УДК 517.956.4

Г. П. Малицька (Прикарпат. нац. ун-т, Івано-Франківськ)

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

We consider one class of degenerate parabolic systems of equations of type of the diffusive equation with the Kolmogorov inertia. For systems with coefficients that may depend only on time variable, we construct the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem and obtain estimates for this matrix and all its derivatives.

Рассмотрен один класс вырожденных параболических систем уравнений типа уравнения диффузии с инерцией Колмогорова. Для систем, коэффициенты которых могут зависеть только от временной переменной, построена фундаментальная матрица решений задачи Коши, получены оценки для этой матрицы и всех ее производных.

У другій половині минулого століття з'явилося багато праць з теорії вироджених параболічних рівнянь. Найбільш повні результати досліджень з теорії ультрапараболічних рівнянь одержали С. Д. Ейдельман та С. Д. Івасишен [1]. Італійські математики опублікували ряд цікавих праць з теорії ультрапараболічних рівнянь другого порядку з довільною кількістю груп виродження (див., наприклад, [2, 3]). У статтях [4 – 6] побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння типу Колмогорова з довільною кількістю груп виродження і коефіцієнтами, що залежать лише від t. У цій статті розглядаються системи рівнянь колмогоровського типу, для яких у випадку, коли коефіцієнти можуть залежати лише від часової змінної t, побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) та встановлено її оцінки.

1. Позначення, постановка задачі Коші. Розглянемо систему n рівнянь вигляду

$$\partial_t u_j(t,X) - x\partial_y u_j(t,X) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{2b} a_k^{js}(t,X)\partial_x^k u_s(t,X),$$
$$(t,X)\in\Pi_{(0,T]},\quad j\in\{1,...,n\}, \tag{1}$$

де n і b — задані натуральні числа, T — задане додатне число, $X := (x,y)$, $\Pi_{(0,T]} := \{t\in(0,T],\ X\in\mathbb{R}^2\}$. Припускатимемо, що коефіцієнти a_k^{js} цієї системи комплекснозначні й такі, що система

$$\partial_t w_j(t,X) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{2b} a_k^{js}(t,X)\partial_x^k w_s(t,X),\quad j\in\{1,...,n\}, \tag{2}$$

в якій y вважається параметричною змінною, є рівномірно параболічною за Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$.

Для зручності запишемо систему (1) у матричній формі

$$\partial_t u(t,X) - x\partial_y u(t,X) = \sum_{k=0}^{2b} a_k(t,X)\partial_x^k u(t,X),\quad (t,X)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{3}$$

де $a_k := (a_k^{js})_{j,s=1}^n$, а $u := \mathrm{col}(u_1,...,u_n)$.

Задача Коші для цієї системи полягає в знаходженні її розв'язку, який задовольняє початкову умову

$$u(t,X)|_{t=\tau} = \varphi(X), \quad X \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

де τ — задане число з $[0,T)$, а $\varphi := \mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ — задана матриця-стовпець.

Означення. *Під ФМРЗК будемо розуміти квадратну матрицю* $G(t,X;\tau,S)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{X, S := (\xi,\eta)\} \subset \mathbb{R}^2$, *порядку* n *таку, що для будь-якої досить гладкої фінітної функції* φ *та довільного* $\tau \in [0,T)$ *формулою* $u(t,X) = \displaystyle\int_{R^2} G(t,X;\tau,S)\varphi(S)dS$, $(t,X) \in \Pi_{(\tau,T]}$, *визначається розв'язок системи* (3) *в* $\Pi_{(\tau,T]}$, *який задовольняє умову* (4).

2. Розв'язання задачі Коші для системи зі сталими коефіцієнтами. Нехай спочатку система (1) містить тільки похідну порядку $2b$ по x і коефіцієнти a_k^{js} є сталими. Розглянемо для такої системи задачу Коші з початковими умовами при $t=\tau$, тобто задачу

$$\partial_t u_j(t,X) - x\partial_y u_j(t,X) = \sum_{s=1}^{n} a_{2b}^{js}\partial_x^{2b}u_s(t,X), \tag{5}$$

$$t>\tau, \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

$$u_j(t,X)|_{t=\tau} = \varphi_j(X), \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{6}$$

де φ_j — досить гладкі й фінітні функції. Припускатимемо, що λ-корені $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ рівняння $\det(A(i\xi)^{2b} - \lambda I) = 0$, де $A := (a_{2b}^{js})_{j,s=1}^n$, I — одинична матриця порядку n, i — уявна одиниця, задовольняють умову $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\xi) \le -\delta_0\xi^{2b}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, з деякою сталою $\delta_0 > 0$.

Зведемо задачу (5), (6) до задачі Коші для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1,\ldots,u_n$ розв'язку задачі (5), (6) шукатимемо у вигляді оберненого перетворення Фур'є F^{-1} по X від невідомих функцій $v_1,\ldots,v_n$, тобто

$$u_j(t,X) := F^{-1}[v_j(t,S)](t,X) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2} \exp\{i(X,S)\}v_j(t,S)dS,$$

$$t>\tau, \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

де $(X,S) := x\xi + y\eta$.

