УДК 512. 643. 4

В. М. Прокіп, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ДО ПИТАННЯ ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МАТРИЧНОГО АЛГЕБРАЇЧНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ

Conditions of solvability of a matrix algebraic Riccati equation are obtained.

Одержано деякі умови розв'язності матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті.

В багатьох напрямках прикладного характеру (теорія оптимального управління, прогнозування та ін.) важливу роль відіграє матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті

$$R(X) = XAX + XB + CX + D = O, \tag{1}$$

де A, B, C, D — відомі $n \times n$-матриці над деяким полем P, а X — невідома, O — нульова $n \times n$-матриці.

Питання про розв'язність рівняння (1) привертало увагу багатьох математиків. Так, в роботах [1, 2] дано огляд теоретичних результатів, присвячених цій проблемі, а в [3, 4] основна увага зосереджена на описі обчислювальних алгоритмів знаходження розв'язків рівняння (1). В даній роботі одержано деякі умови розв'язності матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті в термінах рангів матриць, побудованих певним чином за коефіцієнтами цього рівняння.

Природно виникає питання про зображення рівняння (1) у вигляді

$$R(X) = (XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = O, \tag{2}$$

де F_i, G_i, $i = 1, 2$, — $n \times n$-матриці над полем P. Наступна теорема встановлює умови такого зображення.

Теорема 1. *Матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті*

$$R(X) = XAX + XB + CX + D = O$$

допускає зображення у вигляді

$$R(X) = (XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = O$$

тоді і тільки тоді, коли система рівнянь

$$Y_1Z_1 = A, \quad Y_1Z_2 = B, \quad Y_2Z_1 = C, \quad Y_2Z_2 = D \tag{3}$$

(Y_i, Z_i, $i = 1, 2$, — *невідомі* $n \times n$-*матриці*) *розв'язна.*

Доведення. Нехай рівняння (1) допускає зображення у вигляді (2), тобто

$$XAX + XB + CX + D = (XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = O.$$

Перемножуючи середню частину цієї рівності, маємо

$$XAX + XB + CX + D = XF_1G_1X + XF_1G_2 + F_2G_1X + F_2G_2 = O.$$

Звідси випливає $A = F_1G_1$, $B = F_1G_2$, $C = F_2G_1$, $D = F_2G_2$, тобто система рівнянь (3) розв'язна.

Навпаки, нехай матриці $Y_1 = F_1$, $Y_2 = F_2$, $Z_1 = G_1$, $Z_2 = G_2$ — розв'язок системи рівнянь (3), тобто $F_1G_1 = A$, $F_1G_2 = B$, $F_2G_1 = C$, $F_2G_2 = D$. Враховуючи таке зображення матриць A, B, C, D, рівняння (1) запишемо у вигляді

$$R(X) = XF_1G_1X + XF_1G_2 + F_2G_1X + F_2G_2 = O.$$

Після нескладних перетворень лівої частини останньої рівності одержуємо

$R(X) = (XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = O$, тобто рівняння (1) допускає зображення у вигляді (2). Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай матричне алгебраїчне рівняння* (1) *допускає зображення у вигляді* (2). *Якщо хоча б одне з рівнянь* $XF_1 + F_2 = O$ *або* $G_1X + G_2 = O$ *розв'язне, то рівняння* (1) *теж розв'язне.*

Теорема 1 встановлює, що питання про зображення рівняння (1) у вигляді (2) рівносильне питанню про розв'язність системи рівнянь (3). Хоча сам процес розв'язання системи рівнянь (3) є складним, проте розв'язання даної задачі значно спрощується, якщо на розв'язки системи (3) накласти деякі умови, а саме: вимагатимемо, щоб принаймні один із розв'язків Y_1 або Z_1 цієї системи був неособливим.

