УДК 517. 968

С. Г. Солодкий, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ЯДРАМИ

For Volterra equations with analytic kernels, an exact power order of complexity of an approximate solution is found. We establish that an optimum power order is realized by a simple iteration method, which uses the values of kernels and free terms in some points as an information. In addition, for classes of Volterra equations with infinitely differentiable kernels, we determine the minimum order of an error of direct methods and construct a method for which this order is realized.

Знайдено точний степеневий порядок складності наближеного розв'язку рівнянь Вольтерра з аналітичними ядрами. Встановлено, що оптимальний степеневий порядок реалізує метод простої ітерації, який використовує інформацію у вигляді значень ядра і вільного члена у точках. Крім того, для класів рівнянь Вольтерра з нескінченно диференційовними ядрами визначено мінімальний порядок похибки прямих методів і побудовано метод, що реалізує цей порядок.

1. Пусть C и $C(I^2)$ — пространства непрерывных соответственно на $I = [0, 1]$ и $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ функций с обычной нормой, а C^r, $r = 1, 2, \ldots,$ — пространство r раз непрерывно дифференцируемых на I функций с нормой $\|f\|_{C^r} = \|f\|_C + \|f^{(r)}\|_C$.

Следуя С. Л. Соболеву [1], введем в рассмотрение классы бесконечно дифференцируемых функций $\varphi \in C(I^2)$:

$$C(\rho, \kappa, K, \lambda) = \left\{ \varphi : \max_{t, \tau \in I} \left(\sum_{i+j=m} \frac{m!}{i!\, j!} \left| \varphi^{(i,j)}(t, \tau) \right|^2 \right)^{1/2} \le \rho m^{\kappa m + \lambda} K^m, \ \forall m \in \mathbb{Z}_+ \right\}. \tag{1}$$

Через $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\rho, \kappa, K, \lambda)$ обозначим классы интегральных операторов Вольтерра вида

$$Hz(t) = \int_0^t h(t, \tau) z(\tau)\, d\tau$$

с ядрами $h \in C(\rho, \kappa, K, \lambda)$ и для любого $H \in \mathcal{H}$ положим

$$\|H\| = \sup_{\|z\|_C \le 1} \max_{t \in I} \left| \int_0^t h(t, \tau) z(\tau)\, d\tau \right|.$$

Будем исследовать классы $\Psi_C^r = \Psi_C^r(\rho, \kappa, K, \lambda)$ интегральных уравнений Вольтерра II рода

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \tag{2}$$

с операторами H из $\mathcal{H}(\rho, \kappa, K, \lambda)$ при $\kappa \le 1$, $K \le e^{-1}$, $\lambda \le 1/2$ и свободными членами f, заполняющими шар $C^r(1)$ единичного радиуса в пространстве C^r.

Характерной особенностью уравнений из Ψ_C^r является сочетание свободных членов конечной гладкости и интегральных операторов с аналитическими ядрами. Такое сочетание для уравнений Вольтерра вполне естественно в отличие от уравнений Фредгольма, где оказывается возможной [2, с. 523] „регуляризация" свободного члена.

Впервые общая постановка задачи об оптимизации алгоритмов приближенного решения по сложности была сформулирована в монографии Дж. Трауба

Х. Вожьняковского [3, с. 100]. Оптимизации алгоритмов решения уравнений Вольтерра посвящены статьи [4 – 6], где рассматривались объекты конечной гладкости.

2. Сформулируем теперь задачу оптимизации по сложности алгоритмов решения уравнений (2).

Под способом задания информации об уравнениях класса Ψ_C^r будем понимать произвольный набор $T = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\mu}$ непрерывных функционалов, из которых $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ определены на множестве $\mathcal{H}$, а $\varphi_{l+1}, \ldots, \varphi_\mu$ — на множестве $C^r(1)$. Через $\mathcal{T}_\mu$ обозначим совокупность всех таких наборов T, состоящих не более чем из μ функционалов. При фиксированном наборе каждому уравнению (2) ставится в соответствие числовой вектор

$$T(H, f) = (\varphi_1(H), \ldots, \varphi_l(H), \varphi_{l+1}(f), \ldots, \varphi_\mu(f)), \tag{3}$$

называемый информацией об уравнении (2).