Враховуючи рівності

$$\partial_t F^{-1}[v_j] = F^{-1}[\partial_t v_j], \qquad x\partial_y F^{-1}[v_j] = F^{-1}[-\eta\partial_\xi v_j],$$

$$\partial_x^{2b} F^{-1}[v_j] = F^{-1}[(i\xi)^{2b}v_j] = F^{-1}[(-1)^b\xi^{2b}v_j],$$

одержуємо для $v_1,\ldots,v_n$ таку задачу Коші:

$$\partial_t v_j(t,S) + \eta\partial_\xi v_j(t,S) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^b a_{2b}^{jk}(\xi)^{2b}v_k(t,S), \tag{7}$$

$$t>\tau, \quad S \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

$$v_j(\tau,S)|_{t=\tau} = \psi_j(S), \quad S \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{8}$$

де $\psi_j(S) := F\big[\varphi_j(X)\big](S) := \int_{R^2} \exp\{-i(X,S)\}\varphi_j(X)dX.$

Оскільки функції φ_j є досить гладкими та фінітними, то їхні перетворення Фур'є ψ_j є аналітичними функціями, для яких справджуються нерівності

$$|\psi_j(S| \leq C(1+|S|)^{-r}, \quad S \in \mathbb{R}^2, \tag{9}$$

для досить великого натурального числа r $(r \geq 3)$.

У задачі (7), (8) η — параметр. Система (7) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, які мають однакові головні частини. Згідно з [7, с. 146 – 148] така система еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню з частинними похідними першого порядку для функції w від $n+2$ незалежних змінних $t, \xi, v_1, \ldots, v_n$

$$\partial_t w + \eta \partial_\xi w + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^b a_{2b}^{jk}\xi^{2b} v_k \partial_{v_j} w = 0,$$

яке в свою чергу, як відомо, є еквівалентним системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\xi}{\eta} = \frac{dv_1}{\sum_{k=1}^{n}(-1)^b a_{2b}^{1k}\xi^{2b}v_k} = \ldots = \frac{dv_n}{\sum_{k=1}^{n}(-1)^b a_{2b}^{nk}\xi^{2b}v_k}.$$

Але ми зведемо систему (7) до системи звичайних диференціальних рівнянь таким чином. Покажемо, що ліва частина кожного j-го рівняння системи (7) з точністю до множника є похідною від $v_j(t,S)$ за напрямком характеристики цього рівняння. Знайдемо рівняння характеристики. Оскільки $dt = d\xi/\eta$, то

$$\xi = C + t\eta. \tag{10}$$

Усі рівняння системи (7) мають однакову головну частину, тому через кожну точку (t,ξ) проходить лише одна спільна характеристика системи (10). Позначимо через α кут, що утворює характеристика (10) у точці (t,ξ) з віссю O_ξ. Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\eta}$, $\cos\alpha = \dfrac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$, то $\partial_l v_j = (\partial_t v_j + \eta\partial_\xi v_j)\dfrac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$, де l — довжина дуги характеристики, ∂_l означає диференціювання за напрямком характеристики.

Тому систему (7) можна записати у вигляді

$$\sqrt{1+\eta^2}\,\partial_l v_j = \sum_{k=1}^{n}(-1)^b a_{2b}^{jk}\xi^{2b}v_k, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{11}$$

Якщо позначити через dv_j диференціал функції v_j при русі вздовж характеристики (10), то із (11) одержимо

$$dv_j = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^b a_{2b}^{jk}(C+t\eta)^{2b}v_k\right)\frac{dl}{\sqrt{1+\eta^2}},$$

де $dl = \sqrt{1+\eta^2}dt$, тому

$$dv_j = \sum_{k=1}^{n} (-1)^b a_{2b}^{jk} (C + t\eta)^{2b} v_k dt, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{12}$$

Нехай $\hat{\xi}$ — значення ξ при $t = \tau$, тобто $\hat{\xi} = C + \tau\eta$. Знайдемо v_j при $t = \tau$, тоді

$$v_j(\tau, C + \tau\eta, \eta) = \psi_j(C + \tau\eta, \eta), \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{13}$$

Задача (12), (13) має єдиний розв'язок в інтервалі $a < t < b$ для будь-яких скінченних $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, тому існує й єдиний розв'язок для $\tau \leq t \leq T < +\infty$. Оскільки матриця системи (12) комутує зі своїм інтегралом $\int_\tau^t \Big[\sum_{k=1}^n (-1)^b \times \times a_{2b}^{jk} (C + \beta\eta)^{2b} \Big] d\beta$, то маємо випадок Лаппо – Данилевського, і тому розв'язок $v := \operatorname{col}(v_1, \ldots, v_n)$ задачі (12), (13) має вигляд

$$v(t, C + t\eta, \eta) = \exp \left\{ (-1)^b A \int_\tau^t (C + \beta\eta)^{2b} d\beta \right\} \psi(C + \tau\eta, \eta), \quad t > \tau,$$

де $\psi := \operatorname{col}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

З огляду на те, що $C = \xi - t\eta$, з останньої формули одержуємо

$$v(t, S) = \exp \left\{ (-1)^b A \int_\tau^t (\xi - (t - \beta)\eta)^{2b} d\beta \right\} \psi(\xi - (t - \tau)\eta, \eta), \quad t \geq \tau, \quad S \in \mathbb{R}^2. \tag{14}$$

Безпосередньо обчислюючи $\partial_t v$ і $\partial_\xi v$, переконуємося, що функція (14) є розв'язком задачі (7), (8) . Навпаки, задача (7), (8) зводиться до задачі (12), (13), при цьому правильною є формула (14).

