УДК 519.44

В. А. Крекнин, И. И. Мельник, кандидаты физ.-мат. наук (Херсон. пед. ин-т)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДОПОЛНЯЕМОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНОЙ 2-ГРУППЕ

We give sufficient conditions for each maximal cyclic subgroup of a finite 2 -group to have a complement.

Наводяться достатні умови для того, щоб в скінченній 2-групі всі максимальні циклічні підгрупи мали доповнення.

Пусть G — конечная 2-группа. Если в G каждая максимальная циклическая подгруппа имеет дополнение, то G называется ДМ-группой. В работе [1] по существу дано описание абелевых ДМ-групп, а в [2] изучались произвольные конечные ДМ-группы (см. также [1]).

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [2], где достаточные условия факторизуемости не рассматривались.

Система подгрупп $\{A_i\}$, $i=\overline{1,m}$, называется базисной системой для группы G, если они попарно перестановочны, порождают всю группу G и факторизация $G = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ является точной. Все другие неопределяемые понятия см. в работе [2]. Основным результатом является доказательство достаточности условий для следующей теоремы.

Теорема. *Конечная группа G экспоненты 2^n, $n \ge 4$, является ДМ-группой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из условий:*

1) *в G существует базисная система циклических подгрупп экспоненты 2^{n-1} или 2^n, причем $G' \subset \Phi_2(G)$;*

2) $G = D \leftthreetimes \langle u \rangle$, *где* $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_k$, $u^2 = 1$, $D_i = \langle d_i \rangle$, $|D_i| \ge 2^{n-1}$, *причем* $udu = d^{-1}$, *для любого элемента* $d \in D$.

Необходимость этих условий установлена в [2]. Для доказательства теоремы нам необходимы следующие вспомогательные результаты.

Пусть $\{A_i\}$, $i=\overline{1,m}$, — базисная система циклических подгрупп группы G. В силу леммы 3.6 [2] система неединичных подгрупп из множества $\left\{\left\langle a_i^{2^l}\right\rangle\right\}$, где $A_i = \langle a_i \rangle$, является базисной системой подгрупп для группы Φ_l.

Лемма 1. *Существует такой индекс $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $|A_j| = 2^n$.*

Доказательство. Пусть $\max\{|A_i|\} = 2^l$. Тогда для любого индекса i $a_i^{2^l} = 1$. Так как подгруппа Φ_l порождается элементами $a_i^{2^l}$, $i=\overline{1,m}$, то $\Phi_l = \{1\}$. С другой стороны, для любого элемента $g \in G$ выполняется включение $g^{2^l} \in \Phi_l$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть для конечной группы G экспоненты 2^n существует базисная система циклических подгрупп, причем $G' \subset \Phi_2(G)$, тогда $\Phi_{n-2} \subset Z$, $[G, \Phi_i] \subset \Phi_{i+2}$ и $[\Phi_i, \Phi_j] \subset \Phi_{i+j+2}$.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}$, $i=\overline{1,m}$, — базисная система циклических подгрупп и $A_i = \langle a_i \rangle$. Докажем лемму индукцией по показателю n. Если $n = 2$, то в силу включения $G' \subset \Phi_2 = \{1\}$ получаем, что G — абелева группа и доказательство завершено. Допустим теперь, что лемма справедлива для некоторого показателя $n \ge 2$ и рассмотрим группу G экспоненты 2^{n+1}. Покажем, что $\Phi_n \subset Z$, где Z — центр группы G. Для этого достаточно показать, что $t = a_i^{2^n} \in Z$ для любого i. Если $t=1$, то все очевидно. Допустим, что $t \ne 1$. Так как G — равномерное произведение циклических подгрупп A_j, $j=\overline{1,m}$, то $A_j \cdot \langle t \rangle = \langle t \rangle \cdot A_j$, поэтому $[A_j \cdot \langle t \rangle : A_j] = 2$ и, следовательно, для

