$. Для функцій $h\colon X \to \mathbb{R}$ покладемо $\|h\| = \sup\limits_{x \in X} |h(x)|$.

Теорема 5. *Нехай X — топологічний простір, $A \subseteq \mathbb{R}^X$ — неперервна алгебра, $f \in \overline{A}^s$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує функція $g \in \overline{A}^d$ така, що $\|f - g\| \leq \varepsilon$.*

Доведення. Розглянемо множину $\Phi \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, яка складається з усіх фундаментальних послідовностей. Зрозуміло, що Φ є об'єднанням замкнених множин $F_m = \left\{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\forall\, i,\, j \geq m)\left(\left|y_i - y_j\right| \leq \varepsilon\right)\right\}$. Покладемо $E_1 = E_{1nk} = F_1$ і $E_m = F_m \setminus F_{m-1}$, $E_{mnk} = \left\{y \in F_m : \left(\left|y_{m-1} - y_{m+n}\right| \geq \varepsilon + \frac{1}{k}\right)\right\}$ при $m \geq 2$, $n \geq 0$, $k \geq 1$. Зрозуміло, що множини E_{mnk} замкнені і $E_m = \bigcup\limits_{n,k} E_{mnk}$. Нехай $\pi_l\colon \Phi \ni (y_1, y_2, \ldots) \mapsto (y_1, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l$. Тоді множини $\pi_l(E_{mnk})$ і $\pi_l\left(F_{m'}\right)$ замкнені і неперетинні при $l \geq m + n$ і $m > m'$. Покладемо $E_{ml} = \bigcup\limits_{n,k \leq l} E_{mnk}$ і $\Phi_l = \bigcup\limits_{m \leq l} E_{ml}$.

Зрозуміло, що множини E_{ml} і Φ_l зростають при зростанні l і $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \Phi_l = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m = \Phi$. Далі, оскільки для кожного l множини $\pi_{2l}(E_{ml})$ замкнені і неперетинні при $m \leq l$, то існує неперервна функція $\varphi_l\colon \mathbb{R}^{2l} \to \mathbb{R}$ така, що $\varphi_l(y_1, \ldots, y_{2l}) = y_m$ при $(y_1, \ldots, y_{2l}) \in \pi_{2l}(E_{ml})$. Розглянемо функцію $g'\colon \Phi \to \mathbb{R}$ таку, що $g'(y) = y_m$ при $y \in E_m$. Тоді функції $g_l' = \varphi_l \circ \pi_{2l}$ стабільно збігаються до g', адже $g_l'\big|_{\Phi_l} = g'\big|_{\Phi_l}$.

Розглянемо тепер послідовність функцій $f_n \in A$ таку, що $f_n(x) \to f(x)$ на X, і покладемо $h(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$. Зрозуміло, що $h : X \to \Phi$. Тоді функції $g_l = g_l' \circ h = \varphi_l(f_1, \ldots, f_{2l})$ належать до A і стабільно збігаються до функції $g = g' \circ h$. Отже, $g \in \overline{A}^d$. Крім того, оскільки для $y \in E_m$ виконується нерівність $|y_m - y_i| \leq \varepsilon$ при $i \geq m$, то $\left|y_m - \lim\limits_{i \to \infty} y_i\right| \leq \varepsilon$. Тому $\|f - g\| \leq \varepsilon$, адже $g(x) = f_m(x)$ при $x \in h^{-1}(E_m)$.

Теорему 5 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $f \in B_1(X)$ *і* $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел. Тоді існує така послідовність функцій* $u_n \in B_1^d(X)$, *що* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *на* X, *причому* $\|u_n\| \le \varepsilon_n$ *для кожного* $n > 1$.

Доведення. Візьмемо спадну послідовність додатних чисел $\delta_n \le \varepsilon_n$ таку, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ збігається. За теоремою 5 для кожного n існує така функція $f_n \in B_1^d(X)$, що $\|f - f_n\| \le \delta_{n+1}/2$. Покладемо $u_1 = f_1$ і $u_n = f_n - f_{n-1}$ при $n > 1$. Тоді $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на X і

$$\|u_n\| \le \|f_n - f\| + \|f - f_{n-1}\| \le \frac{\delta_{n+1} + \delta_n}{2} \le \delta_n \le \varepsilon_n$$

для всіх $n > 1$. Зауважимо, що при цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на X.

***Наслідок* 2.** *Нехай* X *— топологічний простір,* $f \in B_1(X)$ *і* $\varepsilon > 0$. *Тоді існує функція* $g \in B_1^d(X)$ *така, що* $\|f - g\| \le \varepsilon$.