Враховуючи, що $u(t, X) = F^{-1}[v(t, S)]$, за допомогою (14) отримуємо

$$u(t, X) = (2\pi)^{-2} \int_{R^2} \exp \left\{ i(X, S) + (-1)^b A \int_\tau^t (\xi - (t - \beta)\eta)^{2b} d\beta \right\} \times$$
$$\times \psi(\xi - (t - \tau)\eta, \eta) dS, \quad t > \tau, \quad X \in \mathbb{R}^2,$$

або після заміни змінних $\xi - (t - \tau)\eta = \alpha$, $\eta = \eta$, $B := (\alpha, \eta) \in \mathbb{R}^2$

$$u(t, X) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \exp \left\{ (-1)^b A \int_\tau^t (\alpha + (\beta - \tau)\eta)^{2b} d\beta + \right.$$
$$\left. + \, i(X, B) + i(t - \tau)x\eta \right\} \psi(B) dB, \quad t > \tau, \quad X \in \mathbb{R}^2. \tag{15}$$

де $B := (\alpha, \eta)$.

Нехай

$$Q(t, \tau; S) := \exp \left\{ (-1)^b A \int_\tau^t (\xi - (t - \beta)\eta)^{2b} d\beta \right\},$$

а значення цієї матриці при $\xi = \alpha + (t - \tau)\eta$ позначимо

$$Q(t,\tau;B(t,\tau)) := \exp\left\{(-1)^b A\int\limits_{\tau}^{t}(\alpha+(\beta-\tau)\eta)^{2b}d\beta\right\},$$

де $B(t,\tau) := (\alpha+(t-\tau)\eta,\eta)$.

Зазначимо, що $Q(t,\tau;C+t\eta,\eta)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків системи (12).

Далі буде доведено оцінку

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau)\big| \le C\exp\Big\{-c_0(\alpha^{2b}+(\eta(t-\tau))^{2b})(t-\tau))\Big\},\quad t\ge\tau,\quad B\in\mathbb{R}^2, \tag{16}$$

з деякими сталими $C>0, c_0>0$.

За допомогою цієї оцінки можна переконатися, що інтеграл

$$\int\limits_{R^4}\exp\Big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\Big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))\varphi(\Gamma)dBd\Gamma,$$

$$\Gamma := (\gamma,\theta),\quad \{X,\Gamma\}\subset\mathbb{R}^2,$$

є абсолютно збіжним при $t>\tau$. Застосовуючи теорему Фубіні, одержуємо формулу

$$u(t,X) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2}\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}\times$$

$$\times Q(t,\tau;B(t,\tau))dB\varphi(\Gamma)d\Gamma,\quad t>\tau,\quad X\in\mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Позначимо

$$G(t,X;\tau,\Gamma) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2}\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB, \tag{18}$$

тоді

$$u(t,X) = \int\limits_{R^2}G(t,X;\tau,S)\varphi(S)dS,\quad t>\tau,\quad X\in\mathbb{R}^2. \tag{19}$$

Позначимо через $\mathbb{N}$ множину натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Оскільки для будь-яких фіксованих t, τ $(\tau<t)$

$$\int\limits_{R^2}\partial_x^k\partial_y^r\exp\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB, \{k,r\}\subset\mathbb{Z}_+$$

рівномірно збігається щодо $X, X\in\mathbb{R}^2$, то

$$\partial_x^k\partial_y^r\int\limits_{R^2}\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB =$$

$$= \int\limits_{R^2}\partial_x^k\partial_y^r\exp\big\{i(X\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB,$$

$$\{X,\Gamma\}\subset\mathbb{R}^2,\quad \tau<t,\quad \{k,r\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Розглянемо

$$H:=\int\limits_{R^2}\partial_x^k\partial_y^r\partial_t^s\Big[\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))\Big]dB,$$

$$\{k,r\}\subset\mathbb{Z}_+,\quad s\in\mathbb{N},\quad \{X,\Gamma\}\subset\mathbb{R}^2,\quad \tau<t.$$

Інтеграл H збігається рівномірно щодо (t,X) таких, що $\varepsilon\le t-\tau$, $|x|\le R<+\infty$, $y\in\mathbb{R}$, де ε і R — довільні додатні сталі, тому

$$\int\limits_{R^2}\partial_x^k\partial_y^r\partial_t^s\Big[\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))\Big]dB=$$

$$=\partial_x^k\partial_y^r\partial_t^s\int\limits_{R^2}\Big[\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))\Big]dB, \tag{20}$$

$$\{k,r\}\subset\mathbb{Z}_+,\quad s\in\mathbb{N},\quad \{X,\Gamma\}\subset\mathbb{R}^2,\quad \tau<t.$$

На підставі (20) $G(t,X;\tau,\Gamma)$ має похідні довільного порядку по t, X у кожній точці (t,X), $t>\tau$, $X\in\mathbb{R}^2$. Звідси випливає, що при $t>\tau$ функція (8) є розв'язком системи (5). Оцінки (16), (9) дають можливість у формулі (15) перейти до границі при $t\to\tau$ під знаком інтеграла та одержати

$$\lim_{t\to\tau}u(t,X)=F^{-1}[F[\varphi]](X)=\varphi(X),\quad X\in\mathbb{R}^2.$$

Отже, функція u, яка визначена формулою (19), є розв'язком задачі Коші (7), (8), а матриця G є ФМРЗК.

