УДК 517.9

Є. В. Массалітіна (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

# ПРО ІНТЕГРО-СУМАРНУ НЕРІВНІСТЬ ПЕРОВА ДЛЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

We present a generalization of the Perov integral inequality for functions of two variables in the case of discontinuity functions.

Наведено узагальнення інтегральної нерівності Перова для функцій двох змінних на випадок розривних функцій.

Вивчення властивостей розв'язків імпульсних систем [1 – 3] обумовило необхідність знаходження оцінок для функцій, які задовольняють рівняння гіперболічного типу та отримують імпульсне збурення на заданих кривих. Результати, які викладені у даній статті, продовжують та узагальнюють дослідження, розпочаті в роботах [4, 5].

**Нелінійні інтегро-сумарні нерівності для функцій двох змінних.**

**Теорема 1.** *Нехай в області* $D^* \subset R^2$, $D^* = D \cup \Gamma$, *виконуються наступні умови:*

1) *невід'ємна функція* $u(x, y)$ *є неперервною в області* $D$;

2) $\Gamma = \bigcup \Gamma_j$, $\Gamma_j = \{(x, y)\colon \varphi_j(x, y) = 0,\ j = 1, 2, \ldots\}$ — *сукупність кривих, на яких функція* $u(x, y)$ *має скінченний стрибок,* $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$, $i \neq j$;

3) *криві* $\varphi_j(x, y) = 0$ *є неперервно диференційовними та монотонно спадними,* $\operatorname{grad} \varphi_j(x, y) > 0$;

4) *область* $D = \bigcup D_j$, $j = 1, \ldots,$ $D_1 = \{(x, y)\colon x \geq 0, y \geq 0, \varphi_1(x, y) < 0\}$, $D_j = \{(x, y)\colon x \geq 0, y \geq 0, \varphi_{j-1}(x, y) > 0, \varphi_j(x, y) < 0, j = 2, \ldots\}$;

5) $\mu_{\varphi_j}$ — *міра Лебега – Стільтьєса* [6], *яка зосереджена на* $\Gamma_j$;

6) $G_j = \{(\tau, s)\colon x_0 \leq \tau \leq x, y_0 \leq s \leq y, (x, y) \in D_j \cup \Gamma_{j-1}, (x_0, y_0) \in D_1, j = 1, 2, \ldots\}$;

7) *функції* $\beta_j(x, y)$, $f(x, y)$, $k(x, y)$ — *неперервні та невід'ємні.*

*Крім того, нехай функція* $u(x, y)$ *задовольняє в області* $D^*$ *інтегро-сумарну нерівність*

$$u(x, y) \leq C + \iint\limits_{G_n} \big(f(\tau, s) u(\tau, s) + k(\tau, s) u^{\alpha}(\tau, s)\big) d\tau ds + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) u(P) d\mu_{\varphi_j}, \quad (1)$$

*де* $C > 0$, $P(\xi, \eta)$ — *змінна точка кривої* $\Gamma_j$.

*Тоді справджуються оцінки:*

*при* $0 \leq \alpha < 1$

$$u(x, y) \leq \left( C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \iint\limits_{G_n} k(\tau, s) F_n^{\alpha-1}(x, s) \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right)^{\alpha} d\tau ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \times$$

$$\times F_n(x, y) \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right), \quad (2)$$

*де*

$$F_n(x,y) = \exp\left(\iint\limits_{G_n} f(\tau,s)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j\cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)d\tau ds\right);$$

*при* $\alpha = 1$

$$u(x,y) \le C\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j\cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)\Phi_n(x,y), \tag{3}$$

*де*

$$\Phi_n(x,y) = \exp\left(\iint\limits_{G_n}(f(\tau,s)+k(\tau,s))\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j\cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)d\tau ds\right);$$

*при* $\alpha > 1$ *оцінка* (2) *буде справедливою в області*

$$D_{\alpha_n} = \left\{(x,y)\in D_n : \iint\limits_{G_n} k(\tau,s)F_n^{\alpha-1}(x,s)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j\cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)^{\alpha} d\tau ds < C^{1-\alpha}(\alpha-1)^{-1}\right\}.$$

***Доведення*** проведемо, використовуючи метод математичної індукції для випадку $0 \le \alpha < 1$ (при $\alpha > 1$ та $\alpha = 1$ схема доведення не зміниться). Нехай $(x,y)\in D_1$. Нерівність (1) в області $D_1$ є інтегральною нерівністю і набирає вигляду

$$u(x,y) \le C + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(f(\tau,s)u(\tau,s)+k(\tau,s)u^{\alpha}(\tau,s))\,d\tau ds = L_u(x,y). \tag{4}$$