Под алгоритмом приближенного решения уравнений из Ψ_C^r будем понимать оператор, сопоставляющий вектору (3) в качестве приближенного решения уравнения (2) такую функцию $A(T(H, f), t) \in C$, которую можно однозначно задать некоторым числовым вектором $A(T(H, f))$ (например, сплайн или полином). При этом для построения $A(T(H, f), t)$, т. е. для вычисления компонент $A(T(H, f))$, разрешается выполнить лишь некоторое конечное число элементарных операций. К элементарным операциям (э. о.) относим простейшие арифметические и логические операции. Через $\mathcal{A}_N(T)$ обозначим множество алгоритмов A, которые используют информацию $T(H, f)$ и требуют для построения $A(T(H, f), t)$ выполнения не более N э. о. над компонентами $T(H, f)$. Рассматривая алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$, естественно полагать, что $T \in \mathcal{T}_\mu$ при $\mu \le N$. Как обычно, погрешностью алгоритма A на классе Ψ_C^r будем называть величину

$$e(\Psi_C^r, A, C) = \sup_{\substack{z = Hz + f \\ H \in \mathcal{H},\ f \in C^r(1)}} \| z - A(T(H, f), t) \|_C.$$

Положим

$$E_N(\Psi_C^r, C) = \inf_{T \in \mathcal{T}_N} \inf_{A \in \mathcal{A}_N(T)} e(\Psi_C^r, A, C).$$

Величина E_N показывает, какую минимальную погрешность можно получить на классе, выполнив N э. о. Таким образом, величина $E_N(\Psi_C^r, C)$ характеризует сложность приближенного решения уравнений из Ψ_C^r, определяемую соотношением $\operatorname{comp}(\Psi_C^r, \varepsilon) = \inf\{N : E_N(\Psi_C^r, C) < \varepsilon\}$. Т. е. $\operatorname{comp}(\Psi_C^r, \varepsilon)$ — минимальное число э. о., необходимых для приближенного решения уравнений из Ψ_C^r с наперед заданной точностью ε.

Поставим теперь в соответствие каждому оператору $H \in \mathcal{H}$ конечномерный оператор

$$H_n z(t) = \int_0^t L_{n,n} h(t, \tau) z(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где $L_{n,n}$ — двумерный интерполяционный оператор Лагранжа, построенный на сетке, состоящей из узлов Чебышева

$$(t_i, \tau_j) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)\right), \ i, j = 0, \ldots, n, \tag{5}$$

и сопоставляющий функции $h(t, \tau)$ функцию $L_{n,n}h(t, \tau)$, которая является результатом действия на $h(t, \tau)$ одномерных операторов Лагранжа: оператора L_n^τ по переменной τ и оператора L_n^t по переменной t. Причем операторы L_n^t и L_n^τ перестановочны в том смысле, что для любой функции $\varphi(t, \tau) \in C(I^2)$ $L_{n,n}\varphi = L_n^t L_n^\tau \varphi = L_n^\tau L_n^t \varphi$. Напомним, что операторы Лагранжа имеют вид

$$L_n f(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) \frac{\omega(t)}{(t-t_i)\omega'(t_i)},$$

$$L_{n,n}\varphi(t, \tau) = \sum_{i,j=0}^{n} \varphi(t_i, \tau_j) \frac{\omega(t)\omega(\tau)}{(t-t_i)\omega'(t_i)(\tau-\tau_j)\omega'(\tau_j)}, \tag{6}$$

$$\omega(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-t_i).$$

Отметим очевидное соотношение

$$\| L_{n,n} \|_{C(I^2)\to C(I^2)} \le 64 + \frac{64}{\pi}\ln n + \frac{16}{\pi^2}\ln^2 n, \tag{7}$$

которое непосредственно следует из известной оценки [7, с. 540]

$$\| L_n \|_{C\to C} \le 8 + \frac{4}{\pi}\ln n.$$

Пусть соотношение $a_n \ll b_n$ означает, что, начиная с некоторого n_0, выполняется $a_n \le c b_n$ (постоянная c не зависит от n). Кроме того, $a_n \asymp b_n$ будет означать, что одновременно выполняются соотношения $a_n \ll b_n$ и $b_n \ll a_n$.

Заменим теперь свободный член уравнения (2) на локальный сплайн минимального дефекта

$$S_{r-1}^m f(x) = \sum_{i=-r+1}^{n} c_i(f) B_{r-1,i}(x) \tag{8}$$

по равномерному разбиению

$$x_l = l/m, \quad l = \overline{0, m}, \tag{9}$$

построенный в виде линейной комбинации B-сплайнов порядка $r-1$ [8, с. 44]. При этом коэффициенты $c_i(f)$ определяются по значениям f в r узлах разбиения (9) из условия точности формулы $S_{r-1}^m f(t) = f(t)$ для многочленов степени не выше $r-1$. Известно [8, с. 321], что для любого $r = 1, 2, \ldots$

$$\| E - S_{r-1}^m \|_{C^r \to C} \le c_r m^{-r}, \tag{10}$$

где E — тождественный оператор.

Наряду с уравнением (2) будем рассматривать уравнение

$$\Xi(t) = H_n \Xi(t) + S_{r-1}^m f(t), \tag{11}$$

где H_n и S_{r-1}^m определены соответственно соотношениями (4) и (8).

Укажем теперь способ задания информации $\tilde{T}$ об уравнениях (2), определяемый набором функционалов

$$\tilde{T}(H, f) = (h(t_i, \tau_j), f(x_l), \ i, j = \overline{0, n}, \ l = \overline{0, m}),$$

где (t_i, τ_j) задаются (5), а x_l — (9). Очевидно, $\tilde{T} \in \mathcal{T}_N$ при $N \asymp n^2 + m$.

