УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ q-ЭЛЛИПСОИДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ $S_\varphi^{p,\mu}$

We find exact values of the best approximations and basic widths of q-ellipsoids in the spaces $S_\varphi^{p,\mu}$ for $q > p > 0$.

Знайдено точні значення найкращих наближень та базисних поперечників q-еліпсоїдів у просторах $S_\varphi^{p,\mu}$ при $q > p > 0$.

В настоящей работе получены аналог теоремы 1 из [1] и точные значения базисных поперечников q-эллипсоидов в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ в случае, когда $q > p > 0$.

Будем пользоваться определениями и обозначениями, принятыми в [1].

Теорема 1. *Пусть* p *и* q *— неотрицательные числа, причем* $q > p$; ψ, μ *и* λ *— последовательности, удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^{pq/(q-p)} < \infty, \qquad \psi'_k = \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \quad k \in N. \tag{1}$$

Тогда при любом натуральном n *выполняется равенство*

$$E_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{\psi',p,\mu} = \mathscr{E}_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{\psi',p,\mu} = \left(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \overline{(\psi'_k)}^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{2}$$

где $\overline{\psi'} = \left\{ \overline{\psi'}_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность, для которой*

$$\overline{\psi'}_k = \varepsilon'_k, \qquad \delta'_{n-1} < k \le \delta'_n, \qquad n \in N,$$

ε'_n *и* δ'_n *— члены характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi')$ *и* $\delta(\psi')$.

Доказательство. В случае, когда $\mu_k = \lambda_k \equiv 1$, это утверждение доказано в [2] (гл. 11, § 8). Используемые там рассуждения по существу пригодны и в общем случае. Переходя непосредственно к доказательству теоремы, прежде всего отметим, что условия (1) обеспечивают включения $\psi U_\varphi^{q,\lambda} \subset S_\varphi^{p,\mu}$, в чем нетрудно убедиться с помощью неравенства Гельдера.

Первое из равенств в (2) является следствием предложения 1 из [1], поэтому достаточно убедиться в справедливости только второго из этих равенств.

Пусть ε'_n, δ'_n и $g'_n = g_n(\psi') = \{k \in N : |\psi'_k| \ge \varepsilon'_n\}$ — характеристические последовательности системы ψ',

$$S_n(f)_{\varphi,\psi'} = S_{g_n^{\psi'}}(f) = \sum_{k \in g_n^{\psi'}} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad S_0(f)_{\varphi,\psi'} = \theta,$$

— полиномы, построенные для $f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$ согласно формулам (13) из [1]. С учетом формул (14) из [1] имеем

$$\mathscr{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \left\| f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi'} \right\|_{p,\mu}^p = \sum_{k \,\overline{\in}\, g_{n-1}^{\psi'}} \left| \mu_k \hat{f}_\varphi(k) \right|^p =$$

$$= \sum_{k \,\overline{\in}\, g_{n-1}^{\psi'}} |\psi_k|^p \left| \mu_k \hat{f}_\varphi^\psi(k) \right|^p = \sum_{k \,\overline{\in}\, g_{n-1}^{\psi'}} |\psi'_k|^p \left\| \hat{f}_\varphi^\psi(k) \right|^p \lambda_k^p. \tag{3}$$

Обозначим через i_k, $k = 1, 2, \ldots$, натуральные числа такие, что

$$\left|\psi'_{i_k}\right| = \overline{\psi'}_k, \tag{4}$$

где $\overline{\psi'}_{i_k} = \varepsilon'_k$ при $k \in (\delta'_{n-1}, \delta'_n)$.

Тогда равенство (3) запишется в виде

$$\mathscr{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \left|\overline{\psi'}_k \hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\lambda_{i_k}\right|^p.$$

Положим

$$m_k = \left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\lambda_{i_k}\right|^q. \tag{5}$$

В таком случае $\left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\lambda_{i_k}\right|^p = m_k^{p/q}$ и, следовательно,

$$\mathscr{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \left(\overline{\psi'_k}\right)^p m_k^r, \qquad r = \frac{p}{q}. \tag{6}$$

Если $f \in \psi U_{\varphi}^{q,\lambda}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_k f_{\varphi}^{\psi}(k)\right|^q \leq 1.$$

Поэтому с учетом соотношений (5) и (6) находим

$$\mathscr{E}_n\left(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}\right)_{\psi',p,\mu} \leq \sup\left\{\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \left(\overline{\psi'_k}\right)^p m_k^r,\ r = \frac{p}{q},\ \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1\right\}. \tag{7}$$

Если положить $\left(\overline{\psi'_k}\right)^p = \alpha_k$, то условие (1) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty, \qquad \alpha_k > 0 \quad \forall k \in N. \tag{8}$$

Следовательно, нахождение значения правой части (7) сводится к решению экстремальной задачи

$$\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k x_k^r \to \sup$$

при таких условиях, что

$$\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} x_k = 1, \qquad x_k \geq 0,$$

а числа α_k образуют невозрастающую последовательность и удовлетворяют условию (8).

