УДК 517.5

М. Ш. Шабозов, канд. физ.-мат. наук (Тадж. ун-т, Душанбе)

О ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ БИЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

We consider the problems of approximation of functions from the classes $W^{r,s}H_\omega$ and $W^{r,s}H^{\omega,2}$ by bilinear splines. For certain values of r and s, exact estimates of an error are obtained.

Розглядаються питання наближення функцій із класів $W^{r,s}H_\omega$ і $W^{r,s}H^{\omega,2}$ білінійними сплайнами. Знайдені точні оцінки похибки для деяких значень r і s.

1. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная в области $G = [0, 1] \times [0, 1]$ функция. Через $C^{r,s}(G)$, где r, s — целые неотрицательные числа, обозначим класс функций f, имеющих непрерывные частные производные

$$f^{(i,j)}(x, y) = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i \le r, \quad j \le s.$$

При $r = s = 0$ полагаем $C^{0,0}(G) = C(G)$. Далее, как обычно,

$$\|\varphi\|_C = \|\varphi\|_{C(G)} = \max\{|\varphi(x, y)| : (x, y) \in G\}.$$

Величина

$$\omega(f, t, \tau) = \sup\{|f(x', y') - f(x'', y'')| : (x', y'), (x'', y'') \in G,$$
$$|x' - x''| \le t, |y' - y''| \le \tau\}$$

называется полным модулем непрерывности $f \in C(G)$. Через $W^{r,s}H_\omega = W^{r,s}H_\omega(G)$ обозначим класс функций $f \in C^{r-1,s-1}(G)$, $r, s \ge 1$, у которых производная $f^{(r,s)}(x, y)$ кусочно-непрерывна на G и удовлетворяет условию $\omega(f^{(r,s)}; t, \tau) \le \omega(t, \tau)$, где $\omega(t, \tau)$ — некоторый модуль непрерывности. Параллельно будем рассматривать класс $W^{r,s}H^{\omega,2}$ функций $f \in C^{r-1,s-1}(G)$, $r, s \ge 1$, у которых производная $f^{(r,s)}(x, y)$ кусочно-непрерывна на G и для любых двух точек $M'(x', y')$, $M''(x'', y'') \in G$, удовлетворяющих неравенству

$$|f^{(r,s)}(M') - f^{(r,s)}(M'')| \le \omega[\rho(M'; M'')],$$

где $\rho(M'; M'') = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$, а $\omega(t)$ — заданный на отрезке $0 \le t \le \sqrt{2}$ модуль непрерывности. Условимся в дальнейшем вместо $W^{0,0}H_\omega$ и $W^{0,0}H^{\omega,2}$ писать просто H_ω и $H^{\omega,2}$.

Зададим в области G сетку $\Delta_{m,n} = \Delta_m^x \times \Delta_n^y$, где $\Delta_m^x : x_i = i/m$, $i = \overline{0, m}$; $\Delta_n^y : y_j = j/n$, $j = \overline{0, n}$. Поставим в соответствие каждой функции $f \in C(G)$ функцию $S_{1,1}(f; x, y) \in C(G)$, однозначно определенную условиями:

1) на каждом частичном прямоугольнике

$$G_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad i = \overline{0, m-1}; \quad j = \overline{0, n-1},$$

функция $S_{1,1}(f; x, y)$ — алгебраический многочлен первой степени по x и по y;

2) $$S_{1,1}(f; x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad i = \overline{0, m}; \quad j = \overline{0, n}.$$

Функции $S_{1,1}(f; x, y)$ называют интерполяционными сплайнами первой степени двух переменных или билинейными сплайнами (см., например, [1, 2]).

Для $(x, y) \in G_{i,j}$, $i = \overline{0, m-1}$; $j = \overline{0, n-1}$, справедливо представление

$$S_{1,1}(f; x, y) = \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} f(x_{i+p}, y_{j+k}) H_{p,i}(x) \cdot H_{k,j}(y), \tag{1}$$

где

$$H_{0,i}(x) = m \cdot (x_{i+1} - x),\ H_{0,j}(y) = n \cdot (y_{j+1} - y),$$
$$\sum_{p=0}^{1} H_{p,i}(x) = \sum_{k=0}^{1} H_{k,j}(y) = 1. \tag{2}$$