Далее рассмотрим алгоритм $\tilde{A}$, при котором каждому уравнению (2) из класса Ψ_C^r сопоставляется уравнение (11), а в качестве приближенного решения берется функция $\tilde{z}_k = \tilde{z}_k(\tilde{A}) = \tilde{A}(\tilde{T}(H, f), t)$, определяемая итеративным процессом

$$\begin{gathered} \tilde{z}_i(t) = H_n \tilde{z}_{i-1}(t) + S_{r-1}^m f(t), \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ \tilde{z}_0(t) = S_{r-1}^m f(t), \end{gathered} \tag{12}$$

где значение k будет определено ниже из условия $\tilde{A} \in \mathcal{A}_N(T)$.

3. Сформулируем основное утверждение настоящей работы.

Теорема 1. *При* $r = 1, 2, \dots$

$$N^{-r} \ll E_N(\Psi_C^r, C) \ll N^{-r} \ln^{6r} N,$$

$$\varepsilon^{-1/r} \ll \operatorname{comp}(\Psi_C^r, \varepsilon) \ll \varepsilon^{-1/r} \ln^6 1/\varepsilon, \quad N \asymp \varepsilon^{-1/r} + \ln^2 1/\varepsilon.$$

При этом для класса Ψ_C^r *оптимальный степенной порядок сложности доставляют информация* $\tilde{T}$ *и алгоритм* $\tilde{A}$ (12).

Для доказательства теоремы потребуется ряд вспомогательных утверждений, которые будут приведены ниже.

Вначале оценим число э. о., необходимых для определения $\tilde{z}_k$. Подсчитаем прежде всего количество э. о., которые требуется выполнить для представления $L_{n,n} h$ (6) в стандартном виде

$$L_{n,n} h(t, \tau) = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_{ij} t^i \tau^j.$$

Для этого нужно построить полиномы $(O(n^3)$ э. о.)

$$\omega_i(t) = \frac{\omega(t)}{(t - t_i)\omega'(t_i)}, \quad i = \overline{0, n},$$

а затем согласно (6) просуммировать всевозможные произведения $\omega_i(t)\omega_j(t)$, что достигается за $O(n^4)$ э. о. Отметим, что на построение сплайна (8) требуется $O((m + r)r)$ э. о. Для удобства вычислений представим $S_{r-1}^m f(t)$ в виде суммы разрывных кусочно-полиномиальных функций

$$\tilde{S}_{r-1}^m f(t) = \sum_{l=1}^m F_{r-1}^l(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{13}$$

где $F_{r-1}^l(t)$ является на отрезке $\Delta^l = [(l-1)/m, l/m]$ многочленом порядка $r - 1$, а вне Δ^l — тождественным нулем. (Причем, как видно из (13), в $\tilde{S}_{r-1}^m f$ мы включаем только те F_{r-1}^l, носители которых $\Delta^l \in I$.) Поскольку каждая из m функций F_{r-1}^l является линейной комбинацией r B-сплайнов $B_{r-1,i}$, то число э. о., требуемых для построения $\tilde{S}^m_{r-1}f$, равно по порядку $O(mr^2)$.

Подсчитаем число э. о., необходимых для определения $\tilde{z}_1$, по формуле

$$\tilde{z}_1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{(l-1)/m}^{t} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}\tau^j F^l_{r-1}(\tau)d\tau + \tilde{S}^m_{r-1}f(t). \tag{14}$$

1) В результате всевозможных произведений

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}\tau^j F^l_{r-1}(\tau), \quad i = \overline{0, n}, \quad l = \overline{1, m},$$

получаются введенные нами сплайны $F^{l,i}_{n+r-2}$ порядка $n+r-2$. На эту операцию затрачивается $O(mn^2r)$ э. о.

2) После интегрирования $(O(m(n+r)n)$ э. о.)

$$\sum_{l=1}^{m} \int\limits_{(l-1)/m}^{t} F^{l,i}_{n+r-2}(\tau)d\tau, \quad i = \overline{0, n},$$

получаем суммы вида

$$\sum_{l=1}^{m} \chi^{l,i}_{n+r-1}(t), \quad i = \overline{0, n}, \tag{15}$$

где $\chi^{l,i}_{n+r-1}(t)$ является на отрезке Δ^l многочленом порядка $n+r-1$, при $t \le (l-1)/m$ — тождественным нулем, а при $t > l/m$ совпадает со значением $\chi^{l,i}_{n+r-1}(l/m)$.