3. Належність інтегралів, залежних від параметра, до стабільних берівських класів. Під *мірою* на множині X будемо розуміти невід'ємну σ-адитивну функцію $\mu\colon \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty]$, визначену на деякій σ-алгебрі $\mathcal{A}_\mu$ підмножин множини X і таку, що $\mu(\varnothing) = 0$. Міра $\mu(X)$ називається *скінченною*, якщо $\mu(X) < +\infty$. Міра μ на топологічному просторі X називається *борелівською*, якщо $\mathcal{A}_\mu \supseteq \mathcal{B}(X)$, де $\mathcal{B}(X)$ — σ-алгебра борелівських множин в X. *Носій* $\operatorname{supp}\mu$ борелівської міри μ на X — це множина, що складається з усіх точок x із X таких, що $\mu(U) > 0$ для кожного відкритого околу U точки x в X.

Нехай P — деяка властивість відображень. Символом $P(X, Y)$ позначимо сукупність всіх відображень $f\colon X \to Y$, що мають властивість P. Якщо $Y = \mathbb{R}$, то замість $P(X, \mathbb{R})$ будемо писати $P(X)$. Через $\overline{P}^s$ (відповідно $\overline{P}^d$) позначимо властивість відображення бути поточковою (стабільною) границею послідовності відображень з властивістю P. Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Нехай P і Q — деякі властивості відображень. Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ розглянемо множини $X_Q(f) = \{x \in X\colon f^x \in Q(Y, Z)\}$ і $Y_P(f) = \{y \in Y\colon f_y \in P(X, Z)\}$. Символом $PQ(X \times Y, Z)$ ми позначаємо сукупність усіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$, для яких $Y_P(f) = Y$ і $X_Q(f) = X$. Якщо Y — топологічний простір, то

$$P\overline{Q}(X \times Y, Z) = \left\{f \in Z^{X \times Y}\colon Y_P(f) = Y \quad \text{і} \quad \overline{X_Q(f)} = X\right\}.$$

Подібним чином вводиться і клас $\overline{P}Q(X \times Y, Z)$.

Символом L_1 позначимо властивість інтегровності функції на всьому просторі відносно фіксованої міри μ. Зміст властивостей C, B_α, B_α^d тощо випливає із викладеного в п. 2. Функції класу $CC(X \times Y, Z)$ називаються *нарізно неперервними*.

Нехай (X, μ) — простір з мірою, Y — множина і $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — функція, для якої $f_y \in L_1(X)$ для кожного $y \in Y$. Співставимо функції f функцію $g = If\colon Y \to \mathbb{R}$, яка на Y задається формулою

$$g(y) = (If)(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x).$$

Ця функція називається *інтегралом, залежним від параметра,* породженим функцією f.

Теорема 6. *Нехай* (X, μ) — *простір зі скінченною мірою,* Y — *топологічний простір,* $f \in L_1 C(X \times Y)$ *і* $g = If$. *Тоді:*

i) $g \in sB_1(Y)$;

ii) *якщо для кожного* $y \in Y$ *функція* $f_y\colon X \to \mathbb{R}$ *обмежена, то* $g \in$ $\in sB_1^d(Y)$.

Доведення. Розглянемо природну ретракцію $r_n\colon \mathbb{R} \to [-n, n]$, для якої $r_n(x) = x$ при $|x| \le n$ і $r_n(x) = n \operatorname{sgn} x$ при $|x| > n$, і покладемо $f_n = r_n \circ f$ і $g_n = If_n$. Оскільки для $y \in Y$ функції $f_y\colon X \to \mathbb{R}$ інтегровні, $f_n(x, y) \to f(x, y)$ і $|f_n(x, y)| \le f_y(x)$ для кожного $x \in X$, то за теоремою Лебега про мажорантну збіжність $g_n(y) \to g(y)$ на Y. Крім того, функції f_n обмежені і неперервні відносно другої змінної, а міра μ є скінченною. Тому з цієї ж теореми Лебега випливає, що функції g_n секвенціально неперервні. Отже, $g \in sB_1(Y)$. Якщо функція f_y обмежена, то існує такий номер N, що $|f_y(x)| \le N$ на X. Тоді $f_n(x, y) = f_N(x, y) = f_y(x)$ для всіх $x \in X$ і $n \ge N$. Тому $g_n(y) = g_N(y) = g(y)$ при $n \ge N$, отже, у випадку ii) послідовність функцій g_n стабільно збігається до функції g, а отже, $g \in sB_1^d(Y)$.

Топологічний простір називатимемо *функціонально секвенціальним,* якщо кожна секвенціально неперервна дійснозначна функція на ньому є неперервною. Зрозуміло, що секвенціальні простори чи, тим більше, простори Фреше – Урисона, зокрема простори з першою аксіомою зліченності, будуть функціонально секвенціальними.

Наслідок 2. *Якщо простір* Y *у теоремі* 6 *функціонально секвенціальний, то* $g \in B_1(Y)$ *чи, відповідно,* $g \in B_1^d(Y)$.