© В. А. КРЕКНИН, И. И. МЕЛЬНИК, 1994

любого j $A_j \lhd A_j \cdot \langle t \rangle$. Таким образом, $t a_j t = a_j^{1+2\beta}$. С другой стороны, $[a_j, t] \in \Phi_2$, поэтому $[a_j, t] \in a_j^{2^k \alpha}$, где α — нечетное число и $k \geq 2$. Отсюда вытекает, что $a_j^{-1} t a_j t = a_j^{2^k \alpha}$ или $t a_j t = a_j^{1+2^k \alpha}$. Таким образом, $a_j = t^2 a_j t^2 = a_j^{l^2}$, $l = 1 + 2^k \alpha$, поэтому $a_j^{l^2 - 1} = 1$, откуда $a_j^{2^{k+1}} = 1$, так как число $\alpha + 2^{k-1}\alpha^2$ нечетное, $k \geq 2$. Следовательно, элемент $t a_j^2 t = (t a_j t)^2 = a_j^{2+2^{k+1}\alpha} = a_j^2$, поэтому t принадлежит центру подгруппы $\Phi = \Phi(G)$. С другой стороны, $t = u^2$, где $u = a_i^{2^{n-1}}$. Фактор-группа $\overline{G} = G/\Phi_n$, имеет экспоненту 2^n, причем $\{\langle \overline{a}_s \rangle\}$, $s = \overline{1, m}$, — базисная система подгрупп группы $\overline{G}$. Отсюда получаем, что элемент $\overline{u}$, являющийся образом элемента u, принадлежит центру группы $\overline{G}$, т. е. $[\overline{u}, \overline{g}] = \overline{1}$, для любого $\overline{g} \in \overline{G}$. Поэтому $[g, u] \in \Phi_n = \Phi_n(G)$, но тогда $[g, t] = [g, u^2] = [g, u]^2 [g, u, u]$. Далее, коммутатор $[g, u] \in \Phi_n$, причем Φ_n является элементарной абелевой группой. Таким образом, $[g, u^2] = 1$. Кроме того, $u \in \Phi_{n-1} \subset \Phi$, $n \geq 2$, и по доказанному $\Phi_n \subset Z(\Phi)$. Следовательно, $[g, u, u] = 1$. Получили, что для произвольного элемента $g \in G$ коммутатор $[g, t] = 1$, т. е. $t \in Z = Z(G)$.

Докажем теперь, что $\Phi_{n-1} \subset Z$. Достаточно показать, что для любого i элемент $u = a_i^{2^{n-1}} \in Z$, $i = \overline{1, m}$. Можно ограничиться случаем, когда элемент $u \neq 1$. Положим $v = a_i^{2^{n-2}}$, $n \geq 2$, тогда $u = v^2$. В фактор-группе $\overline{G}$ коммутатор $[\overline{g}, \overline{v}] = \overline{1}$ для любого $\overline{g} \in \overline{G}$ по предположению индукции. Следовательно, $[g, v] \in \Phi_n$ и $[g, u] = [g, v^2] = [g, v]^2$. Так как коммутатор $[g, v] \in \Phi_n$, то $[g, v]^2 = 1$. По доказанному $\Phi_n \subset Z$, причем $[g, v, v] = 1$, поэтому $[g, u] = 1$. Таким образом, $[g, u] = 1$ для любого $g \in G$. Тем самым включение $\Phi_{n-1} \subset Z$ доказано.

Докажем включение $[G, \Phi_i] \subset \Phi_{i+2}$. Если $i = n - 1$ или $i = n$, то включение следует из того, что подгруппа Φ_{n-1} содержится в центре Z группы G. Пусть $i \leq n - 2$. В группе $\overline{G} = G/\Phi_n$ выполняется включение $[\overline{G}, \Phi_i(\overline{G})] \subset \Phi_{i+2}(\overline{G})$. С другой стороны, $\Phi_s(\overline{G}) = \overline{\Phi_s(G)}$, поэтому $\overline{[G, \Phi_i]} = \overline{\Phi_{i+2}(G)}$, отсюда $[G, \Phi_i] \subset \Phi_{i+2}\Phi_n$. Так как $i \leq n - 2$, то $\Phi_{i+2} \supset \Phi_n$, поэтому получаем требуемое включение $[G, \Phi_i] \subset \Phi_{i+2}$.

Докажем включение $[\Phi_i, \Phi_j] \subset \Phi_{i+j+2}$. Если $j = 0$, то для любого i имеем включение $[\Phi_i, \Phi_0] \subset [\Phi_i, G] \subset \Phi_{i+2}$. Допустим теперь, что включение верно для некоторого индекса $j > 0$. Для доказательства включения $[\Phi_i, \Phi_{j+1}] \subset \Phi_{i+j+3}$ достаточно показать, что для любого элемента $f \in \Phi_i$ и элемента $u = a_s^{2^{j+1}}$, $s = \overline{1, m}$, выполняется включение $[f, u] \in \Phi_{i+j+3}$. Положим $v = a_s^{2^j}$, тогда $u = v^2$, и по предположению индукции коммутатор $[f, v]$ принадлежит подгруппе Φ_{i+j+2}. Имеем равенства $[f, u] = [f, v]^2 [f, v, v]$. Так как $[f, v] \in \Phi_{i+j+2}$, то $[f, v]^2 \in \Phi_{i+j+3}$. Кроме того, $[f, v] \in \Phi_{i+j+1}$ и $v \in \Phi_j$, поэтому из предположения индукции вытекает, что $[f, v, v] \in \Phi_{i+j+3}$.

Лемма 2 доказана. Пусть группа G удовлетворяет тем же условиям, что и в формулировке леммы 2.