3) За $O(mn)$ э. о. суммы (15) принимают вид

$$\sum_{l=1}^{m} F^{l,i}_{n+r-1}(t), \quad i = \overline{0, n}. \tag{16}$$

4) Согласно (14) $\tilde{z}_1(t)$ окончательно получаем путем умножения сумм (16) на мономы t^i, что требует $O(m(n+r)n)$ э. о., и прибавления к построенному агрегату $\tilde{S}^m_{r-1}f(t)$ $(O(mr)$ э. о.). При этом $\tilde{z}_1$ принимает вид

$$\tilde{z}_1(t) = \sum_{l=1}^{m} F^l_{2n+r-2}(t), \tag{17}$$

а суммарный объем вычислений для построения (17) равен $O(mn^2)$ э. о.

Последующие шаги итерации повторяют пункты 1 – 4, причем на i-м шаге строится решение

$$\tilde{z}_i(t) = \sum_{l=1}^{m} F^l_{(2n-1)i+r-1}(t)$$

за $O(mn^2i^3)$ э. о. Общее же число э. о., затраченных на итерационный процесс (12), составляет $O(mn^2k^4)$. Таким образом, справедливо такое утверждение.

Предложение 1. *При алгоритме $\tilde{A}$ для представления приближенного решения $\tilde{z}_k(\tilde{A}) = \tilde{A}(\tilde{T}(H, f), t)$ любого уравнения из Ψ^r_C в виде суммы разрывных кусочно-полиномиальных функций $F^l_{(2n-1)k+r-1}$ необходимо выполнить не более $O(mn^2k^4 + n^4)$ э. о. над значениями функционалов из набора $\tilde{T} \in \in \mathcal{T}_N$, $N \asymp O(m+n^2)$.*

4. Оценим теперь погрешность алгоритма $\tilde{A}$ на классе уравнений Ψ_C'. Для этого установим следующие соотношения.

Лемма 1. *Для любого* $H \in \mathcal{H}(\rho, \kappa, K, \lambda)$, $\kappa \le 1$, $K \le e^{-1}$, $\lambda \le 1/2$,

$$\|H - H_n\|_{C \to C} \le \frac{\rho_n}{4^n}, \quad \rho_n = \rho\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n+1}}\right). \tag{18}$$

Доказательство. Разложим произвольную функцию $f \in C^{n+1}(1)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(t) = P_n(t) + \int_0^1 \mathcal{K}_n(t-\tau) f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau, \quad \mathcal{K}_n(u) = \frac{u_+^n}{n!}.$$

Тогда

$$L_n f(t) = P_n(t) + \int_0^1 L_n^t(\mathcal{K}_n)(t,\tau) f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau,$$

$$f(t) - L_n f(t) = \int_0^1 G_n(t,\tau) f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau,$$

$$G_n(t,\tau) = \mathcal{K}_n(t-\tau) - L_n^t(\mathcal{K}_n)(t,\tau).$$

Следовательно,

$$\|f - L_n f\|_C = \left\| \int_0^1 G_n(t,\tau) f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \right\|_C \le \|G_n\|_{C,1}, \tag{19}$$

где

$$\|\varphi\|_{C,1} = \max_{t \in I} \int_0^1 |\varphi(t,\tau)|\, d\tau.$$

Покажем теперь, что оценка (19) неулучшаема на $C^{n+1}(1)$. Для этого возьмем точку $t^* \in I$ такую, что

$$\|G_n(t^*,\cdot)\|_1 = \max_{t \in I} \|G_n(t,\cdot)\|_1 = \|G_n\|_{C,1}$$

и положим $G_n^*(\tau) = G_n(t^*,\tau)$, $g^*(\tau) = \operatorname{sgn} G_n^*(t)$, $0 \le \tau \le 1$. Очевидно,

$$\int_0^1 G_n^*(\tau) g^*(\tau)\, d\tau = \|G_n\|_{C,1}.$$

Тогда функция $f^*(t) : (f^*)^{(n+1)}(t) = g^*(t) = \operatorname{sgn} G_n^*(t)$ удовлетворяет соотношению $\|f^* - L_n f^*\|_C = \|G_n\|_{C,1}$. И хотя f^* не принадлежит C^{n+1} в силу разрывности $g^*(t)$, однако, действуя по обычной в таких случаях схеме (с использованием функции Стеклова), нетрудно построить для любого $\varepsilon > 0$ функцию $f_\varepsilon^* \in C^{n+1}(1)$, для которой $\|f_\varepsilon^* - L_n f_\varepsilon^*\|_C$ будет на $O(\varepsilon)$ отличаться от $\|G_n\|_{C,1}$. Таким образом, получаем

$$\sup_{f \in C^{n+1}(1)} \|f - L_n f\|_C = \|G_n\|_{C,1}.$$

В то же время справедлива следующая оценка [9, с. 82]:

$$\sup_{f\in C^{n+1}(1)} \|f-L_nf\|_C \le \frac{1}{4^n(n+1)!}.$$

Откуда непосредственно вытекает

$$\|G_n\|_{C,1} \le \frac{1}{4^n(n+1)!}. \tag{20}$$

Следуя [8, с. 326], рассмотрим разложение произвольной функции $h\in C(\rho, 1, e^{-1}, 1/2)$