Нагадаємо, що підмножина B топологічного простору X називається *обмеженою в* X, якщо кожна неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ є обмеженою на B. Топологічний простір X називатимемо *b-простором,* якщо для кожної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ з неперервності звужень $f|_B$ на всі обмежені множини B в X випливає неперервність f. Легко перевірити, що функціонально секвенціальні простори, k-простори і локально псевдокомпактні простори є b-просторами. Крім того, образ b-простору при факторному чи $\mathbb{R}$-факторному [8, с. 21] відображенні залишається b-простором.

Наступний результат доповнює наслідок 2.

Теорема 7. *Нехай* X — *зліченно компактний простір зі скінченною борелівською мірою* μ, Y — *b-простір і* $f \in CC(X \times Y)$. *Тоді* $g = If \in B_1^d(Y)$.

Доведення. Оскільки для кожного $y \in Y$ функція $f_y\colon X \to \mathbb{R}$ є неперервною і обмеженою, то g визначена на всьому просторі Y. Розглянемо асоційоване з f горизонтальне розшарування $\psi\colon Y \to C_p(X)$, яке діє за правилом $\psi(y) = f_y$. Нехай $\tilde{Y} = \psi(Y)$. Функція обчислення $\tilde{f}\colon X \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x, \tilde{y}) =$ $= \tilde{y}(x)$, є нарізно неперервною, причому $f(x, y) = \tilde{f}(x, \tilde{y})$, якщо $\tilde{y} = \psi(y)$. З теореми 6 випливає, що $\tilde{g} = I\tilde{f} \in sB_1^d(\tilde{Y})$, тобто існує послідовність секвенціально неперервних функцій $\tilde{g}_n\colon \tilde{Y} \to \mathbb{R}$, яка стабільно збігається до $\tilde{g}$ на $\tilde{Y}$. Покладемо $g_n = \tilde{g}_n \circ \psi$. Оскільки $\tilde{g} \circ \psi = g$, то $g_n \xrightarrow{d} g$. Доведемо, що функції $g_n\colon Y \to \mathbb{R}$ є неперервними. Нехай B — обмежена множина в Y і $\tilde{B} = \psi(B)$. Оскільки відображення ψ неперервне, то множина $\tilde{B}$ є обмеженою в $C_p(X)$. За теоремою Ґротендіка – Асанова – Величка [8, с. 119] замикання K множини

$\tilde{B}$ у просторі $C_p(X)$ буде компактом Еберлейна. З теореми Прейсса – Симона [8, с. 170] випливає, що K, а отже, і $\tilde{B}$, є простором Фреше – Урисона, а тому і функціонально секвенціальним простором. Отже, всі звуження $\tilde{g}_n|_{\tilde{B}}$ неперервні, адже вони секвенціально неперервні. Оскільки $g_n|_B = \tilde{g}_n|_{\tilde{B}} \circ \psi$, то і звуження $g_n|_B$ є неперервними. Але Y — b-простір, отже, і g_n неперервні. Таким чином, $g \in B_1^d(Y)$.

Теорему 7 доведено.

Використавши згаданий у вступі результат [3] (твердження 5D), подібно до теореми 6 легко отримуємо наступну теорему.

Теорема 8. *Нехай* (X, μ) — *простір зі скінченною мірою,* Y — *повнометризовний простір,* $f \in L_1B_1(X \times Y)$ *і* $g = If$. *Тоді:*

i) $g \in B_2(Y)$;

ii) *якщо для кожного* $y \in Y$ *функція* f_y *є обмеженою, то* $g \in B_2^d(Y)$.

4. Берівська класифікація інтегралів, залежних від параметра. При доведенні наступного результату скористаємося конструкцією В. Рудіна [9]. Символом $\operatorname{supp}\varphi$ позначимо носій функцій $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, тобто множину всіх тих $x \in X$, для яких $\varphi(x) \neq 0$.

Теорема 9. *Нехай* X — *метризовний компакт зі скінченною борелівською мірою* μ, Y — *довільний топологічний простір,* $f \in C\overline{B}_\alpha(X \times Y)$. *Тоді* $g = If \in$ $\in B_{\alpha+1}(Y)$.