3. Оцінка матриці $\boldsymbol{Q(t,\tau;B(t,\tau))}$. Доведемо оцінку (16). Для цього використаємо лему 3.1 [8, с. 38] про оцінку норми матриці $\exp\{tA\}$, де за t візьмемо $\displaystyle\int_\tau^t(\alpha+(\beta-\tau)\eta)^{2b}d\beta$, а за A — матрицю $(-1)^bA$.

Враховуючи те, що $\operatorname{Re}\lambda_j(1)<-\delta_0$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, і виконуючи заміну $\beta-\tau=$ $=\acute{\beta}(t-\tau)$, одержуємо

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau))\big|\le C\exp\left\{-\delta_1\int\limits_0^1(\alpha+\beta(t-\tau)\eta)^{2b}d\beta(t-\tau)\right\},\quad 0<\delta_1<\delta_0.$$

Оцінимо інтеграл $I_1:=\displaystyle\int_0^1(\alpha+\beta(t-\tau)\eta)^{2b}d\beta$. $I_1=\alpha^{2b}$ при $\eta=0$. Нехай $\eta\ne0$, $\alpha_0:=\alpha(\alpha^2+(t-\tau)^2\eta^2)^{-1/2}$, $\eta_0:=(t-\tau)\eta(\alpha^2+(t-\tau)^2\eta^2)^{-1/2}$, тоді

$$I_1=(\alpha^2+(t-\tau)^2\eta^2)^b\int\limits_0^1(\alpha_0+\beta\eta_0)^{2b}d\beta\ge(\alpha^{2b}+((t-\tau)\eta)^{2b})w_0>0,$$

де $w_0:=\displaystyle\min_{(\alpha_0,\eta_0)}\int_0^1(\alpha_0+\beta\eta_0)^{2b}d\beta.$

Дійсно, $\alpha_0^2+\eta_0^2=1$ і $\int_0^1(\alpha_0+\beta\eta_0)^{2b}d\beta=(2b+1)^{-1}\sum_{j=0}^{2b}(\alpha_0+\eta_0)^{2b-j}\alpha_0^j\geq$ $\geq(4b+2)^{-1}\left[(\alpha_0+\eta_0)^{2b}+\alpha_0^{2b}\right]\geq(2b+1)^{-1}2^{-(b+1)}$.

У комплексній області точок $B+iM$, $M:=(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2$, $M(t,\tau):=(\mu+(t-$ $-\tau)\nu,\nu)$

$$Q\big(t,\tau;B(t,\tau)+iM(t,\tau)\big)=Q(t,\tau;B(t,\tau))\times$$

$$\times\exp\left\{(-1)^bA\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{2b}C_{2b}^j(\alpha+\beta(t-\tau)\eta)^{2b-j}(i\mu+\beta(t-\tau)i\nu)^jd\beta(t-\tau)\right\}$$

— ціла функція змінних $B+iM$.

Використовуючи (16) і нерівність

$$\left|\sum_{j=1}^{2b}C_{2b}^j(\alpha+\beta(t-\tau)\eta)^{2b-j}(\mu+\beta(t-\tau)\nu)^j\right|\leq$$

$$\leq2^{2b}\Big[\varepsilon(\alpha+\beta(t-\tau)\eta)^{2b}+\varepsilon^{-1}(\mu+\beta(t-\tau)\nu)^{2b}\Big],$$

де ε вибрано так, щоб $2^{2b}\varepsilon|A|<\delta_2$, одержуємо

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau)+iM(t,\tau))\big|\leq C\exp\Big\{-\delta_3(\alpha^{2b}+((t-\tau)\eta)^{2b})(t-\tau)+$$

$$+c_1(\mu^{2b}+((t-\tau)\nu)^{2b})(t-\tau)\Big\},\quad t\geq\tau,\tag{21}$$

де $0<\delta_3<\delta_2$, C, c_1 — додатні сталі.

4. ФМРЗК для системи (5), оцінка її похідних. Позначимо

$$q:=\frac{2b}{2b-1},$$

$$\rho(t,X;\tau,\Gamma):=(|x-\gamma|(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}})^q+\big(|y-\theta+x(t-\tau)|(t-\tau)^{-\frac{2b+1}{2b}}\big)^q,$$

$$m_0:=\frac{m+1+(r+1)(2b+1)}{2b},$$

$$d(t,X;\tau,0):=\big(|x|(t-\tau)^{-1/2b}\big)^q+\big(|y|(t-\tau)^{-\frac{2b+1}{2b}}\big)^q.$$

Із (18), (21), використовуючи лему 1.1 [8, с. 36], одержуємо таке твердження.