$$h(t,\tau)-L_{n,n}h(t,\tau) = (E-L_n^t)h(t,\tau)+(E-L_n^\tau)h(t,\tau)-$$

$$-(E-L_n^t)(E-L_n^\tau)h(t,\tau) = \int_0^1 G_n(t,u)h^{(n+1,0)}(u,\tau)\,du+$$

$$+\int_0^1 G_n(\tau,v)h^{(0,n+1)}(t,v)\,dv-\int_0^1\int_0^1 G_n(t,u)G_n(\tau,v)h^{(n+1,n+1)}(u,v)\,du\,dv,$$

$$\|h-L_{n,n}h\|_{C(I^2)} \le \|G_n\|_{C,1}\max_{t,\tau\in I}\left(|h^{(n+1,0)}(t,\tau)|+|h^{(0,n+1)}(t,\tau)|\right)+$$

$$+\|G_n\|_{C,1}^2\max_{t,\tau\in I}|h^{(n+1,n+1)}(t,\tau)| \le \|G_n\|_{C,1}\frac{\sqrt{2}\rho(n+1)^{n+3/2}}{e^{n+1}}+$$

$$+\|G_n\|_{C,1}^2\frac{\rho(2(n+1))^{2(n+1)+1/2}}{e^{2(n+1)}}.$$

Отсюда, используя формулу Стирлинга

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,e^{\gamma/12n},\quad 0\le\gamma\le 1,$$

и соотношение (20), получаем (18). Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого* $H\in\mathcal{H}$

$$\|(E-H)^{-1}\|_{C\to C} \le e^{\rho}, \tag{21}$$

$$\|(E-H_n)^{-1}\|_{C\to C} \le c_\rho. \tag{22}$$

Доказательство. Нетрудно подсчитать (см., например, [2, с. 508]), что для любого $H\in\mathcal{H}$ при $\nu = 0, 1, \ldots$ справедливо соотношение

$$\|H^\nu\|_{C\to C} = \sup_{\|f\|_C\le 1}\|H^\nu f\|_C =$$

$$= \sup_{\|f\|_C\le 1}\max_{t\in I}\left|\int_0^t h(t,t_1)\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{\nu-1}} h(t_{\nu-1},t_\nu)f(t_\nu)dt_\nu\ldots dt_1\right| \le \frac{\rho^\nu}{\nu!}. \tag{23}$$

Тогда

$$\|(E-H)^{-1}\|_{C\to C} \le \left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}H^\nu\right\|_{C\to C} \le \sum_{\nu=0}^{\infty}\|H^\nu\|_{C\to C} \le \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^\nu}{\nu!} = e^\rho.$$

Из (18) и теоремы о разрешимости приближенного уравнения [2, с. 517] следует существование зависящей лишь от ρ константы c_ρ такой, что, начиная с некоторого n, для любого $H \in \mathcal{H}$

$$\|(E-H_n)^{-1}\|_{C\to C} \le \frac{\|(E-H)^{-1}\|_{C\to C}}{1-\|H-H_n\|_{C\to C}\|(E-H)^{-1}\|_{C\to C}} \le$$

$$\le e^\rho\left(1-\frac{\rho_n e^\rho}{4^n}\right)^{-1} \le c_\rho.$$

Лемма доказана.

Выразим теперь погрешность алгоритма $\tilde{A}$ через погрешность решения приближенного уравнения (11) и погрешность итерационного процесса (12): $\|z-\tilde{z}_k\|_C \le \|z-\tilde{z}\|_C + \|\tilde{z}-\tilde{z}_k\|_C$ и вычислим значения величин n, m, и k из соотношений $\|z-\tilde{z}\|_C < \varepsilon/2$, $\|\tilde{z}-\tilde{z}_k\|_C < \varepsilon/2$.

Из (2) и (11) находим

$$z-\tilde{z} = (E-H)^{-1}f-(E-H_n)^{-1}S^m_{r-1}f =$$

$$= (H-H_n)(E-H)^{-1}(E-H_n)^{-1}f+(E-H_n)^{-1}(f-S^m_{r-1}f).$$

Учитывая (10), (18), (21), (22), имеем

$$\|z-\tilde{z}\|_C \le \frac{\rho_n e^\rho c_\rho}{4^n} + c_\rho c_r m^{-r}.$$

Откуда получаем искомые оценки для m и n:

$$m \asymp (1/\varepsilon)^{1/r}, \quad n \asymp \ln 1/\varepsilon. \tag{24}$$

Для погрешности $w_k = \tilde{z}-\tilde{z}_k$, полученной на k-м шаге итерации (12), справедлива оценка

$$|w_k(t)| = |\tilde{z}(t)-\tilde{z}_k(t)| = \left|\int_0^t L_{n,n}h(t,\tau)(\tilde{z}(\tau)-\tilde{z}_{k-1}(\tau))d\tau\right| \le$$

$$\le \rho\|L_{n,n}\|_{C\to C}\int_0^t |w_{k-1}(\tau)|d\tau \le \rho^k\|L_{n,n}\|^k_{C\to C}\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{k-1}}|w_0(t_k)|dt_k\dots dt_1 \le$$

$$\le \|L_{n,n}\|^k_{C\to C}\|\tilde{z}-S^m_{r-1}f\|_C\frac{t^k\rho^k}{k!}.$$

С учетом (10) и (22) для любой $f\in C^r(1)$ имеем

$$\|\tilde{z}-S^m_{r-1}f\|_C = \|((E-H_n)^{-1}-E)S^m_{r-1}f\|_C \le (1+c_\rho)(1+c_r).$$