Припустимо, що система рівнянь (3) розв'язна, причому розв'язок $Y_1 = F_1$ цієї системи є неособливим. На основі теореми 1 рівняння (1) допускає зображення у вигляді

$$R(X) = (XF_1 + F_2)(XG_1 + G_2) = O. \tag{4}$$

Оскільки $\det F_1 \neq 0$, то (4) запишемо тепер так:

$$R(X) = (X + F_2F_1^{-1})(F_1G_1X + F_1G_2) = O. \tag{5}$$

Враховуючи доведення теореми 1, маємо $F_1G_1 = A$, $F_1G_2 = B$. Якщо покласти $F_2F_1^{-1} = F$, то рівність (5) набуде вигляду

$$R(X) = (X + F)(AX + B) = O.$$

Звідси випливає, що матриця F задовольняє рівності $FA = C$, $FB = D$, тобто рівняння $YA = C$, $YB = D$ мають спільний розв'язок. На основі [5] ці рівняння мають спільний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\| A \;\; B \|.$$

Якщо ж остання умова виконується, то, враховуючи наслідок 1, легко переконатись в тому, що рівняння 1 розв'язне. Тим самим доведена така теорема.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів матричного рівняння* (1)

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\| A \;\; B \|.$$

Тоді рівняння (1) *розв'язне і його можна записати у вигляді* $R(X) = (X + F)(AX + B)$, *де матрицю* F *знаходимо як розв'язок рівняння* $Y\| A \;\; B \| = \| C \;\; D \|$, *а* $-F$ *— розв'язок рівняння* (1).

Тепер будемо припускати, що система рівнянь (3) розв'язна, причому розв'язок $Z_1 = G_1$ цієї системи є неособливим. Отже, рівняння (1) можна записати у вигляді

$$R(X) = (XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = O. \tag{6}$$

Оскільки $\det G_1 \neq 0$, то (6) запишемо таким чином:

$$R(X) = (XF_1G_1 + F_2G_1)(X + G_1^{-1}G_2) = O. \tag{7}$$

Як і в попередньому випадку, враховуючи те, що $F_1G_1 = A$, $F_2G_1 = C$ і покладаючи $G_1^{-1} \cdot G_2 = G$, (7) запишемо у вигляді $R(X) = (XA + C)(X + G) = O$. Звідси випливає $AG = B$ і $CG = D$. Отже, матриця G — спільний розв'язок системи рівнянь $AZ = B$, $CZ = D$. На основі [5] ці рівняння мають спільний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A \\ C \end{Vmatrix}.$$

Як і попередньому випадку, легко бачити, що з виконання останньої умови випливає розв'язність матричного рівняння (1). Отже, доведена така теорема.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів матричного рівняння* (1)

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A \\ C \end{Vmatrix}.$$

Тоді рівняння (1) *розв'язне і його можна записати у вигляді* $R(X) = (XA + C)(X + G) = O$, *де матрицю* G *знаходимо як розв'язок рівняння*

$$\begin{Vmatrix} A \\ C \end{Vmatrix} Z = \begin{Vmatrix} B \\ D \end{Vmatrix},$$

а $-G$ — *розв'язок цього рівняння.*

Якщо в рівнянні (1) $\det A \neq 0$ і система рівнянь (3) розв'язна, то, враховуючи теореми 2 і 3, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $\det A \neq 0$. *Якщо*

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = n, \tag{8}$$

то рівняння (1) *можна записати у вигляді*

$$R(X) = (X+F)A(X+G) = O,$$

де $F = CA^{-1}$, $G = A^{-1}B$, *а отже, воно розв'язне.*

Доведення. Виконання умови (8) рівносильне тому, що наступні рівняння розв'язні:

$$Y\|A \ \ B\| = \|C \ \ D\|, \quad \begin{Vmatrix} A \\ C \end{Vmatrix} Z = \begin{Vmatrix} B \\ D \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то на основі теорем 2 і 3 рівняння (1) запишемо таким чином:

$$R(X) = (X+F)(AX+B) = (X+F)A(X+A^{-1}B) =$$
$$= (X+F)A(X+G) = O.$$

Тим самим наслідок доведено.

Зауважимо, що задача про розв'язність рівняння (1) в термінах власних значень матриці $\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$ розглядалась у роботі [6].

1. *Kucera V.* The discrete Riccati equation of optimal control // Kybernetica. – 1972. – **8**, № 5. – P. 430 – 447.
2. *Kucera V.* A review of the matrix Riccati equation // Ibid. – 1973. – **9**, № 1. – P. 42 – 61.
3. *Ларин В. Б.* Методы решения алгебраических уравнений Риккати // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 186 – 199.
4. *Алиев Ф. А.* Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. – Баку: Элм, 1989. – 320 с.
5. *Петричкович В. М., Прокип В. М.* Об общих делителях матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 23 – 26.
6. *Potter J. M.* Matrix quadratic solution // J. SIAM Appl. Math. – 1966. – **14**, № 3. – P. 496 – 501.

Одержано 13.12.93