Теорема 1. *ФМРЗК для системи* (5) *має вигляд*

$$G(t,X;\tau,\Gamma)=(t-\tau)^{-(b+1)/b}\Omega((x-\gamma)(t-\tau)^{-1/2b},$$

$$y-\theta+x(t-\tau))(t-\tau)^{-(2b+1)/2b}),$$

де $\Omega(z_1,z_2)$ — *ціла функція аргументів* z_1, z_2 *порядку зростання* q *при комплексних значеннях цих аргументів і такого ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях.*

Для похідних справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^m \partial_t^s \partial_y^r G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma)\right| \leq C_{msr} \exp\left\{-c_0\rho(t, X; \tau, \Gamma) + cd(t, X_1; \tau, 0)\right\}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-m_0}\Big[|x|^s (t-\tau)^{-\frac{s(2b+1)}{2b}} + (t-\tau)^{-s}\Big], \tag{22}$$
$$\{m, s, r\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad \{X, X_1, \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2, \quad t > \tau,$$

де C_{msr}, c_0, c *— додатні сталі, що залежать від* δ_0, n, b, $\sup|a_{2b}^{jk}|$.

Зауваження. При $b = 1$, обчисливши $\displaystyle\int_0^1 (\alpha+\beta(t-\tau)\eta)^{2b} d\beta$, одержимо оцінки

$$\left|\partial_x^m \partial_t^s \partial_y^r G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma)\right| \leq C_{msr}(t-\tau)^{-\frac{m+1+3(r+1)}{2}}\times$$
$$\times \exp\left\{-c_0\bigg[(x-\gamma)^2(t-\tau)^{-1} + \left(y - \theta + \frac{x+\gamma}{2}(t-\tau)\right)^2 (t-\tau)^{-3}\bigg]+\right.$$
$$\left.+c\Big[x_1^2(t-\tau)^{-1} + y_1^2(t-\tau)^{-3}\Big]\right\}\Big[|x|^s(t-\tau)^{-3s/2} + (t-\tau)^{-s}\Big],$$
$$\{m, s, r\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad \{X, X_1, \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2, \quad t > \tau,$$

де C_{msr}, c_0, c — додатні сталі, що залежать від δ_0, n, b, $\sup|a_{2b}^{jk}|$.

5. Розв'язання задачі Коші для систем з коефіцієнтами, що залежать лише від t. Розглянемо задачу Коші, коли a_k^{jl} — неперервні функції на $[0, T]$, тобто задачу

$$\partial_t u(t, X) - x\partial_y u(t, X) = \sum_{k=0}^{2b} a_k(t)\partial_x^k u(t, X), (t, X) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{23}$$

$$u(t, X)\big|_{t=\tau} = \varphi(X), \quad X \in \mathbb{R}^2, \tag{24}$$

де система $\partial_t w(t, x) = \sum_{k=0}^{2b} a_k(t)\partial_x^k w(t, x)$ є рівномірно параболічною за Петровським в $[0, T] \times \mathbb{R}$, а φ — достить гладка й фінітна вектор-функція (має неперервні похідні до порядку $r \geq 3$).

Аналогічно до випадку системи зі сталими коефіцієнтами, використовуючи перетворення Фур'є, зводимо задачу Коші (23), (24) до системи лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$\partial_t v + \eta\partial_\xi v = \sum_{k=0}^{2b} a_k(t)(i\xi)^k v \tag{25}$$

з початковою умовою

$$v(t, S)|_{t=\tau} = \psi(S), \quad S \in \mathbb{R}^2. \tag{26}$$

Розглянемо j-те рівняння системи (25). Через кожну точку $(t, \xi) \in [\tau, T] \times \mathbb{R}$ проходить єдина характеристична лінія цього рівняння, яка визначається з рівняння $dt = d\xi/\eta$, $\xi = C + t\eta$ і при $t = \tau$ $\hat{\xi} = C + \tau\eta$.

У кожній точці $(t, \xi) \in [\tau, T] \times \mathbb{R}$ похідна від v_j в напрямку характеристики визначається формулою

$$\partial_l v_j = (\partial_t v_j + \eta\partial_\xi v_j)\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}},$$

де l — довжина дуги характеристики, $dl = \sqrt{1+\eta^2}dt$.

Тому вздовж характеристики $dv_j = \partial_l v_{jl} dl$ має вигляд

$$dv_j = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{2b} a_k^{jr}(t)(iC + \eta t i)^k v_r dt.$$

Маємо систему

$$dv_j(t, C + t\eta, \eta) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{2b} a_k^{jr}(t)(i)^k (C + t\eta)^k v_r dt, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{27}$$

з початковими умовами

$$v_j(t, C + t\eta, \eta)|_{t=\tau} = \psi_j(C + \tau\eta, \eta), \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{28}$$

Розв'язок задачі (27), (28) з параметрами C, η існує, єдиний і має вигляд

$$v(t, C + t\eta, \eta) = Q(t, \tau; C + t\eta, \eta)\psi(t, C + \tau\eta, \eta), \tag{29}$$

де $Q(t, \tau; C + t\eta, \eta)$, $0 \le \tau \le t \le T$, — нормальна фундаментальна матриця розв'язків системи (27).

Оскільки коефіцієнти системи (27) — аналітичні функції від C, η, то і розв'язок (29) є аналітичною функцією від C, η.

Підставимо $C = \xi - t\eta$ у (29), тоді

$$v(t, S) = Q(t, \tau; S)\psi(\xi - (t - \tau)\eta, \eta), \quad 0 \le \tau \le t \le T, \quad S \in \mathbb{R}^2. \tag{30}$$

Оскільки за побудовою

$$(\partial_t + \eta\partial_\xi)Q(t, \tau; S) = \frac{d}{dt} Q(t, \tau, C + t\eta, \eta) \bigg|_{C + t\eta = \xi} = \sum_{k=0}^{2b} a_k(t)(i\xi)^k Q(t, \tau, S),$$

то функція (30) є розв'язком задачі (25), (26). Навпаки, задача (25), (26) зводиться до задачі (27), (28), при цьому правильною є формула (30).