Тогда в силу (7) получаем оценку минимального количества шагов итерации

$$k \asymp \ln 1/\varepsilon. \tag{25}$$

Из предложения 1 и оценок (24), (25) вытекает $e(\Psi^r_C, \tilde{A}, C) \ll N^{-r}\ln^{6r}N$.

Для оценки снизу величины E_N нам потребуется предтабличный поперечник, введенный К. И. Бабенко [10, с. 182]:

$$\delta_N(\mathfrak{M}, C) = \inf_{\varphi:\mathfrak{M}\to R_N}\sup_{x\in\mathfrak{M}}\operatorname{diam}[\varphi^{-1}\circ\varphi(x)],$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторый компакт в C, точная нижняя грань берется по всевозможным отображениям $\mathfrak{M}$ в N-мерное евклидово пространство R_N, а

$$\operatorname{diam}[\varphi^{-1} \circ \varphi(x)] = \sup_{z, y \in \varphi^{-1} \circ \varphi(x)} \| z - y \|_C.$$

Воспользуемся далее вспомогательным утверждением из [4], которое в принятых терминах можно сформулировать следующим образом.

Лемма 3. *При* $r = 1, 2, \ldots$ *для сложности алгоритмов решения уравнений из класса* Ψ_C^r *справедлива оценка* $E_N(\Psi_C^r, C) \succ\!\succ \delta_N(C^r(\beta), C)$, *где* $\beta = (1 + \rho)^{-1}$.

В силу [10, с. 184; 11, с. 261] для любого β имеем

$$\delta_N(C^r(\beta), C) \succ\!\succ N^{-r}. \tag{26}$$

Остается заметить, что теорема 1 непосредственно вытекает из предложения 1, леммы 3 и соотношения (26).

5. Рассмотрим теперь вопрос об оптимизации по точности прямых методов решения уравнений Вольтерра с ядрами из классов (1). Полученные нами результаты являются следствием некоторых общих фактов, которые приводятся ниже.

Итак, пусть X — гильбертово пространство и задана последовательность банаховых пространств $Y_0 = X \supset Y_1 \supset \ldots \supset Y_n \supset \ldots$ таких, что $\|\cdot\|_X \le \|\cdot\|_1 \le \ldots \le \|\cdot\|_n \le \ldots$, где $\|\cdot\|_n$ означает норму в пространстве Y_n. Рассмотрим класс непрерывных линейных операторов

$$\mathcal{H}_q^p = \mathcal{H}_q^p(\alpha, \beta) = \{ H : Y_r \to Y_{r+q}, \| H \|_{r \to r+1} \le \alpha_r,$$

$$\| (E - H)^{-1} \|_{r \to r} \le \beta_r, \ r = \overline{0, p} \}, \quad \alpha = \{\alpha_r\}, \quad \beta = \{\beta_r\}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Операторы из класса $\mathcal{H}_q^p$ будем называть сглаживающими. Смысл этого определения поясним на следующем примере. Если в качестве Y_r возьмем пространство r раз дифференцируемых функций и подействуем на них операторами из $\mathcal{H}_q^p$, то мы и в самом деле повысим на q гладкость этих функций. Через $\Psi_{q,r}^p = \Psi_{q,r}^p(\alpha, \beta) = [\mathcal{H}_q^p, Y_r(1)]$ обозначим класс операторных уравнений II рода

$$z = Hz + f, \tag{27}$$

однозначно разрешимых при любых $H \in \mathcal{H}_q^p$ и $f \in Y_r(1)$, $r \le p$.

Под прямым методом решения (27) понимают правило D, по которому каждому оператору $H \in \mathcal{H}_q^p$ ставится в соответствие конечномерный оператор $H_N = H_N(D)$, $\operatorname{rank} H_N = N$, такой, что уравнение $w_N = H_N w_N + f$ однозначно разрешимо, а в качестве приближенного решения (27) рассматривается $w_N = w_N(D)$. При фиксированном N множество всех прямых методов D обозначим через $\mathcal{D}_N$. Под погрешностью прямого метода D на классе $\Psi_{q,r}^p$ будем понимать величину

$$e(\Psi_{q,r}^p, D, X) = \sup_{\substack{z = Hz + f \\ H \in \mathcal{H}_q^p, \ f \in Y_r(1)}} \| z - w_N(D) \|_X.$$

Следуя [12], исследуем оптимизацию по точности прямых методов решения

(27) в смысле величины

$$\Theta_N(\Psi^p_{q,r}, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_N} e(\Psi^p_{q,r}, D, X).$$

Сформулируем далее основной результат работы [13], используемый нами ниже.