Решения $\bar{x}_k$ такой задачи получены в [2] (гл. 11, § 8). Они имеют вид

$$\bar{x}_k = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum_{i=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}}\right)^{-1}, \quad k = \delta'_{n-1}+1, \delta'_{n-1}+2, \ldots. \tag{9}$$

Объединяя соотношения (7) – (9), получаем

$$\mathscr{E}_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{\psi',p,\mu} \le \left(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r} = \left(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \left(\overline{\psi'}_k\right)^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} = A_n,$$

и для завершения доказательства теоремы осталось показать, что это соотношение на самом деле является равенством. Для этого достаточно показать, что в множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется элемент f_ε, для которого выполняется неравенство

$$\mathscr{E}_n(f_\varepsilon)_{\psi',p,\mu} > A_n - \varepsilon. \qquad (10)$$

Такой элемент можно построить, например, придерживаясь схемы, изложенной в [2] (гл. 11, § 8).

Пусть

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} \varphi_{i_k},$$

где числа i_k выбраны согласно (4), а числа c_{i_k} такие, что

$$c_{i_k}^q \lambda_{i_k}^q = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \ldots, \delta'_{n-1}, \\ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \sigma_2^{-1}(\delta'_{n-1}), & k > \delta'_{n-1}, \end{cases}$$

$$\sigma_2(s) = \sum_{i=s}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}}.$$

Ясно, что

$$\| h \|_{q,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}^q \lambda_{i_k}^q = 1. \qquad (11)$$

Пусть теперь ε — любое положительное число и $\mathscr{N}_\varepsilon$ настолько велико, что при всех $n > \mathscr{N}_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sigma_2^{-r}(\delta'_{n-1}) \sum_{k=\mathscr{N}_\varepsilon+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \varepsilon.$$

Элемент

$$h_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\mathscr{N}_\varepsilon} c_{i_k} \varphi_{i_k}$$

в силу (11) принадлежит $U_\varphi^{q,\lambda}$, и поэтому его ψ-интеграл $\mathcal{J}^\psi h_\varepsilon$ находится в множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$. Полагая $f_\varepsilon = \mathcal{J}^\psi h_\varepsilon$ и вычисляя согласно (3) значение $\mathscr{E}_n(f_\varepsilon)_{\psi',p,\mu}$, убеждаемся в выполнении неравенства (10), что и завершает доказательство теоремы.

Найдем теперь аналоги теорем 3 и 3′ из [1] в случае, когда $q > p > 0$.

Пусть γ_n — любой набор из n натуральных чисел и $\mathcal{F}_n$ — множество полиномов P_{γ_n} вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k\in\gamma_n} c_k\varphi_k, \quad n\in N,$$

где c_k — некоторые комплексные числа. Пусть, далее,

$$E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \inf_{P_{\gamma_n}\in\mathcal{T}_n} \left\| f - P_{\gamma_n}\right\|_{p,\mu}, \quad f\in S_{\varphi}^{p,\mu},$$

— наилучшее приближение элемента f посредством полиномов, построенных по заданному набору γ_n из n базисных векторов;

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \left\| f - S_{\gamma_n}(f)\right\|_{p,\mu}, \quad S_{\gamma_n}(f) = \sum_{k\in\gamma_n}\hat{f}_{\varphi}(k)\varphi_k, \tag{12}$$

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu}$$

и

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \sup_{f\in\mathfrak{N}}\mathcal{E}_{\gamma_n}(f), \quad \mathfrak{N}\subset S_{\varphi}^{p,\mu}.$$

Пусть еще

$$D_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\mathfrak{N}), \quad n\in N, \tag{13}$$

— величины, которым в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами соответствуют так называемые тригонометрические поперечники (поэтому величины $D_n(\mathfrak{N})_{p,\mu}$ можно назвать, к примеру, базисными поперечниками порядка n множества $\mathfrak{N}$ в пространствах $S_{\varphi}^{p,\mu}$).