Доведення. Зафіксуємо метрику ρ, яка індукує топологію простору X. Для кожного номера n існує скінченне розбиття одиниці $(\varphi_{ns}\colon s \in S_n)$, яке підпорядковане покриттю простору X відкритими кулями радіуса $1/2n$ і складається із ненульових функцій. Множина $A = X_{B_\alpha}(f)$ скрізь щільна в X. Тому для кожної пари $(n, s) \in \mathbb{N} \times S_n$ існує точка $x_{ns} \in A \bigcap \operatorname{supp}\varphi_{ns}$. Покладемо

$$f_n(x, y) = \sum_{s \in S_n} \varphi_{ns}(x) f(x_{ns}, y)$$

для $(x, y) \in X \times Y$. Нехай $g_n = If_n$. Оскільки

$$g_n(y) = \int_X f_n(x, y)\, d\mu(x) = \sum_{s \in S_n} f(x_{ns}, y) \int_X \varphi_{ns}(x)\, d\mu x$$

на Y, $f^{x_{ns}} \in B_\alpha(Y)$ для будь-яких $(n, s) \in \mathbb{N} \times S_n$ і множини S_n є скінченними, то $g_n \in B_\alpha(Y)$.

Доведемо, що для кожного $y \in Y$ послідовність функцій $f_n(x, y)$ рівномірно прямує до $f(x, y)$ на X. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки функція $f_y\colon X \to \mathbb{R}$ рівномірно неперервна на метричному компакті (X, ρ), то існує таке $\delta > 0$, що для будь-яких $x', x'' \in X$ з нерівності $\rho(x', x'') < \delta$ випливає $|f(x', y) -$ $- f(x'', y)| < \varepsilon$. Виберемо такий номер N, що $\frac{1}{N} \le \delta$. Нехай $n \ge N$ і $x \in X$. Покладемо $S_n(x) = \{s \in S_n\colon \varphi_{ns}(x) > 0\}$. Тоді

$$|f_n(x, y) - f(x, y)| = \left| \sum_{s \in S_n} \varphi_{ns}(x) \big(f(x_{ns}, y) - f(x, y) \big) \right| \le$$

$$\le \sum_{s \in S_n(x)} \varphi_{ns}(x) \left| \big(f(x_{ns}, y) - f(x, y) \big) \right| < \varepsilon \sum_{s \in S_n(x)} \varphi_{ns}(x) = \varepsilon,$$

адже $x_{ns}, x \in \operatorname{supp}\varphi_{n,s}$ для $s \in S_n(x)$, внаслідок чого $\rho(x_{ns}, x) < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$.

З доведеного рівномірного прямування безпосередньо випливає, що $g_n(y) \to \to g(y)$ на Y, отже, $g \in B_{\alpha+1}(Y)$.

Теорему 9 доведено.

Таким чином, якщо $f \in CC(X \times Y)$ і X — метризовний компакт, то $g = = If \in B_1(Y)$ для довільного топологічного простору Y. Але для b-простору Y з теореми 7 випливає, що $g \in B_1^d(Y)$. Наступний результат показує, що в загальному випадку таку належність встановити не можна.

Теорема 10. *Нехай* $X = [0,1]$, μ — *міра Лебега на* X, $Y = C_p(X)$ *і* $f\colon X \times \times Y \to \mathbb{R}$ — *функція обчислення. Тоді функція* f *нарізно неперервна, але функція* $g = If$ *не є* σ*-неперервною, зокрема* $g \notin B_1^d(Y)$.

Доведення. Нехай $\|y\| = \max\limits_{0 \le x \le 1} |y(x)|$ для $y \in Y$. Розглянемо одиничну кулю $B = \{y \in Y\colon \|y\| \le 1\}$ і доведемо, що $g|_B$ — розривна функція. Розглянемо базисний окіл нуля $V = \left\{y \in B\colon \max\limits_{i=0,\ldots,n} |y(t_i)| < \varepsilon\right\}$, де $\varepsilon > 0$ і $1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = = 1$. Нехай $s_i = (t_{i-1} + t_i)/2$ і функція $y\colon [0,1] \to [0,1]$ лінійна на кожному з відрізків $[t_{i-1}, s_i]$ і $[s_i, t_i]$, причому $y(t_i) = 0$, $y(s_i) = 1$. Тоді $y \in V$ і $g(y) = = \int_0^1 y(t)\,dt = \dfrac{1}{2}$. Врахувавши, що $g(0) = 0$, отримаємо, що $g|_B$ є розривною в нулі. Використавши лінійність інтеграла, легко перевірити, що і звуження $g|_{B[y,\,r]}$ на кожну кулю $B[y, r] = y + rB$ будуть розривними.

Припустимо, що функція g є σ-неперервною. Тоді існує послідовність замкнених в Y множин F_n така, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = Y$ і всі звуження $g|_{F_n}$ є неперервними. Множини F_n будуть замкненими і в банаховому просторі $(C(Y), \|\cdot\|)$. Тоді за теоремою Бера про категорію існує таке n, що F_n містить деяку кулю $B[y, r]$. У такому разі звуження $g|_{B[y,\,r]}$ є неперервним, що суперечить доведеному вище.

Таким чином, $g \notin \sigma C(Y)$. Отже, $g \notin B_1^d$ за теоремою 4.