Положим

$$F(x_i, y_j) = \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} (-1)^{p+k} f(x_{i+p}, y_{j+k}), \quad i = \overline{0, m-1}; \quad j = \overline{0, n-1},$$

$$F_j(x_i, y) = \sum_{k=0}^{1} H_{k,j}(y)[f(x_{i+1}, y_{j+k}) - f(x_i, y_{j+k})], \quad i = \overline{0, m-1}; \quad j = \overline{0, n-1},$$

$$F_i(x, y_j) = \sum_{p=0}^{1} H_{p,i}(x)[f(x_{i+p}, y_{j+1}) - f(x_{i+p}, y_j)], \quad i = \overline{0, m-1}; \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Ясно, что производные $S_{1,1}^{(r,s)}(f; x, y)$, $r, s = 0, 1$, в обычном смысле не существуют и на множествах $A_i = \{(x, y): x = x_i, 0 \le y \le 1\}$, $i = \overline{0, m}$, и $B_j = \{(x, y): y = y_j, 0 \le x \le 1\}$, $j = \overline{0, n}$, имеют разрывы. В дальнейшем с учетом доопределения их на всей области G полагаем

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y) = m \cdot F_j(x_i, y), \qquad S_{1,1}^{(0,1)}(f; x, y) = n \cdot F_i(x, y_j),$$
$$S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) = m \cdot n \cdot F(x_i, y_j), \quad i = \overline{0, m-1}; \quad j = \overline{0, n-1}.$$

2. В настоящей статье рассматриваются вопросы приближения функций классов $W^{r,s}H_{\omega}$ и $W^{r,s}H^{\omega,2}$, билинейными сплайнами $S_{1,1}(f; x, y)$, т. е. находится точное значение величины

$$\mathcal{E}^{(l,q)}(\mathfrak{M}) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| e^{(l,q)}(f; \cdot, \cdot) \|_C \tag{3}$$

для различных значений l и q, где

$$e^{(l,q)}(f; x, y) \overset{\text{def}}{=} f^{(l,q)}(x, y) - S_{1,1}^{(l,q)}(f; x, y), \quad l, q = 0, 1,$$

— погрешность интерполяции, а $\mathfrak{M}$ — какой-нибудь из классов, определенных выше.

Для произвольного выпуклого модуля непрерывности в [3] найдено точное значение величины (3) для класса H_{ω}:

$$\mathcal{E}(H_{\omega}) = \omega\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}\right), \tag{4}$$

а в [4] доказано, что

$$\mathcal{E}(H^{\omega,2}) = \omega\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}}\right). \qquad (5$$

В [5] найдено точное значение (3) при $l = q = 1$ для класса $W^{(1,1)}H_\omega$:

$$\mathcal{E}^{(1,1)}(W^{(1,1)}H_\omega) = m \cdot n \cdot \int_0^{1/m}\int_0^{1/n} \omega(t,\tau)\,dt\,d\tau, \qquad (6)$$

где $\omega(t,\tau)$ — произвольный модуль непрерывности.

Утверждения (4)–(6) в некотором смысле являются двумерными аналогами основных результатов, приведенных в [6, 7]. Осталось найти точное значение (3) при $l = q = 1$ для класса $W^{(1,1)}H^{\omega,2}$ и $l = 1$, $q = 0$ и $l = 0$, $q = 1$ для обоих классов функций. Для этих значений l и q точное значение величины (3) найдено в данной работе.

При доказательстве основных результатов используются свойства разделенных разностей функции $f(x,y)$ по обеим переменным (см., например, [8]). В [5] для $(x,y)\in G_{i,j}$, $i=\overline{0,m-1}$; $j=\overline{0,n-1}$, получено представление

$$e_{i,j}^{(1,1)}(f;x,y) = f^{(1,1)}(x,y) - \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)f(x_{i-p+1},x;\ y_{j-k+1},y) =$$

$$= \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\times$$

$$\times \int_0^1\int_0^1 [f^{(1,1)}(x,y) - f^{(1,1)}(x+t(x_{i-p+1}-x),\, y+\tau(y_{j-k+1}-y))]\,dt\,d\tau. \qquad (7)$$

С учетом представления (7) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\omega(\delta)$ — произвольный модуль непрерывности. Тогда выполняются следующие равенства:*

$$\mathcal{E}^{(1,1)}(W^{(1,1)}H^{\omega,2}) = m\cdot n\cdot \int_0^{1/m}\int_0^{1/n}\omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dt\,d\tau, \qquad m,n = 1,2,\ldots\,.$$