Теорема 2 *(о сглаживающих операторах). Пусть последовательность подпространств* $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$, $\dim F_n = M(n)$ *такова, что, начиная с некоторого* n_1, *ортопроекторы* $P_n : X \to F_n$ *удовлетворяют условию* $\alpha_0 \beta_0 \| E - P_n \|_{1 \to 0} \le \nu < 1$. *Кроме того, пусть для всех* $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо включение* $F_{n_1} \subset Y_{n_2}$. *Тогда выполняются следующие оценки:*

$$\left(\max_{0 \le j \le p} \left\{ \| P_n \|_{j \to j+q} \right\} \| P_n \|_{0 \to r} \right)^{-1} \ll \Theta_N(\Psi^p_{q,r}, X) \ll \| E - P_n \|_{q \to 0} \| E - P_n \|_{r \to 0},$$

где $N = 2M(n)$. *Оценку сверху реализует прямой метод* D, *при котором каждому оператору* $H \in \mathcal{H}^p_q$ *ставится в соответствие оператор*

$$\tilde{H}_N = P_n H + H P_n - P_n H P_n, \quad \operatorname{rank} \tilde{H}_N = N.$$

В качестве X возьмем пространство L_2 функций, суммируемых в квадрате на I с обычной нормой. Кроме того, в качестве Y_r будет фигурировать соболевское пространство W^r_2 с нормой

$$\| f \|_r = \sum_{i=0}^{r-1} \max_I |f^{(i)}(t)| + \| f^{(r)} \|_{L_2}.$$

Обозначим через $\Psi_{1,r} = \Psi_{1,r}(\rho)$ класс интегральных уравнений Вольтерра (2) с операторами $H \in \mathcal{H} = \mathcal{H}(\rho, \kappa, K, \lambda)$ и свободными членами из единичного шара $W^r_2(1)$ в пространстве W^r_2.

Чтобы воспользоваться теоремой о сглаживающих операторах для получения верхней оценки Θ_N, нужно показать, что при любых p $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^p_1$, т. е. для всех операторов $H \in \mathcal{H}$ выполняются условия:

1) $H : W^r_2 \to W^{r+1}_2, \quad \forall r = 0, 1, \ldots$;

существуют такие константы α_r, β_r, не зависящие от H, что:

2) $\| H \|_{r \to r+1} \le \alpha_r$;

3) $\| (E - H)^{-1} \|_{r \to r} \le \beta_r$.

Возьмем произвольные $H \in \mathcal{H}$ и $f \in W^r_2(1)$. Выполнимость условия 1 очевидна в силу включения $(d/dt) H f(t) \in W^r_2$, которое следует из соотношения

$$\frac{d}{dt} H f(t) = h(t,t) f(t) + \int_0^1 h^{(1,0)}(t, \tau) f(\tau) \, d\tau.$$

Далее, при любом $q = 0, 1, \ldots$ имеем

$$(H f(t))^{(q)} = \sum_{i=1}^{q} (h^{(i-1,0)}(t,t) f(t))^{(q-i)} + \int_0^t h^{(q,0)}(t, \tau) f(\tau) \, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q-i} \binom{j}{q-i} f^{(j)}(t) \sum_{k=0}^{q-i-j} \binom{k}{q-i-j} h^{(i+k-1,\, q-i-j-k)}(t, t) +$$

$$+ \int_0^t h^{(q,0)}(t, \tau) f(\tau) d\tau. \tag{28}$$

Т. е. производная $(Hf(t))^{(q)}$ выражается через производные $f(t)$ порядка меньше q и производные $h^{(q,0)}$, $h^{(i,j)}$, $i+j<q$.

Для агрегата

$$H^{\nu} f(t) = \int_0^t h(t, t_1) \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{\nu-1}} h(t_{\nu-1}, t_{\nu}) f(t_{\nu}) dt_{\nu} \ldots dt_1 \tag{29}$$

при любом $\nu = 0, 1, \ldots$ аналогично (23) получаем оценку

$$\| H^{\nu} \|_{L_2 \to L_2} \le \frac{\rho^{\nu}}{(\nu-1)!}.$$

Из представлений (28), (29) легко видеть, что производная $(H^{\nu} f)^{(q)}$ выражается через производные $h^{(q,0)}$, $h^{(i,j)}$, $i+j<q$, и агрегаты $H^{\nu-i} f$, $0 \le i \le \min\{\nu, q\}$, а также, в случае $q \ge \nu$, через производные функции f до порядка $q-\nu$ включительно. Общее же число слагаемых в разложении $(H^{\nu} f)^{(q)}$ зависит лишь от q.