Лемма 3. *Если* $b_i \in A_i$, $i = \overline{1, m}$, *то выполняются равенства* $(b_1 \ldots b_m)^l = = b_1^l b_2^l \ldots b_m^l$, $l = 2^{n-2}$.

Доказательство проведем индукцией по показателю n. Если $n = 2$, то группа G является абелевой и доказательство завершено. Пусть утверждение верно для группы G экспоненты 2^n, где $n \geq 2$. Рассмотрим произвольную группу G экспоненты 2^{n+1}, удовлетворяющую условиям леммы. Пусть $\overline{G} = G/\Phi_n$, тогда $\exp \overline{G} = 2^n$ и по предположению индукции имеем равенство $(\overline{b}_1 \ldots \overline{b}_m)^l = \overline{b}_1^l \ldots \overline{b}_m^l$, $l = 2^{n-1}$, откуда получаем, что $(b_1 \ldots b_m)^l = = b_1^l \ldots b_m^l z$, где $z \in \Phi_n$. Группа Φ_{n-1} является абелевой, так как на основании леммы 2 выполняется включение $[\Phi_{n-1}, \Phi_{n-1}] \subset \Phi_{2n}$. А так как $n \geq 2$, то $2n > n + 1$, т. е. $\Phi_{2n} = \{1\}$. Отсюда получаем $(b_1 \ldots b_m)^2 = b_1^{2^n} \ldots \ldots b_m^{2^n} z^2 = b_1^{2^n} b_2^{2^n} \ldots b_m^{2^n}$, так как Φ_n — элементарная абелева группа. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если для группы G экспоненты 2^n существует базисная система циклических подгрупп и $G' \subset \Phi_2$, то любой элемент из подгруппы Фраттини Φ является квадратом некоторого элемента из группы G.*

Доказательство. Если $n = 2$, то группа является абелевой и все очевидно. Допустим, что лемма верна для некоторого показателя $n \geq 2$ и рассмотрим группу G экспоненты 2^{n+1}. Пусть $f \in \Phi(G)$, тогда $\bar{f} \in \Phi(\overline{G})$, где $\overline{G} = G/\Phi_n$. По индукционной посылке $\bar{f} = \bar{g}^2$ для некоторого $\bar{g} \in \overline{G}$. Тогда $f = g^2 z$, где $z \in \Phi_n$. В силу леммы 2 подгруппа Φ_{n-1} является абелевой, поэтому $z = t^2$ для некоторого элемента $t \in \Phi_{n-1}$. С другой стороны, по лемме 2 $\Phi_{n-1} \subset Z$, поэтому $f = g^2 t^2 = (gt)^2$, и доказательство завершено.

Лемма 5. *Пусть $G = A_1 \ldots A_m$, где $\{A_i\}$ — базисная система циклических подгрупп, причем $G' \subset \Phi_2(G)$. Если $B = \langle b \rangle$, где $b = a_k^2$ для некоторого k, то для подгруппы $F = A_1 \ldots A_{k-1} \cdot B \cdot A_{k+1} \ldots A_m$ выполняется включение $F' \subset \Phi_2(F')$.*

Доказательство. Заметим, что система подгрупп $\{B, A_i; i \neq k\}$ является базисной системой для группы G [2]. В силу леммы 3.6 из [2] имеем равенство $\Phi_2(F) = \langle a_1^4 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle a_{k-1}^4 \rangle \cdot \langle a_k^8 \rangle \cdot \langle a_{k+1}^4 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle a_m^4 \rangle$. Достаточно установить, что $[a_i, a_j]$, $[a_i, b] \in \Phi_2(F)$ для $i \neq k$, $j \neq k$. Если $i, j \neq k$, то $[a_i, a_j] \in \in A_i \cdot A_j$. С другой стороны, $[A_i, A_j] \in \Phi_2(G)$, поэтому $[a_i, a_j] \in \langle a_i^4 \rangle \cdot \cdot \langle a_j^4 \rangle \in \Phi_2(G)$. Далее, в силу леммы 2 $[a_i, b] = [a_i, a_k^2] \in [G, \Phi] \subset \Phi_3$ и, так как $[a_i, b] \in A_i \cdot A_k$, $[a_i, a_k^2] \in \langle a_i^8 \rangle \cdot \langle a_k^8 \rangle \in \Phi_2(F)$. Лемма доказана. Непосредственно из леммы 5 вытекает следующая лемма.