Доказательство. Из принадлежности $f\in W^{(1,1)}H^{\omega,2}$ с учетом равенства (7) следует

$$|e_{i,j}^{(1,1)}(f;x,y)| \le \Phi_{i,j}(x,y), \quad (x,y)\in G_{i,j}, \quad i=\overline{0,m-1};\ \ j=\overline{0,n-1}, \qquad (8)$$

где

$$\Phi_{i,j}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} m\cdot n\cdot \int_0^{H_{p,i}(x)/m}\int_0^{H_{k,j}(y)/n}\omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dt\,d\tau.$$

Исследуя на экстремум функцию $\Phi_{i,j}(x,y)$ на множестве $\overline{G}_{i,j}$, где $\overline{G}_{i,j}$ — замыкание множества $G_{i,j}$, получаем при $i=\overline{0,m-1}$; $j=\overline{0,n-1}$

$$\max\{\Phi_{i,j}(x,y):\ (x,y)\in\overline{G}_{i,j}\} = m\cdot n\cdot\int_0^{1/m}\int_0^{1/n}\omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dt\,d\tau. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) следует оценка сверху

$$\mathcal{E}^{(1,1)}(W^{(1,1)}H^{\omega,2}) \le m \cdot n \cdot \int_0^{1/m}\int_0^{1/n} \omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dt\,d\tau. \tag{10}$$

Докажем, что (10) на самом деле представляет собой равенство. Для построения экстремальной функции положим

$$f_0(x,y) = \int_0^x\int_0^y \varphi_0(t,\tau)dt\,d\tau, \quad (x,y)\in G,$$

где

$$\varphi_0(x,y) = \omega\left(\sqrt{(x-1/m)^2+(y-1/n)^2}\right) - m\cdot n\cdot \int_0^{1/m}\int_0^{1/n}\omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dt\,d\tau,$$

$$(x,y)\in\left[\frac{i}{m};\ \frac{i+1}{m}\right]\times\left[\frac{j}{n};\ \frac{j+1}{n}\right], \quad i,j=0,1,$$

$$\varphi_0(x+2/m,\ y) = \varphi_0(x,y+2/m) = \varphi_0(x,y).$$

Очевидно, $f_0\in W^{(1,1)}H^{\omega,2}$ и, так как

$$\| e^{(1,1)}(f_0;\cdot,\cdot)\|_C = \| f_0^{(1,1)}(\cdot,\cdot)\|_C = m\cdot n\cdot\int_0^{1/m}\int_0^{1/n}\omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dt\,d\tau,$$

то теорема 1 доказана.

Для приближения билинейными сплайнами функций $f\in W^{(1,0)}H^{\omega,2}$ (соответственно $f_0\in W^{(0,1)}H^{\omega,2}$) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $\omega(\delta)$ *— выпуклый модуль непрерывности, то для любых* m *и* n *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}^{(1,0)}(W^{(1,0)}H^{\omega,2}) = m\int_0^{1/m}\omega\left(\sqrt{t^2+1/4n^2}\right)dt, \tag{11}$$

$$\mathcal{E}^{(0,1)}(W^{(0,1)}H^{\omega,2}) = n\int_0^{1/n}\omega\left(\sqrt{1/4m^2+\tau^2}\right)d\tau. \tag{12}$$

Доказательство. Соотношения (11) и (12) доказываются одинаково, поэтому докажем (11). В силу свойства локальности сплайнов $S_{1,1}(f;x,y)$, не умаляя общности, проведем рассуждения для произвольного частичного прямоугольника $G_{i,j}$. Учитывая, что для любой точки $(x,y)\in G_{i,j}$

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f;x,y) = m\cdot F_j(x_i,y) = m\sum_{k=0}^{1}H_{k,j}(y)[f(x_{i+1},y_{j+k})-f(x_i,y_{j+k})]$$

и имея в виду, что

$$m[f(x_{i+1},y_{j+k})-f(x_i,y_{j+k})] = \sum_{p=0}^{1}H_{p,i}(x)f(x_{i-p+1},x;\ y_{j-k+1}),$$

находим

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f;x,y) = \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)f(x,x_{i-p+1};\ y_{j-k+1}). \tag{13}$$