З огляду на те, що $u(t, X) = F^{-1}\big[v(t, S)\big]$, за допомогою (30) одержимо

$$u(t, X) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{R^2} \exp\big\{i(X, S)\big\} Q(t, \tau; S)\psi(\xi - (t - \tau)\eta, \eta) dS,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad X \in \mathbb{R}^2,$$

або після заміни змінних $\xi - (t - \tau)\eta = \alpha$, $\eta = \eta$, $B(\alpha, \eta) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(t, X) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{R^2} \exp\big\{i(X, B) + ix(t - \tau)\eta\big\} Q(t, \tau; B(t, \tau))\psi(B) dB,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad X \in \mathbb{R}^2.$$

Далі буде доведено оцінку

$$\big|Q(t, \tau, B(t, \tau))\big| \le C \exp\big\{-c_0(\alpha^{2b} + \eta^{2b}(t - \tau)^{2b})(t - \tau)\big\}, \tag{31}$$

$$0 \le \tau \le t \le T, \quad B \in \mathbb{R}^2,$$

з деякими сталими $C > 0$ і $c_0 > 0$. За допомогою цієї оцінки можна переконатися, що інтеграл

$$\int\limits_{R^4} \exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))\varphi(\Gamma)dBd\Gamma,$$

є абсолютно збіжним при $0 \le \tau < t \le T$, $\{X,\Gamma\} \subset \mathbb{R}^2$. Застосувавши теорему Фубіні, одержимо формулу

$$u(t,X)=\int\limits_{R^2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2}\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix\eta(t-\tau))\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB\varphi(\Gamma)d\Gamma, \tag{32}$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad X \in \mathbb{R}^2.$$

Позначимо

$$G(t,X;\tau,\Gamma):=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2}\exp\{i(X-\Gamma,B)+ix\eta(t-\tau)\}Q(t,\tau;B(t;\tau))dB, \tag{33}$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{X,\Gamma\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Оскільки для будь-яких фіксованих t, τ, $0 \le \tau < t \le T$, інтеграл

$$\int\limits_{R^2}\partial_x^k\partial_y^r\exp\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB,$$

$$\{X,\Gamma\} \subset \mathbb{R}^2, \quad \{k,r\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

рівномірно збігається щодо $X \in \mathbb{R}^2$, то

$$\partial_x^k\partial_y^r\int\limits_{R^2}\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB=$$

$$=\int\limits_{R^2}\partial_x^k\partial_y^r\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB.$$

Далі, інтеграл

$$\int\limits_{R^2}\partial_t\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{X,\Gamma\} \subset \mathbb{R}^2,$$

рівномірно збігається щодо (t,X) таких, що $\varepsilon \le t-\tau$, $|x| \le R$, де ε і R — будь-які додатні сталі, тому

$$\partial_t\int\limits_{R^2}\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))dB=$$

$$=\int\limits_{R^2}\partial_t\Big[\exp\big\{i(X-\Gamma,B)+ix(t-\tau)\eta\big\}Q(t,\tau;B(t,\tau))\Big]dB,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{X, \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Таким чином, $G(t, X; \tau, \Gamma)$ має похідні довільного порядку по X і похідну першого порядку по t в кожній точці $(t, X) \in \Pi_{(\tau,T]}$. Звідси випливає, що функція (33) є розв'язком системи (23). Оцінки (9), (31) дають можливість у формулі (32) перейти до границі при $t \to \tau$ під знаком інтеграла та одержати

$$\lim_{t\to\tau} u(t, X) = F^{-1}\big[F[\varphi]\big](X) = \varphi(X), \quad X \in \mathbb{R}^2.$$

Отже, функція u, яка визначена формулою (32), є розв'язком задачі Коші (23), (24), а матриця G є ФМРЗК.

6. Оцінка матриці $Q(t, \tau, B(t, \tau))$ для системи (27). Дослідимо поведінку матриці $Q(t, \tau; B(t, \tau))$, яка є розв'язком системи рівнянь

$$dQ(t, \tau; B(t, \tau)) = \sum_{k=0}^{2b} a_k(t)(i\alpha + i(t - \tau)\eta)^k Q dt =$$

$$= \Bigg\{(-1)^b a_{2b}(t_0)(\alpha + (t - \tau)\eta)^{2b} Q + (-1)^b\big[a_{2b}(t) - a_{2b}(t_0)\big](\alpha + (t - \tau))^{2b} Q +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2b-1} a_k(t)(i\alpha + i(t - \tau)\eta)^k Q\Bigg\} dt,$$

де t_0 — будь-яка фіксована точка сегмента $[0, T]$.