Лемма 6. *Если $B_i \subset A_i$, $i = \overline{1, m}$, то группа $D = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_m$ удовлетворяет условию $D' \subset \Phi_2(D)$.*

***Доказательство** достаточности условий теоремы.* *Случай* 1. Пусть для группы G экспоненты 2^n существует базисная система циклических подгрупп $\{A_i\}$, причем $|A_i| \geq 2^{n-1}$ и $G' \subset \Phi_2(G)$. Необходимо доказать, что G является ДМ-группой. Будем полагать, что для $i \le k$ $|A_i| = 2^n$ и для $j > k$ $|A_j| = 2^{n-1}$, где $1 \le k \le m$. Пусть $B = \langle b \rangle$ — некоторая максимальная циклическая подгруппа в G, причем для элемента b имеем представление $b = u_1 \cdot \ldots \cdot u_m$, $u_i \in \langle a_i \rangle$. Так как b — максимальный элемент, то в силу леммы 4 для некоторого индекса i элемент u_i является образующим циклической подгруппы A_i. Допустим, что для некоторого $i \le k$ выполняется равенство $A_i = \langle u_i \rangle$. Покажем, что подгруппа $H = A_1 \ldots A_{i-1} \cdot A_{i+1} \ldots A_m$ является дополнением к подгруппе B в группе G. Тогда справедливо равенство $B \cap H = \{1\}$. Действительно, в силу леммы 3 для элемента b имеем равенство $b^l = u_1^l u_2^l \ldots u_m^l$, $l = 2^{n-1}$, поэтому элемент $w = b^{2^{n-1}}$ является инволюцией в подгруппе B, причем $w \notin H$, так как $u_i^l \ne 1$. Следовательно, $B \cap H = \{1\}$. Докажем теперь, что $G = HB$. Имеем $|B| = 2^n$ и $|H| 2^n = |G|$, отсюда $|H \cdot B| = |H| \cdot |B| = |G|$. Допустим, что для всех $i \le k$ элемент u_i не является образующим подгруппы A_i. Тогда для некоторого $i > k$ $A_i = \langle u_i \rangle$ и поэтому $u_i^{2^{n-2}} \ne 1$. Покажем, что в этом случае дополнением к подгруппе B является подгруппа H.

Докажем, что $B \cap H = \{1\}$. Рассмотрим подгруппу $D = \langle a_1^2 \rangle \ldots \langle a_k^2 \rangle \cdot A_{k+1} \ldots A_m$. В силу леммы 6 $D' \subset \Phi_2(D)$ и $\exp D = 2^{n-1}$. По лемме 3 для элемента b имеем $b^r = u_1^r \ldots u_m^r \ne 1$, $r = 2^{n-2}$, так как элемент u_i является образующим подгруппы A_i. С другой стороны, так как $b \in D$, то $b^{2^{n-1}} = 1$. Следовательно, b^r является инволюцией в циклической подгруппе B и $b^r \notin H$, так как $u_i^r \ne 1$. Отсюда следует $B \cap H = \{1\}$.

Теперь покажем, что $G = B \cdot H$. По условию $|B| = 2^{n-1}$ и $|G| = |H| \cdot 2^{n-1}$, поэтому $|B \cdot H| = |B| \cdot |H| = |G|$. Для случая 1 теорема доказана.

Случай 2. Допустим, что $G = D \leftthreetimes \langle u \rangle$, где $D = D_1 \times \ldots \times D_k$, $|D_i| \ge 2^{n-1}$, $u^2 = 1$, $D_i = \langle d_i \rangle$ и $udu = d^{-1}$, для любого элемента $d \in D$. Пусть $B = \langle b \rangle$ — максимальная циклическая подгруппа из D. Тогда $b = d \cdot u^{\varepsilon}$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Если $\varepsilon = 1$, то $b^2 = du \cdot du = d \cdot d^{-1} = 1$, т. е. b — инволюция. Тогда D является дополнением к B в группе G. Если $\varepsilon = 0$, то $B \subset D$ и B — максимальная циклическая подгруппа в D. Тогда подгруппа B имеет дополнение B_1 в группе D [3]. Подгруппа $B_1 \leftthreetimes \langle u \rangle$ является дополнением к B в группе G. Достаточно проверить, что подгруппа $B_1 \leftthreetimes \langle u \rangle$ имеет тривиальное пересечение с подгруппой B. Действительно, если $z \in B \cap (B_1 \leftthreetimes \langle u \rangle)$, то $z = b_1 = a_1 \cdot u^{\delta}$, $b_1 \in B$, $a_1 \in B_1$, где $\delta = 0$ или $\delta = 1$. Если же $\delta = 1$, то $u = a_1^{-1} \cdot b_1 \in D$, что невозможно. Пусть $\delta = 0$, тогда $b_1 = a_1 \in B \cap B_1 = \{1\}$. Теорема доказана.

1. *Кляцкая Л. М.* Абелевы группы, в которых дополняемы все максимальные подгруппы фиксированного ранга // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 159–184.
2. *Крекнин В. А., Мельник И. И., Малик В. Ф., Шиловская О. К.* Конечные 2-группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 104–143.
3. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 208 с.

Получено 15.12.93