5. Обернена задача для стабільних класів. Топологічний простір X називається *функціонально хаусдорфовим*, якщо для довільних двох різних точок x_1 і x_2 з простору X існує неперервна функція $f\colon X \to [0,1]$ така, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Лема 3. *Нехай* X — *функціонально хаусдорфовий простір зі скінченною борелівською мірою* μ, *носій якої нескінченний. Тоді існує послідовність неперервних обмежених функцій* $u_n\colon X \to [0, +\infty)$ *з попарно неперетинними носіями, для якої* $\int_X u_n(x)\,d\mu(x) = 1$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $A = \operatorname{supp}\mu$. Виберемо послідовність різних точок a_k з носія A. Використовуючи функціональну хаусдорфовість простору X, легко побудувати послідовність неперервних функцій $h_n\colon X \to [0,1]$ таку, що для будь-яких різних номерів k і m існує номер n, для якого $h_n(a_k) \neq h_n(a_m)$. Нехай $Y = [0,1]^{\mathbb{N}}$ — гільбертів куб і $h(x) = (h_n(x))_{n=1}^{\infty}$ для $x \in X$. Відображення $h\colon X \to Y$ неперервне і всі точки $b_k = h(a_k)$ різні. Оскільки Y — метризовний компакт, то з послідовності (b_k) можна виділити збіжну до деякої точки $b \in Y$ підпослідовність $\left(b_{k_n}\right)$ таку, що точки $y_n = b_{k_n}$ різні і $y_n \neq b$ для кожного n. Виходячи з того, що $y_n \notin \overline{\{y_k\colon k > n\}}$ для кожного номера n, легко побудувати диз'юнктну послідовність відкритих у Y множин V_n таку, що $y_n \in V_n$ для кожного n. Для кожного n існує така неперервна функція $g_n\colon Y \to [0,1]$, що $g_n(y_n) = 1$ і $\operatorname{supp} g_n \subseteq V_n$. Покладемо $f_n = g_n \circ h$. Зрозуміло, що носії функцій f_n попарно не перетинаються, адже $\operatorname{supp} f_n = h^{-1}(\operatorname{supp} g_n)$. Крім того, $x_n = a_{k_n} \in A \bigcap \operatorname{supp} f_n$, бо $f_n(x_n) = g_n(y_n) = 1$. Функції f_n неперервні і обмежені, тому інтегровні за мірою μ. Розглянемо числа $\lambda_n = \int_X f_n(x)\,d\mu(x)$. Оскільки $f_n(x_n) = 1$, то існує відкритий окіл U_n точки x_n такий, що $f_n(x) \geq 1/2$ на U_n. Тоді

$$\lambda_n \geq \int\limits_{U_n} f_n(x)\,d\mu(x) \geq \frac{1}{2}\mu(U_n) > 0,$$

адже $x_n \in A = \operatorname{supp}\mu$. Поклавши $u_n = \dfrac{1}{\lambda_n} f_n$, одержимо шукану послідовність.

Лему 3 доведено.

Обернена задача для стабільних класів допускає розв'язання в досить загальній ситуації.

Теорема 11. *Нехай X — функціональний хаусдорфовий простір зі скінченною борелівською мірою μ, носій якої нескінченний, Y — множина і P — деяка властивість функцій така, що $P(Y)$ — лінійний підпростір простору $\mathbb{R}^Y$. Тоді для кожної функції $g \in \overline{P(Y)}^d$ існує функція $f \in CP(X \times Y)$ така, що $g = If$.*

Доведення. Нехай $g \in \overline{P(Y)}^d$ і $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність функцій $g_n \in P(X)$ така, що $g_n \xrightarrow{d} g$. Покладемо $\upsilon_1 = g_1$ і $\upsilon_n = g_n - g_{n-1}$ при $n > 1$. Зрозуміло, що $\upsilon_n \in P(Y)$ і $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n(y)$ на Y, причому для кожного $y \in Y$ існує такий номер n_y, що $\upsilon_n(y) = 0$ при $n > n_y$. Виберемо функції u_n такі, як у лемі 3, і покладемо

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\upsilon_n(y)$$

для $(x, y) \in X \times Y$. Покажемо, що $f \in CP(X \times Y)$. Зафіксуємо $x \in X$. Якщо $x \in \operatorname{supp} U_n$ для деякого n, то $f^x = u_n(x)\upsilon_n \in P(Y)$, в протилежному випадку $f^x = 0 \in P(Y)$. Для фіксованого $y \in Y$ матимемо $f_y = \sum_{n=1}^{n_y} \upsilon_n(y) u_n \in C(X)$. Далі, для кожного $y \in Y$ маємо

$$\int\limits_X f(x, y)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{n_y} \upsilon_n(y) \int\limits_X u_n(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{n_y} \upsilon_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n(y) = g(y),$$

отже, $g = If$.