Используя разделенно-разностные отношения в интегральной форме, переписываем (13) в следующем виде:

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f;x,y) = \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\int_0^1 f^{(1,0)}[x+t(x_{i-p+1}-x);\, y_{j+k}]\,dt.$$

Отсюда следует, что погрешность интерполяции представима в виде

$$e_{i,j}^{(1,0)}(f;x,y) = f^{(1,0)}(x,y) - S_{1,1}^{(1,0)}(f;x,y) =$$

$$= \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\int_0^1 [f^{(1,0)}(x,y)-f^{(1,0)}(x+t(x_{i-p+1}-x);\, y_{j+k})]\,dt. \tag{14}$$

Из определения модуля непрерывности и $f\in W^{(1,0)}H^{\omega,2}$ следует

$$|e_{i,j}^{(1,0)}(f;x,y)| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\int_0^1 \omega\left(\sqrt{[t(x_{i-p+1}-x)]^2+(y_{j+k}-y)^2}\right)dt \le$$

$$\le m\int_0^{1/m}\left\{H_{0,j}(y)\omega\left(\sqrt{t^2+(y_j-y)^2}\right) + H_{1,j}(y)\omega\left(\sqrt{t^2+(y_{j+1}-y)^2}\right)\right\}dt. \tag{15}$$

Из выпуклости модуля непрерывности $\omega(\delta)$ и функции $\sqrt{x}$ с учетом равенства $H_{0,j}(y)+H_{1,j}(y)\equiv 1$ вытекает

$$H_{0,j}(y)\omega\left(\sqrt{t^2+(y_j-y)^2}\right) + H_{1,j}(y)\omega\left(\sqrt{t^2+(y_{j+1}-y)^2}\right) \le$$

$$\le \omega\left(H_{0,j}(y)\cdot\sqrt{t^2+(y_j-y)^2} + H_{1,j}(y)\cdot\sqrt{t^2+(y_{j+1}-y)^2}\right) \le$$

$$\le \omega\left\{\left[t^2+H_{0,j}(y)\cdot(y_j-y)^2 + H_{1,j}(y)\cdot(y_{j+1}-y)^2\right]\right\}. \tag{16}$$

Поскольку для функции

$$\psi(y) = H_{0,j}(y)(y_j-y)^2 + H_{1,j}(y)(y_{j+1}-y)^2$$

легко подсчитать, что $\max\{\psi(y):\, y_j\le y\le y_{j+1}\} = 1/(2n)^2$, то из неравенств (15) и (16) имеем

$$|e_{i,j}^{(1,0)}(f;x,y)| \le m\int_0^{1/m}\omega\left(\sqrt{t^2+1/4n^2}\right)dt. \tag{17}$$

В силу (15)–(17) запишем оценку сверху:

$$\mathcal{E}^{(1,0)}(W^{(1,0)}H^{\omega,2}) \le m\int_0^{1/m}\omega\left(\sqrt{t^2+1/4n^2}\right)dt.$$

В качестве экстремальной используем функцию

$$f_1(x,y) = \int_0^x \varphi_1(x,y)\,dt, \qquad (x,y)\in G,$$

$$\varphi_1(x,y) = \begin{cases} \omega\left(\sqrt{(x-1/m)^2+(y-y_j)^2} - m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(\sqrt{t^2+1/4n^2}\right)dt\right), & (x,y)\in G'_{i,j}, \\ \omega\left(\sqrt{(x-1/m)^2+(y-y_j)^2} - m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(\sqrt{t^2+1/4n^2}\right)dt\right), & (x,y)\in G''_{i,j}, \end{cases}$$

$$\varphi_1(x+2/m,y) = \varphi_1(x,y),$$

где

$$G'_{i,j} \in \left[\frac{i}{m};\ \frac{i+1}{m}\right]\times\left[y_j,\ y_j+\frac{1}{2n}\right],\quad i=0,1;\quad j=\overline{0,n-1},$$

$$G''_{i,j} \in \left[\frac{i}{m};\ \frac{i+1}{m}\right]\times\left[y_j+\frac{1}{2n},\ y_{j+1}\right],\quad i=0,1;\quad j=\overline{0,n-1}.$$

Нетрудно проверить, что $f\in W^{(1,0)}H^{\omega,2}$. Кроме того, простой подсчет показывает, что

$$\|e^{(1,0)}(f_1;\cdot,\cdot)\|_C = m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(\sqrt{t^2+1/4n^2}\right)dt,$$

и тем самым теорема 2 доказана.