Таким образом, для $Z = C$, L_2 получаем

$$\| (H^{\nu} f)^{(q)} \|_Z \le d_q \frac{\rho^{\nu}}{(\nu-q-1)!} \|f\|_r,$$

где константа d_q зависит только от q и параметров κ, K, λ, входящих в определение класса $\mathcal{H}$, а $n! = 1$ при $n = 0, -1, \ldots$. Но тогда

$$\|H\|_{r \to r+1} = \sup_{f \in W_2^r(1)} \left(\sum_{q=0}^{r} \|(Hf)^{(q)}\|_C + \|(Hf)^{(r+1)}\|_{L_2} \right) \le \rho \sum_{q=0}^{r+1} d_q = d_r'.$$

Если положить $\alpha_r = d_r'$, то получаем условие 2.

Оценим теперь выражения

$$\sum_{\nu=0}^{q} \| (H^{\nu} f)^{(q)} \|_Z \le d_q \sum_{\nu=0}^{q} \rho^{\nu} \|f\|_r,$$

$$\sum_{\nu=q+1}^{\infty} \| (H^{\nu} f)^{(q)} \|_Z \le d_q \rho^{q+1} \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{\rho^{\nu-q-1}}{(\nu-q-1)!} \|f\|_r = d_q \rho^{q+1} e^{\rho} \|f\|_r.$$

Отсюда, полагая $Z = C$ при $q < r$ и $Z = L_2$ при $q = r$, имеем

$$\| (E-H)^{-1} \|_{r \to r} \le \sup_{f \in W_2^r(1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{r} \| (H^{\nu} f)^{(q)} \|_Z =$$

$$= \sup_{f \in W_2^r(1)} \left(\sum_{q=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{q} \|(H^{\nu} f)^{(q)}\|_Z + \sum_{q=0}^{r} \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \|(H^{\nu} f)^{(q)}\|_Z \right) \le$$

$$\leq \sum_{q=0}^{r} d_q \left(\rho^{q+1} e^{\rho} + \sum_{\nu=0}^{q} \rho^{\nu} \right) = d_r''.$$

Если теперь взять $\beta_r = d_r''$, то получаем условие 3.

Таким образом, мы показали, что класс $\mathcal{H}$ состоит из сглаживающих операторов с коэффициентом сглаживания $q = 1$.

Заметим далее, что если в качестве F_n использовать подпространство алгебраических полиномов степени $n-1$ $(M(n) = n)$ с базисом в виде многочленов Лежандра, перенесенных на отрезок I, то под $P_n f$ в теореме 2 естественно понимать частную сумму Фурье – Лежандра функции f, для которой справедлива оценка

$$\| E - P_n \|_{r \to 0} \leq c_r n^{-r}, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

где постоянная c_r зависит лишь от r.

Теорема 3. *При* $r = 1, 2, \ldots$ $\Theta_n(\Psi_{1,r}, L_2) \asymp n^{-r-1}$. *Оптимальным по порядку является прямой метод* $\tilde{D}$.

Доказательство. Верхняя оценка следует из теоремы 2 и соотношения (30). Требуемая оценка снизу установлена в [6].

Замечание. Из теоремы 3 видно, что сложность решения уравнений из класса $\Psi_{1,r}$ прямыми методами не может быть меньше по порядку, чем величина $O(\varepsilon^{-2/(r+1)})$. С другой стороны, проведя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, легко получить аналогичные оценки, в частности, $\operatorname{comp}(\Psi_{1,r}, \varepsilon) \prec\prec \varepsilon^{-1/r} \ln^6 1/\varepsilon$. Таким образом, из приведенных нами оценок следует, что среди всех приближенных алгоритмов прямые методы могут быть оптимальными по сложности на классе $\Psi_{1,r}$ только в случае минимальной гладкости свободного члена, т. е. при $r = 1$.

Данная работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Государственом комитете Украины по вопросам науки и технологий.

1. *Соболев С. Л.* Сходимость кубатурных формул на различных классах периодических функций // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. семинара С. Л. Соболева. – Новосибирск, 1976. – № 1. – С. 122 – 140.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
3. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
4. *Pereverzev S., Scharipov C.* Information Complexity of Equations of the Second Kind with Compact Operators in Hilbert Space // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 176 – 202.
5. *Переверзев С. В., Махкамов К. Ш.* Галеркинская информация, гиперболический крест и сложность операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 5. – С. 639 – 648.
6. *Переверзев С. В., Урумбаев А. Н.* Об оптимальных прямых методах решения уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 4. – С. 74 – 84.
7. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 686 с.
8. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1934. – 316 с.
10. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
11. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
12. *Переверзев С. В.* Об оптимизации адаптивных методов приближенного решения интегральных уравнений // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 6. – С. 1304 – 1308.
13. *Pereverzev S. V., Solodki S. G.* Optimierung direkter Verfahren für Gleichungen 2. Art mit Glättungsoperatoren // Math. Nachr. – 1991. – **153**. – S. 101 – 108.

Получено 26.04.93