Кроме того, если $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая система комплексных чисел, а $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — системы неотрицательных чисел и γ_n — фиксированный набор из n натуральных чисел, то будем полагать

$$\psi_{\gamma_n} = \left\{\psi_{\gamma_n}(k)\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \psi_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k\in\gamma_n, \\ \psi_k = \psi(k), & k\,\overline{\in}\,\gamma_n, \end{cases} \tag{14}$$

$$\psi' = \{\psi'(k)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \psi'(k) = \psi'_k = \psi_k\frac{\mu_k}{\lambda_k}, \tag{15}$$

$$\psi'_{\gamma_n} = \left\{\psi'_{\gamma_n}(k)\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \psi'_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k\in\gamma_n, \\ \psi'(k) = \psi'_k, & k\,\overline{\in}\,\gamma_n. \end{cases} \tag{16}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть числа p, q и последовательности ψ, μ и λ такие, что $q > p > 0$ и выполняется условие* (1). *Тогда при любом натуральном n справедливо равенство*

$$E_{\gamma_n}\left(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}\right)_{p,q} = \mathcal{E}_{\gamma_n}\left(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}\right)_{p,q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k)\right)^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{17}$$

где $\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k)$, $k\in N$, *— перестановка в убывающем порядке последовательности* $\left|\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k)\right|$, $k\in N$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что равенство (2) является частным случаем (17). Действительно, пусть

$$g_n^{\psi'} = \{k \in N : |\psi'(k)| \geq \varepsilon_n\}, \qquad n \in N, \tag{18}$$

и $n' = \delta'_{n-1} = \left|g_{n-1}^{\psi'}\right|$ — количество натуральных чисел, содержащихся в g'_{n-1}. Выберем набор $\gamma^*_{n'}$ из условия $\gamma^*_{n'} = g_{n-1}^{\psi'}$. В таком случае, согласно (14) – (16),

$$\overline{\psi'}_{\gamma^*_{n'-1}}(k) = \overline{\psi'}(k+n'), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

Следовательно, в силу (2), (18) и (19)

$$E_{\gamma^*_{n'}}\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,q} = \mathscr{E}_{\gamma^*_{n'}}\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,q} = \left(\sum_{k=n'+1}^{\infty}\left(\overline{\psi'}(k)\right)^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Таким образом, действительно

$$E_{\gamma^*_{\delta'_{n-1}}}\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,q} = \mathscr{E}_{\gamma^*_{\delta'_{n-1}}}\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,q} = E_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{\psi',p,\mu} = \mathscr{E}_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{\psi',p,\mu}.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, поэтому остановимся только на его основных моментах. В силу предложения 1 из [1] достаточно доказать только второе из равенств в (17). С этой целью сначала с учетом (12) и (16) запишем аналог равенства (3):

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \sum_{k\overline{\in}\gamma_n}\left|\mu_k \hat{f}_\varphi(k)\right|^p = \sum_{k\overline{\in}\gamma_n}|\psi'_k|^p\left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p\lambda_k^p = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi'_{\gamma_n}(k)\right|^p\left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p\lambda_k^p$$

и через i_k, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим натуральные числа, занумерованные так, что $\psi'_{\gamma_n}(i_k) = \overline{\psi'}_{\gamma_n}(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда последнее равенство примет вид

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k)\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)\lambda_{i_k}\right|^p.$$

Выполняя замену (5), получаем аналог неравенства (7):

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_n}\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} \leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k)\right)^p m_k^r,\ r = \frac{p}{q},\ \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1\right\},$$

после чего доказательство этой теоремы заканчивается фактически повторением соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 1.

Рассматривая нижние грани обеих частей равенства (17) по всевозможным наборам γ_n, видим, что точная нижняя грань правой части (17) реализуется набором γ^*_n, который определяется соотношением

$$\gamma^*_n = \left\{i_k \in N : \left|\overline{\psi'}_{i_k}\right| = \overline{\psi'}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Согласно (15) и (16)

$$\overline{\psi'}_{\gamma^*_n}(k) = \overline{\psi'}(k+n), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому в силу (13)

$$D_n\left(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi'_{\gamma_n^*}(k)\right)^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\overline{\psi'}(k)\right)^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть числа* p, q *и последовательности* ψ, μ *и* λ *такие, что* $q > p > 0$ *и выполняется условие* (1). *Тогда при любом натуральном* n *выполняется равенство*

$$D_n\left(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\overline{\psi'}_k\right)^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{20}$$

в котором $\overline{\psi'}_k$, $k \in N$, *— перестановка в убывающем порядке последовательности* $\left\{\left|\overline{\psi'}_k\right|\right\}_{k=1}^{\infty}$.

В заключение заметим, что последовательность $\overline{\psi'}_k$, $k \in N$, в общем случае является ступенчатой. Поэтому согласно теореме 3 из [1] такой же характер имеет и величина $D_n\left(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}\right)_{p,\mu}$ при $p \geq q > 0$. Если же $p < q$, то в силу (20) эта величина с ростом параметра n строго убывает.

1. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Пространства S^p с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 264 – 277.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.

Получено 06.07.2004