Наслідок 3. *Нехай X — зліченно компактний функціонально хаусдорфовий простір зі скінченною борелівською мірою μ, носій якої нескінченний, і Y — b-простір. Тоді $g \in B_1^d(Y)$ в тому і тільки в тому випадку, коли існує така функція $f \in CC(X \times Y)$, що $g = If$.*

Цей наслідок випливає з теорем 7 і 11. Врахувавши ще теорему 4, одержимо такий наслідок.

Наслідок 4. *Нехай X і Y — компакти, μ — скінченна борелівська міра на X із нескінченним носієм і $g\colon Y \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

i) $g \in B_1^d(Y)$;

ii) $g \in \sigma C(Y)$;

iii) *існує функція* $f \in CC(X \times Y)$ *така, що* $g = If$.

Якщо замість теореми 7 використати теорему 8, то отримаємо такий результат.

Наслідок 5. *Нехай X — компакт зі скінченною борелівською мірою, носій якої нескінченний, Y — повнометризовний простір і $g\colon Y \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Тоді $g \in B_2^d(Y)$ в тому і тільки в тому випадку, коли існує така функція $f \in CB_1(X \times Y)$, що $g = If$.*

6. Обернена задача для функцій першого класу Бера. З результатів п. 5 випливає, що функції стабільного першого класу Бера при певних умовах зображуються у вигляді інтеграла, залежного від параметра, з нарізно неперервною підінтегральною функцією. Як показує приклад функції Рімана, класи $B_1(Y)$ і $B_1^d(Y)$, взагалі кажучи, є різними. Зараз ми з'ясуємо, що і довільні функції першого класу Бера допускають специфічні інтегральні зображення.

Теорема 12. *Нехай X — функціонально хаусдорфовий простір зі скінченною борелівською мірою μ, носій якої нескінченний, Y — топологічний простір, A — така властивість відображень, що $A(X)$ є неперервною алгеброю, і $g \in \overline{A}^s(Y)$. Тоді існує функція $f \in C\overline{A}^d(X \times Y)$ така, що $g = If$.*

Доведення. За лемою 3 існує послідовність неперервних і обмежених функцій $u_n\colon X \to [0, +\infty)$ така, що їх носії $U_n = \operatorname{supp} u_n$ попарно не перетинаються і $\int_X u_n(x)\,d\mu(x) = 1$. Нехай $\gamma_n = \|u_n\|$. Згідно з наслідком 1 існує така послідовність функцій $v_n \in \overline{A}^d(Y)$, що $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)$ на Y і $\|v_n\| \le \dfrac{1}{2^n \gamma_n}$ при $n > 1$. Для кожної пари $(x, y) \in X \times Y$ покладемо

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(y)$$

і доведемо, що функція f — шукана. Оскільки при $n > 1$ маємо $|u_n(x) v_n(y)| \le \le \|u_n\| \|v_n\| \le 2^{-n}$ для всіх $(x, y) \in X \times Y$, то цей ряд збігається рівномірно на $X \times Y$, звідки випливає, що f визначена на $X \times Y$ і неперервна відносно першої змінної. Для фіксованого $x \in X$ маємо $f^x = u_n(x) v_n$, якщо $x \in U_n$ для деякого n, і $f^x = 0$ — в протилежному випадку. Тому $f^x \in \overline{A}^d(Y)$ для кожного $x \in X$. Таким чином, $f \in C\overline{A}^d(X \times Y)$. Далі, з рівномірної збіжності даного ряду на X при будь-якому фіксованому $y \in Y$ випливає, що

$$\int_X f(x, y)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n(x) v_n(y)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) = g(y)$$

для довільного $y \in Y$, отже, $g = If$.

Теорему 12 доведено.

Наслідок 6. *Нехай X — функціонально хаусдорфовий простір зі скінченною борелівською мірою μ, носій якої нескінченний, Y — топологічний простір і $g \in B_1(Y)$. Тоді існує функція $f \in CB_1^d(X \times Y)$ така, що $g = If$.*

Теорема 13. *Нехай $X = [0, 1)$, Y — топологічний простір і $g \in B_1(Y)$. Тоді існує функція $f \in C(X \times Y)$ така, що $g(y) = \int_0^1 f(x, y)\,dx$ на Y, де символ $\int_0^1$ означає невласний інтеграл Рімана на проміжку $[0, 1)$.*

Доведення. Візьмемо строго зростаючу послідовність чисел $x_n \in [0,1)$ таку, що $x_1 = 0$ і $x_n \to 1$. Для кожного номера n побудуємо неперервну функцію $u_n \colon X \to [0,+\infty)$ таку, що $\operatorname{supp} u_n \subseteq [x_n, x_{n+1}]$ і $\int_0^1 u_n(x)\,dx = 1$. Нехай $v_n \colon Y \to \mathbb{R}$ — такі неперервні функції, що $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)$ на Y. Для $(x, y) \in X \times Y$ покладемо

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(y).$$

Оскільки послідовність замкнених множин $F_n = [x_n, x_{n+1}] \times Y$ локально скінченна в $X \times Y$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X \times Y$ і всі звуження $f|_{F_n}$ неперервні, адже $f(x,y) = u_n(x)v_n(y)$ на F_n, то функція f є неперервною.