За наслідком 1 теореми 1 [4] для нерівності (4) при $0 \le \alpha < 1$ справедливою є оцінка

$$u(x,y) \le F_1(x,y)\left\{C^{1-\alpha}+(1-\alpha)\iint\limits_{G_1} k(\tau,s)F_1^{\alpha-1}(x,s)d\tau ds\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{5}$$

де

$$F_1(x,y) = \exp\left(\iint\limits_{G_1} f(\tau,s)d\tau ds\right).$$

Розглянемо область $D_2$. Для $(x,y)\in D_2$

$$u(x,y) \le L_u(x,y) + \int\limits_{\Gamma_1\cap G_2}\beta_1(P)u(P)d\mu_{\varphi_1} = L_{1u}(x,y). \tag{6}$$

Оскільки

$$\frac{\partial L_u(x,y)}{\partial x} \ge 0, \qquad \frac{\partial L_u(x,y)}{\partial y} \ge 0,$$

то функція $L_u(x,y)$ є неспадною по кожній змінній. Враховуючи це та нерівність (4), маємо

$$u(P) \le L_u(P) = L_u(\xi,\eta) \le L_u(x,y) \qquad \forall P(\xi,\eta)\in\Gamma_1. \tag{7}$$

З нерівностей (6) та (7) випливає

$$L_{1u}(x, y) \leq l_1(x, y) L_u(x, y),$$

де

$$l_1(x, y) = 1 + \int\limits_{\Gamma_1 \cap G_2} \beta_1(P) d\mu_{\varphi_1}.$$

Тоді нерівність (6) набере вигляду $u(x, y) \leq l_1(x, y) L_u(x, y)$. Звідси

$$u(x, y) \leq l_1(x, y)\left( C + \iint\limits_{G_2} (f(\tau, s) u(\tau, s) + k(\tau, s) u^{\alpha}(\tau, s)) d\tau ds \right),$$

$$\frac{u(x, y)}{l_1(x, y)} \leq \left( C + \iint\limits_{G_2} \left( f_1(\tau, s) \frac{u(\tau, s)}{l_1(\tau, s)} + k_1(\tau, s) \frac{u^{\alpha}(\tau, s)}{l_1^{\alpha}(\tau, s)} \right) d\tau ds \right), \tag{8}$$

де

$$f_1(\tau, s) = f(\tau, s) l_1(\tau, s), \quad k_1(\tau, s) = k(\tau, s) l_1^{\alpha}(\tau, s).$$

Застосовуючи до нерівності (8) наслідок 1 теореми 1 [4], отримуємо

$$u(x, y) \leq l_1(x, y) F_2(x, y) \left\{ C^{1-\alpha} + (1 - \alpha) \iint\limits_{G_2} k_1(\tau, s) F_2^{\alpha - 1}(x, s) d\tau ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{9}$$

де

$$F_2(x, y) = \exp\left( \iint\limits_{G_2} f_1(\tau, s) d\tau ds \right).$$

У нескороченому запису нерівність (9) має вигляд

$$u(x, y) \leq \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_1 \cap G_2} \beta_1(P) d\mu_{\varphi_1} \right) F_2(x, y) \times$$

$$\times \left( C^{1-\alpha} + (1 - \alpha) \iint\limits_{G_2} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_1 \cap G_2} \beta_1(P) d\mu_{\varphi_1} \right)^{\alpha} k(\tau, s) F_2^{\alpha - 1}(x, s) d\tau ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де

$$F_2(x, y) = \exp\left( \iint\limits_{G_2} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_1 \cap G_2} \beta_1(P) d\mu_{\varphi_1} \right) f(\tau, s) d\tau ds \right).$$

Припустимо, що нерівність (3) виконується для $(x, y) \in D_k$. Доведемо, що вона виконується і для $(x, y) \in D_{k+1}$, тобто

$$u(x, y) \leq L_u(x, y) + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_j \cap G_{k+1}} \beta_j(P) u(P) d\mu_{\varphi_j} \leq$$

$$\leq L_{k-1\,u}(x, y) + \int\limits_{\Gamma_k \cap G_{k+1}} \beta_k(P) u(P) d\mu_{\varphi_k} = L_{ku}(x, y). \tag{10}$$

Оскільки функція $L_{k-1\,u}(x, y)$ — неспадна, то для будь-якої точки $P(\xi, \eta) \in \Gamma_k$ виконується нерівність

$$u(P) \le L_{k-1\,u}(P) \le L_{k-1\,u}(x, y). \tag{11}$$

З урахуванням того, що

$$L_{k-1\,u}(x, y) \le L_u(x, y)\prod_{j=1}^{k-1} l_j(x, y),$$

де

$$l_j(x, y) = 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_{k+1}} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j},$$