Позначимо

$$P_1(t, \alpha + (t - \tau)\eta) := \sum_{k=0}^{2b-1} a_k(t)(i\alpha + i(t - \tau)\eta)^k.$$

Запишемо розв'язок цієї системи у вигляді

$$Q(t, \tau; B(t, \tau)) = \exp\left\{(-1)^b a_{2b}(t_0)\int_{t_0}^{t}(\alpha + (\beta - \tau)\eta)^{2b} d\beta\right\} Q(t_0, \tau; B(t_0, \tau)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \exp\left\{(-1)^b a_{2b}(t_0)\int_{\beta}^{t}(\alpha + (\gamma - \tau)\eta)^{2b} d\gamma\right\} \times$$

$$\times\Big\{(-1)^b\big[a_{2b}(\beta) - a_{2b}(t_0)\big](\alpha + (\beta - \tau)\eta)^{2b} +$$

$$+ P_1(\beta, \alpha + (\beta - \tau)\eta)\Big\} Q(\beta, \tau; B(\beta, \tau)) d\beta. \qquad (34)$$

Для оцінки $Q(t, \tau; B(t, \tau))$ виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, щоб для всіх t, t_0 таких, що $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$, виконувалася нерівність $\big|a_{2b}(t) - a_{2b}(t_0)\big| < \varepsilon$. Крім того, $\big|P_1(t, \alpha + (t - \tau)\eta)\big| \le \varepsilon(\alpha + (t - \tau)\eta)^{2b}$ при $|\alpha + (t - \tau)\eta| > R$. Така оцінка норми матриці $P_1(t, \alpha + (t - \tau)\eta)$ випливає з того, що $(\alpha + (t - \tau)\eta)$ входить в елементи матриці як поліном степеня не вищого $2b - 1$. Із (34) одержуємо оцінку

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau))\big| \le \left|\exp\left\{(-1)^b a_{2b}(t_0)\int\limits_{t_0}^{t}(\alpha+(\gamma-\tau)\eta)^{2b}d\gamma\right\}\right|\times$$

$$\times\big|Q(t_0,\tau;B(t_0,\tau))\big| + \int\limits_{t_0}^{t}\left|\exp\left\{(-1)^b a_{2b}(t_0)\int\limits_{\beta}^{t}(\alpha+(\gamma-\tau)\eta)^{2b}d\gamma\right\}\right|\times$$

$$\times\Big\{\big|a_{2b}(\beta)-a_{2b}(t_0)\big||\alpha+(t-\tau)\eta|^{2b}+\big|P_1(\beta,\alpha+(\beta-\tau)\eta)\big|\Big\}\big|Q(\beta,\tau;B(\beta,\tau))\big|d\beta,$$

звідки знаходимо

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau),\eta)\big| \le$$

$$\le\left|\exp\left\{(-1)^b a_{2b}(t_0)\int\limits_{t_0}^{t}(\alpha+(\gamma-\tau)\eta)^{2b}d\gamma\right\}\right|\big|Q(t_0,\tau;B(t_0,\tau))\big|+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left|\exp\left\{(-1)^b a_{2b}(t_0)\int\limits_{\beta}^{t}(\alpha+(\gamma-\tau)\eta)^{2b}d\gamma\right\}\right|\times$$

$$\times 2\varepsilon|\alpha+(\beta-\tau)\eta|^{2b}\big|Q(\beta,\tau;B(\beta,\tau))\big|d\beta. \tag{35}$$

Позначимо

$$U(t):=\big|Q(t,\tau;B(t,\tau))\big|\left|\exp\left\{(-1)^{b+1}a_{2b}(t_0)\int\limits_{t_0}^{t}(\alpha+(\gamma-\tau)\eta)^{2b}d\gamma\right\}\right|,$$

тоді нерівність (35) набере вигляду

$$U(t)\le\big|Q(t_0,\tau;B(t_0,\tau))\big|+\int\limits_{t_0}^{t}2\varepsilon(\alpha+(\beta-\tau)\eta)^{2b}U(\beta)d\beta.$$

За лемою Гронуолла (35) зведеться до нерівності

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau))\big| \le$$

$$\le\big|Q(t_0,\tau;B(t_0,\tau))\big|\left|\exp\left\{(-1)^b a_{2b}(t_0)\int\limits_{t_0}^{t}(\alpha+(\gamma-\tau)\eta)^{2b}d\gamma\right\}\right|\times$$

$$\times\exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t}2\varepsilon(\alpha+(\beta-\tau)\eta)^{2b}d\beta\right\}\le$$

$$\le C_1\big|Q(t_0,\tau;B(t_0,\tau))\big|\exp\left\{-(\delta_3-2\varepsilon)\int\limits_{t_0}^{t}(\alpha+(\beta-\tau)\eta)^{2b}d\beta\right\}, \tag{36}$$

$$0<\delta_3<\delta_0,\quad \delta_3>2\varepsilon.$$

Взявши $t_0 = \tau,\ \tau + \delta(\varepsilon),\ \tau + 2\delta(\varepsilon),\ \ldots,\ \tau + m_1\delta(\varepsilon),\ m_1 = \left[\dfrac{t-\tau}{\delta(\varepsilon)}\right] + 1,\ C_1 \geq 1,$ з допомогою нерівності (36) послідовно оцінимо $Q\big(\tau + \delta(\varepsilon), \tau; B(\tau + \delta(\varepsilon), \tau)\big), \ldots$ $\ldots, Q\big(\tau + m_1\delta(\varepsilon), \tau; B(\tau + m_1\delta(\varepsilon), \tau)\big)$ і, використавши оцінку інтеграла $\displaystyle\int_\tau^t (\alpha +$ $+ \eta(\beta-\tau))^{2b} d\beta = (t-\tau)I_1$, одержимо нерівність

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau))\big| \leq C\exp\Big\{-c_0(\alpha^{2b} + \eta^{2b}(t-\tau)^{2b})(t-\tau)\Big\},$$

де $C = C_1^{m_1}$, $c_0 = \delta_3 - 2\varepsilon$, $\varepsilon < \dfrac{\delta_3}{2^{2b-1}}$, C_1, c_0 залежать від T, n, b, $\sup|a_k(t)|$, характеру неперервності $a_{2b}(t)$.