Доведемо, що $\int_0^1 f(x,y) = g(y)$ на Y. Нехай $\xi \in [0,1)$. Тоді існує номер $n = n_\xi$ такий, що $x_n \le \xi < x_{n+1}$. У такому разі

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} f(x,y)\,dx = \int_0^{\xi} \left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k(x) v_k(y) \right) dx = \sum_{k=1}^{n} v_k(y) + v_{n+1}(y) \int_{x_n}^{\xi} u_{n+1}(x)\,dx.$$

Оскільки $0 \le \int_{x_n}^{\xi} u_{n+1}(x)\,dx \le 1$, то число $\Phi(\xi)$ лежить між сумами $\sum_{k=1}^{n} v_k(y)$ і $\sum_{k=1}^{n+1} v_k(y)$. Але $n_\xi \to +\infty$ при $\xi \to 1-0$ і $g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y)$. Тому $\Phi(\xi) \to g(y)$ при $\xi \to 1-0$. Отже,

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \lim_{\xi \to 1-0} \Phi(\xi) = g(y)$$

для кожного $y \in Y$.

Теорема 14. *Нехай X_1 і X_2 — функціонально хаусдорфові простори зі скінченними борелівськими мірами μ_1 і μ_2 відповідно, носії яких нескінченні, Y — топологічний простір і $g \in B_1(Y)$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f \colon X_1 \times X_2 \times Y \to \mathbb{R}$ така, що*

$$g(y) = If(y) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2, y)\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$

на Y.

Доведення. Для кожного $i = 1, 2$ побудуємо послідовність неперервних обмежених функцій $u_n^i \colon X_i \to [0,+\infty)$ таку, що носії $U_n^i = \operatorname{supp} u_n^i$ попарно не перетинаються і $\int_{X_i} u_n^i(x_i)\,d\mu_i(x_i) = 1$. Для довільних номерів m і n і точки $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$ покладемо $u_{nm}(x) = u_n^1(x_1) u_n^2(x_2)$ і $U_{nm}(x) = U_n^1 \times U_n^2$. Нехай $\gamma_n = \| u_n^1 \|$ і $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n \gamma_n}$. За наслідком 1 існує така послідовність неперервних функцій $v_n \in B_1^d(Y)$, що $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)$ на Y і $\| v_n \| \le \varepsilon_n$ при $n > 1$.

Зауважимо, що для кожної функції $h \in B_1^d(Y)$ існує така послідовність неперервних функцій $w_m \colon Y \to \mathbb{R}$ на $h(y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y)$ на Y, $\| w_m \| \le 2\| h \|$ і для кожного y існує такий номер m_y, що $w_m(y)=0$ при $m>m_y$. Справді, візьмемо довільну послідовність неперервних функцій $h_m\colon Y\to\mathbb{R}$, яка стабільно збігається до h на Y. Введемо функції $\tilde{h}_m\colon Y\to\mathbb{R}$, покладаючи для $y\in Y$

$$\tilde{h}_m(y) = \begin{cases} h_m(y) & \text{при} \quad |h_m(y)|\le\|h\|, \\ \|h\|\operatorname{sgn} h_m(y) & \text{при} \quad |h_m(y)|>\|h\|. \end{cases}$$

Легко перевірити, що $\tilde{h}_m$ неперервні, $\|\tilde{h}_m\|\le\|h_m\|$ і $\tilde{h}_m\xrightarrow{d}h$. Покладаючи $w_1=\tilde{h}_1$ і $w_m=\tilde{h}_m-\tilde{h}_{m-1}$ при $m>1$, одержуємо шукану послідовність.

Побудуємо тепер для кожної функції υ_n таку послідовність неперервних функцій $\upsilon_{nm}\colon Y\to\mathbb{R}$, що для кожного $y\in Y$ послідовність $(\upsilon_{nm}(y))_{m=1}^{\infty}$ є фінітною, $\upsilon_n(y)=\sum_{m=1}^{\infty}\upsilon_{nm}(y)$ на Y і $\|\upsilon_{nm}\|\le 2\|\upsilon_n\|$ для кожного m. Для будь-яких $x=(x_1,x_2)\in X$ і $y\in Y$ покладемо

$$f(x_1,x_2,y) = f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}u_{nm}(x)\upsilon_{nm}(y)$$

і покажемо, що функція f є шуканою.