Следующая теорема является дополнением к соотношению (6).

Теорема 3. *Пусть* $\omega(t,\tau)$ *— выпуклый модуль непрерывности по переменной* τ. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{E}^{(1,0)}(W^{(1,0)}H_\omega) = m\int\limits_0^{1/m}\omega(t,1/2n)\,dt. \tag{18}$$

Если же $\omega(t,\tau)$ *является выпуклым модулем непрерывности по переменной* t, *то*

$$\mathcal{E}^{(0,1)}(W^{(0,1)}H_\omega) = n\int\limits_0^{1/n}\omega(1/2m,\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство (18). Из (14) для любого $f\in W^{(1,0)}H_\omega$ следует

$$|e_{i,j}^{(1,0)}(f;x,y)| \le F_{i,j}(x,y),\quad (x,y)\in G_{i,j},\quad i=\overline{0,m-1};\quad j=\overline{0,n-1},$$

где

$$F_{i,j}(x,y) = m\sum_{k=0}^{1}H_{k,j}(y)\int\limits_0^{1/m}\omega(t,|y-y_{j+k}|)\,dt. \tag{20}$$

Согласно условию теоремы $\omega(t,\tau)$ является выпуклым модулем непрерывности по переменной τ. Сделав замену $y-y_j=u/n$, $y_{j+1}-y=(1-u)/n$, $0\le u\le 1$, будем иметь

$$H_{0,j}(y)\cdot\omega(t,y-y_j) + H_{1,j}(y)\cdot\omega(t,y_{j+1}-y) = (1-u)\cdot\omega(t,u/n) +$$
$$+\,u\cdot\omega(t,(1-u)/n) \le \omega(t,2u(1-u)/n) \le \omega(t,1/2n),$$

откуда

$$\max\{F_{i,j}(x,y):\ (x,y)\in\overline{G}_{i,j}\} = m\int_0^{1/m}\omega(t,1/2n)\,dt. \tag{21}$$

На основании (20) и (21) запишем оценку сверху:

$$\mathcal{E}^{(1,0)}(W^{(1,0)}H_\omega) \le m\int_0^{1/m}\omega(t,1/2n)\,dt.$$

Положим

$$f_2(x,y) = \int_0^x \varphi_2(t,y)\,dt, \quad (x,y)\in G,$$

$$\varphi_2(x,y) = \begin{cases} \omega\big((-1)^i(1/m-x),\ y-y_j\big) - m\displaystyle\int_0^{1/m}\omega(t,\ 1/2n)\,dt, & (x,y)\in G'_{i,j}, \\ \omega\big((-1)^i(1/m-x),\ y_{j+1}-y\big) - m\displaystyle\int_0^{1/m}\omega(t,\ 1/2n)\,dt, & (x,y)\in G''_{i,j}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x+2/m,y) = \varphi_2(x,y),$$

а множества $G'_{i,j}$ и $G''_{i,j}$ те же самые, что и в теореме 2. Легко проверить, что $f_2\in W^{(1,0)}H_\omega$, и поскольку

$$\|e^{(1,0)}(f_2;\cdot,\cdot)\|_C = \|f_2^{(1,0)}(\cdot,\cdot)\|_C = m\int_0^{1/m}\omega(t,1/2n)\,dt,$$

отсюда следует утверждение теоремы 3.

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. *Сторчай В. Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных сплайн-функциями в метрике C // Исследования по современным проблемам суммирования и приближении функций и их приложениям. – Днепропетровск, 1972. – С. 82–89.
4. *Сторчай В. Ф.* Приближение функций двух переменных многогранными функциями в равномерной метрике // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 84–88.
5. *Вакарчук С. Б.* К интерполяции билинейными сплайнами // Мат. заметки. – 1990. – **47**, вып. 5. – С. 26–29.
6. *Малоземов В. Н.* Об отклонении ломаных // Вест. Ленингр. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. – 1966. – № 7. – С. 150–153.
7. *Малоземов В. Н.* К полигональной интерполяции // Мат. заметки. – 1967. – **1**, вып. 5. – С. 537–540.
8. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: Гостехиздат, 1953. – 528 с.

Получено 16.09.93