з нерівностей (10) та (11) випливає

$$L_{ku}(x, y) \le L_{k-1\,u}(x, y) l_k(x, y) \le L_u(x, y) l_k(x, y)\prod_{j=1}^{k-1} l_j(x, y) = L_u(x, y)\prod_{j=1}^{k} l_j(x, y).$$

Тоді нерівність (10) набере вигляду

$$u(x, y) \le L_u(x, y)\prod_{j=1}^{k} l_j(x, y),$$

або

$$u(x, y) \le \left(C + \iint\limits_{G_{k+1}} (f(\tau, s)u(\tau, s) + k(\tau, s)u^{\alpha}(\tau, s))d\tau ds\right)\prod_{j=1}^{k} l_j(x, y),$$

$$\frac{u(x, y)}{\prod_{j=1}^{k} l_j(x, y)} \le \left(C + \iint\limits_{G_{k+1}} \left(f_k(\tau, s)\frac{u(\tau, s)}{\prod_{j=1}^{k} l_j(x, y)} + k_k(\tau, s)\frac{u^{\alpha}(\tau, s)}{\prod_{j=1}^{k} l_j^{\alpha}(x, y)}\right) d\tau ds\right), \tag{12}$$

де

$$f_k(\tau, s) = f(\tau, s)\prod_{j=1}^{k} l_j(\tau, s),$$

$$k_k(\tau, s) = k(\tau, s)\prod_{j=1}^{k} l_j^{\alpha}(\tau, s).$$

На підставі наслідку 1 теореми 1 [4] отримаємо

$$u(x, y) \le \left\{C^{1-\alpha} + (1-\alpha)\iint\limits_{G_{k+1}} k_k(\tau, s)F_{k+1}^{\alpha-1}(x, s)d\tau ds\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} F_{k+1}(x, y)\prod_{j=1}^{k} l_j(x, y), \tag{13}$$

де

$$F_{k+1}(x, y) = \exp\left(\iint\limits_{G_{k+1}} f_k(\tau, s)d\tau ds\right).$$

У нескороченому запису нерівність (13) має вигляд

$$u(x,y) \le \left( C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \iint\limits_{G_{k+1}} \prod_{j=1}^{k} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_{k+1}} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right)^{\alpha} k(\tau,s) F_{k+1}^{\alpha-1}(x,s) d\tau ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \times$$

$$\times F_{k+1}(x,y) \prod_{j=1}^{k} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_{k+1}} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right),$$

де

$$F_{k+1}(x,y) = \exp\left( \iint\limits_{G_{k+1}} f(\tau,s) \prod_{j=1}^{k} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_{k+1}} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right) d\tau ds \right),$$

тобто ми отримали нерівність (3) для $n = k + 1$. Отже, нерівність виконується для всіх $n$.

Теорему доведено.

Аналогічно можна довести наступну теорему.

**Теорема 2.** *Нехай в області* $D^*$ *виконуються умови* 1 – 7 *теореми* 1 *та функція* $u(x,y)$ *задовольняє інтегро-сумарну нерівність*

$$u(x,y) \le h(x,y) + \iint\limits_{G_n} \left( f(\tau,s) u(\tau,s) + k(\tau,s) u^{\alpha}(\tau,s) \right) d\tau ds + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\Gamma_1 \cap G_n} \beta_j(P) u(P) d\mu_{\varphi_j},$$

*де функція* $h(x,y)$ — *додатна, монотонно неспадна.*

*Тоді справджуються оцінки:*

*при* $0 \le \alpha < 1$

$$u(x,y) \le \left( 1 + (1-\alpha) \iint\limits_{G_n} k(\tau,s) h^{\alpha-1}(\tau,s) F_n^{\alpha-1}(x,s) \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right)^{\alpha} d\tau ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \times$$

$$\times F_n(x,y) h(x,y) \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right), \tag{14}$$

*де*

$$F_n(x,y) = \exp\left( \iint\limits_{G_n} f(\tau,s) \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right) d\tau ds \right);$$

*при* $\alpha > 1$ *оцінка* (14) *буде справедливою в області*

$$D_{\alpha_n} = \left\{ (x,y) \in D_n : \iint\limits_{G_n} k(\tau,s) h^{\alpha-1}(\tau,s) F_n^{\alpha-1}(x,s) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 + \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j} \right)^{\alpha} d\tau ds < (\alpha-1)^{-1} \right\};$$

*при* $\alpha = 1$

$$u(x, y) \leq h(x, y)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j \cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)\times$$

$$\times \exp\left(\iint\limits_{G_n}(f(\tau, s)+k(\tau, s))\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j \cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)d\tau ds\right).$$

Отримані результати дають можливість знаходити оцінки для функцій, які задовольняють рівняння гіперболічного типу з нелінійною правою частиною та отримують імпульсні збурення вздовж деяких кривих.