Якщо $x\in U_{nm}$ для деякої пари (n,m), то $f(x,y)=u_{nm}(x)\upsilon_{nm}(y)$ для довільного $y\in Y$, якщо ж це не так, то $f(x,y)=0$ для кожного $y\in Y$. Це свідчить про те, що функція f визначена на $X\times Y$ і неперервна відносно останньої змінної.

Зафіксуємо деякі $x_1\in X_1$ і $y\in Y$. Якщо x_1 не входить у жоден із носіїв U_n^1, то $f(x_1,x_2,y)=0$ для всіх $x_2\in X_2$. Нехай $x_1\in U_n^1$ для деякого n. Виберемо такий номер $m(y,n)$, що $\upsilon_{nm}(y)=0$ при $m>m(y,n)$. Тоді

$$f(x_1,x_2,y) = \sum_{m=1}^{m(y,n)}u_{nm}(x_1,x_2)\upsilon_{nm}(y)$$

для кожного $x_2\in X_2$. Ми бачимо, що f неперервна відносно другої змінної.

Нарешті зафіксуємо $x_2\in X_2$ і $y\in Y$. Знайдемо такий номер m, що $u_k^2(x_2)=0$ при $k\ne m$. Тоді

$$f(x_1,x_2,y) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n^1(x_1)u_m^2(x_2)\upsilon_{nm}(y)$$

для всіх $x_1\in X_1$. Оскільки

$$\left|u_n^1(x_1)u_m^2(x_2)\upsilon_{nm}(y)\right| \le \gamma_n u_m^2(x_2)\|\upsilon_{nm}\| \le \frac{u_m^2(x_2)}{2^{n-1}}$$

при $n>1$ на X_1, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^1(x_1)u_m^2(x_2)\upsilon_{nm}(y)$ збігається рівномірно на X_1. Але функції u_n^1 неперервні, тому і f неперервна відносно першої змінної.

Залишилось перевірити, що $g=If$. Нехай $y\in Y$ і $\upsilon_{nm}(y)=0$ при $m>m(y,n)$. Для даного $x_1\in X_1$ виберемо такий номер n, що $u_k^1(x_1)=0$ при $k\ne n$. Тоді

$$f(x_1, x_2, y) = \sum_{m=1}^{m(y,n)} u_n^1(x_1) u_m^2(x_2) v_{nm}(y),$$

отже,

$$\int_{X_2} f(x_1, x_2, y)\, d\mu_2(x_2) = \sum_{m=1}^{m(y,n)} u_n^1(x_1) v_{nm}(y) \int_{X_2} u_m^2(x_2)\, d\mu_2(x_2) =$$

$$= \sum_{m=1}^{m(y,n)} u_n^1(x_1) v_{nm}(y) = u_n^1(x_1) \sum_{m=1}^{m(y,n)} v_{nm}(y) = u_n^1(x_1) v_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^1(x_1) v_k(y).$$

Але $\left| u_k^1(x_1) v_k(y) \right| \le \left\| u_k^1 \right\| \| v_k \| \le \gamma_k \frac{1}{2^k \gamma_k} = \frac{1}{2^k}$ на X_1. Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^1(x_1) v_k(y)$ збігається рівномірно на X_1, отже, його можна почленно проінтегрувати. В такому разі

$$If(y) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2, y)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) =$$

$$= \int_{X_1} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^1(x_1) v_k(y)\, d\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) = g(y).$$

Отже, $g = If$.

1. *Маслюченко В. К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.
2. *Maslyuchenko V.* Connection between separate and joint properties of several variables function // Proc. Int. Conf. Func. Anal. and Appl. dedicated to the 110 anniversary of S. Banach. – Lviv, 2002. – P. 135.
3. *Bourgain J., Fremlin D. H., Talagrand M.* Pointwise compact sets of Baire measurable functions // Amer. J. Math. – 1978. – **100**, № 4. – P. 845 – 888.
4. *Винокуров В. А.* Строгая регуляризуемость разрывных функций // Докл. АН СССР. – 1985. – **281**, № 2. – С. 265 – 269.
5. *Архангельский А. В., Бокало Б. М.* Касание топологий и тангенциальные свойства топо - логических пространств // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1992. – **54**. – С. 160 – 165.
6. *Бокало Б. М., Маланюк О. П.* Про майже неперервні відображення // Мат. студії. – 1998. – **9**, № 1. – С. 90 – 93.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 725 с.
8. *Архангельский А. В.* Топологические пространства функций. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 222 с.
9. *Rudin W.* Lebesgue's First Theorem // Math. Anal. and Appl. Pt B. Adv. Math. Supl. Stud. – 1981. – P. 741 – 747.

Одержано 17.02.2004