Якщо $R > \big|\alpha + (t-\tau)\eta\big|$, то $TR^{2b} > \displaystyle\int_\tau^t (\alpha + \eta(\beta-\tau))^{2b} d\beta$ і

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau))\big| \leq C_2 \leq C_2\exp\left\{TR^{2b} - \int\limits_0^t (\alpha + \eta(\beta-\tau))^2 d\beta\right\}.$$

Використавши оцінку інтеграла $(t-\tau)I_1$, матимемо оцінку (31) і для цього випадку.

Аналогічно до випадку параболічних систем [9, с. 40 – 42] одержимо оцінку

$$\big|Q(t,\tau;B(t,\tau) + iM(t,\tau))\big| \leq C\exp\big\{-c_1(\alpha^{2b} + (\eta(t-\tau))^{2b})(t-\tau)\big\} +$$
$$+ F_1\big\{(\mu^{2b} + (\nu(t-\tau))^{2b})(t-\tau)\big\}, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T, \quad \{B, M\} \subset \mathbb{R}^2, \tag{37}$$

де C, F_1, c_1 — додатні сталі, що залежать від T, n, b, $\sup|a_k(t)|$, характеру неперервності $a_{2b}(t)$.

7. Аналітичний опис ФМРЗК для системи (23). Властивості матриці $Q(t,\tau;$ $B(t,\tau))$ дають можливість зробити повний аналітичний опис ФМРЗК та її похідних. З оцінок (31), (37) випливає, що ФМРЗК є аналітичною функцією, яка визначається за формулою (33). Використавши (37), аналогічно до випадку параболічних систем [8, с. 50 – 51] одержимо таке твердження.

Теорема 2. *ФМРЗК для системи* (23) *має вигляд*

$$G(t,X;\tau,\Gamma) = (t-\tau)^{-(b+1)/b}\Omega(t,\tau;(x-\gamma)(t-\tau)^{-1/2b},$$
$$(y - \theta + x(t-\tau))(t-\tau)^{-(2b+1)/2b}),$$

де $\Omega(t,\tau;z_1,z_2)$ *при фіксованих* t *і* τ *є цілою функцією аргументів* z_1, z_2 *порядку зростання q при комплексних значеннях цих аргументів і такого ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях.*

Для похідних справджуються оцінки

$$\big|\partial_x^k\partial_y^r G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma)\big| \leq$$
$$\leq C_{kr}(t-\tau)^{-\frac{k+1+(r+1)(2b+1)}{2b}}\exp\big\{-c_1\rho(t,X;\tau,\Gamma) + F_1 d(t,X_1;\tau,0)\big\},$$
$$\{k,r\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{X, X_1, \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2,$$

де C_{kr}, F_1, c_1 — *додатні сталі, що залежать від* T, n, b, δ_0, $\sup|a_k(t)|$, *характеру неперервності* $a_{2b}(t)$.

Оцінимо $\partial_t G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma)$. Оскільки $G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma)$ є розв'язком системи (23), то

$$\partial_t G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma) = x\partial_y G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma) + \sum_{k=0}^{2b} a_k(t)\partial_x^k G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma),$$

тому

$$\big|\partial_t G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma)\big| \leq$$
$$\leq C\big(|x|(t-\tau)^{-\frac{4b+3}{2b}} + (t-\tau)^{-\frac{2b+1}{b}}\big) \exp\big\{-c_1\rho(t, X; \tau, \Gamma) + F_1 d(t, X_1; \tau, 0)\big\},$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{X, X_1, \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\big|\partial_t G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma) - x\partial_y G(t, X + iX_1; \tau, \Gamma)\big| \leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-\frac{2b+1}{b}} \exp\big\{-c_1\rho(t, X; \tau, \Gamma) + F_1 d(t, X_1; \tau, 0)\big\},$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{X, X_1, \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2$$

де C, c_1, F_1 — додатні сталі, що залежать від T, n, $2b$, $\sup|a_k(t)|$, характеру неперервності $a_{2b}(t)$.

1. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
2. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**. – P. 53 – 105.
3. *Cinti C., Pascucci A., Polidoro S.* Pointwise estimates for solutions to a class of non-homogeneous Kolmogorov equations // Math. Ann. – 2008. – **340**, № 2. – P. 237 – 264.
4. *Малицька Г. П.* Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 3. – С. 56 – 60.
5. *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". – 2000. – № 411. – С. 221 – 228.
6. *Малицька Г. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого за довільною кількістю груп змінних параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 131 – 138.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
9. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-Параболические системы // Тр. сем. по функцион. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.

Одержано 05.02.07,
після доопрацювання — 07.05.08