Як приклад, розглянемо відому задачу математичної фізики — задачу Гурса [7] з даними на характеристиках, за умови, що функція $u(x, y)$ вздовж деяких кривих

$$\Gamma_j = \{\, (x, y): \varphi_j(x, y) = 0, j = 1, 2, \ldots \,\}$$

отримує імпульсні збурення, характер яких може бути як неперервним, так і дискретним:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y)u(x, y) + k(x, y)u^{\alpha}(x, \; y),\\ &u(x, 0) = g_1(x), \qquad u(0, y) = g_2(y),\end{aligned}\right\} \qquad (x, y) \notin \Gamma_j,$$

$$\Delta u(x, y)\big|_{(x, y)\in\Gamma_j} = \int\limits_{\Gamma_j \cap G_n}\beta_j(P)u(P)d\mu_{\varphi_j}.$$

Будемо вважати, що функції $g_1(x)$, $g_2(y)$ є диференційовними та задовольняють умову узгодженості $g_1(0) = g_2(0)$. Тоді для функції $u(x, y)$ згідно з [8] (гл. III, § 6, пп. 3, 6, 7; гл. I, § 3, п. 1) є можливим інтегральне зображення

$$u(x, y) \leq g_1(x) + g_2(y) - g_1(0) + \iint\limits_{G_n}(f(s, t)u(s, t) + k(s, t)u^{\alpha}(s, t))ds\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{\Gamma_1 \cap G_n}\beta_j(P)u(P)d\mu_{\varphi_j}. \tag{15}$$

Оцінку для функції $u(x, y)$ при різних значеннях параметра $\alpha$ та імпульсному збуренні дає наступна теорема.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови* $1-7$ *теореми* 1 *та наступні умови*:

8) *функції* $g_1(x)$, $g_2(y)$ *є додатними та диференційовними*;

9) $g_1'(x) \geq 0$, $g_2'(y) \geq 0$, $g_1(0) = g_2(0)$;

10) *функція* $u(x, y)$ *задовольняє в області* $D^*$ *нерівність* (15).

*Тоді справджуються оцінки*:

*при* $0 \leq \alpha < 1$

$$u(x, y) \leq \prod_{j=1}^{n}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j \cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)\left\{F_n^{1-\alpha}(0, x; 0, y)\left[g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(0)\right] +\right.$$

$$\left.+ (1-\alpha)\iint\limits_{G_n}k(s, t)F_n^{1-\alpha}(0, x; t, y)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{\Gamma_j \cap G_n}\beta_j(P)d\mu_{\varphi_j}\right)^{\alpha}ds\,dt\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{16}$$

*де*

$$F_n(x_0, x; y_0, y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \int_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j}\right) ds\, dt\right);$$

*при* $\alpha = 1$

$$u(x,y) \le \frac{g_1(x) g_2(y)}{g_1(0)} \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \int_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j}\right) E_n(x,y),$$

*де*

$$E_n(x,y) = \exp\left(\iint_{G_n} [f(s,t) + k(s,t)] \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 + \int_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j}\right) ds dt\right);$$

*при* $\alpha = 1$ *оцінка* (16) *буде справедливою в області*

$$D_{\alpha_n} = \left\{(x,y) \in D_n : \iint_{G_n} k(s,t)\, F_n^{\alpha-1}(0, x; t, y) \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 + \int_{\Gamma_j \cap G_n} \beta_j(P) d\mu_{\varphi_j}\right)^{\alpha} ds\, dt < \right.$$

$$\left. < (\alpha - 1)^{-1}\left[g_1(x)^{1-\alpha} + g_2(y)^{1-\alpha} - g_1(0)^{1-\alpha}\right]\right\}.$$


1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
2. *Samoilenko A., Borysenko S., Cattani C., Matarazzo G., Vasinsky V.* Differential models: stability, inequalities and estimates. – Kyiv: Nauk. Dumka, 2001. – 328 p.
3. *Samoilenko A., Borysenko S., Cattani C., Vasinsky V.* Differential models: construction, representations and applications. – Kyiv: Nauk. Dumka, 2001. – 156 p.
4. *Массалітіна Є. В.* Багатовимірні нелінійні інтегральні нерівності // Наук. вісті НТУ України „КПІ". – 2000. – № 6. – С. 149 – 155.
5. *Массалітіна Є. В.* Про інтегро-сумарні нерівності та їх застосування в задачах стійкості імпульсних систем // Там же. – 2001. – № 5. – С. 138 – 143.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
8. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. А.* Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, 1967. – 220 с.


Одержано 05.07.2002,
після доопрацювання — 09.04.2004