УДК 517.956.4

**А. О. Данилюк** (Чернів. нац. ун-т)

# КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

By using the operators of fractional integration and differentiation, we prove the theorem on the correctness of general parabolic boundary-value problem for a system of integro-differential equations with integral operators under boundary conditions.

С помощью операторов дробного интегрирования и дифференцирования доказана теорема о корректности общей параболической краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с интегральными операторами в краевых условиях.

Загальна теорія лінійних параболічних крайових задач була створена в основному у 60-ті роки минулого століття [1 – 4], згідно з якою умова Лопатинського (доповняльності) і умова рівномірної параболічності системи визначають коректність параболічної крайової задачі. Розвивались різні методи щодо знаходження розв'язків крайових задач, зокрема метод інтегральних операторів [4]. У монографії М. І. Матійчука [5] при дослідженні $B$-параболічних крайових задач визначальним є побудова фундаментального розв'язку $B$-параболічного рівняння

$$\Lambda(D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^b(\Delta_{x'} + B_{x_n})^b u = f$$

на поверхні $S$, а також вивчення дії операторів дробового інтегрування та диференціювання, що відповідають цьому параболічному оператору $\Lambda(D)$.

У даній статті за допомогою операторів дробового інтегрування та диференціювання встановлено коректну розв'язність задачі для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з диференціальними та інтегральними крайовими умовами. Фундаментальний розв'язок $\mathbf{\Gamma}$ параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь та задачу Коші досліджено в [6]. Для існування класичного розв'язку даної крайової задачі потрібно з'ясувати, які нові умови виникають у зв'язку з тим, що крайові умови містять інтегральні оператори фредгольмового типу.

**1. Постановка задачі і формулювання основного результату.** Нехай $\Omega$ — компактна область у просторі $\mathbb{R}^n$, яка обмежена поверхнею $S$, $\Gamma_0 = (0,T) \times \times S$. В області $Q = (0,T) \times \Omega$ розглянемо крайову задачу для параболічної системи $N$ інтегро-диференціальних рівнянь

$$L(t,x,D,K)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x) D_x^k u - \int_0^t d\tau \int_\Omega K(t,\tau,x,\xi) u(\tau,\xi) d\xi = f(t,x), \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$B_i(t,z,D_x)u\big|_{\Gamma_0} + \int_S P_i(t,z,\xi,D_\xi) u(t,\xi) dS_\xi = g_i(t,z), \quad i = \overline{1,bN}, \quad z \in S, \tag{3}$$

де

$$B_i(t,z,D_x) \equiv \sum_{|k| \le r_i} b_{ik}(t,z) D_x^k, \qquad P_i(t,z,\xi,D_\xi) \equiv \sum_{|k| \le r_i - 1} p_{ik}(t,z,\xi) D_\xi^k,$$

$$1 \le r_i < 2b.$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема** (про коректність). *Нехай задача* (1) – (3) *в області* $Q$ *задовольняє умову рівномірної параболічності та умову Лопатинського,*

$$A_k \in C^{(\alpha)}_{t,x}(Q), \quad f \in \overset{o}{C}{}^{(\alpha)}_x(Q), \quad \varphi \in C^{(2b+\alpha)}(\Omega) \quad i \quad L\varphi \in \overset{o}{C}{}^{(\alpha)}(\Omega),$$

$$g_i, \ b_{ik} \in C^{(2b-r_i+\alpha)}_{t,z}(\Gamma_0), \quad p_{ik} \in C^{(2b-r_i+\alpha)}_{t,z}(\Gamma_0, S), \quad S \in C^{(2b+\alpha)},$$

*ядро інтегрального оператора системи* $K(t, \tau, x, \xi) = (K_{ij})^N_{i,j=1}$ *є неперервним при* $t > \tau, \ x, \xi \in \Omega$ *і задовольняє нерівність*

$$\left| D^m_x K_{ij}(t, \tau, x, \xi) \right| \le C_m \frac{e^{-c_1 \rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n+2b+|m|-\alpha}{2b}}},$$

$$\rho(t, \tau, x, \xi) = \left( \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2b}} \right)^q, \qquad q = \frac{2b}{2b-1}, \quad |m| = 0, 1,$$

*виконується умова узгодженості*

$$B_i(0, z, D_x)\varphi(x)\big|_{\Gamma_0} + \int\limits_S P_i(0, z, \xi, D_\xi)\varphi(\xi)dS_\xi = g_i(0, z), \qquad i = \overline{1, bN}, \quad z \in S.$$

*Тоді розв'язок задачі* (1) – (3) *визначається формулою*

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \Gamma(t, \tau, x, \xi)\big(f(\tau, \xi) - L(\tau, \xi, D, K)\varphi(\xi)\big)d\xi + $$

$$+ \sum_{i=1}^{bN} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \mathbb{E}_i(t, \tau, x, \xi) D^{(\alpha_i)}_S \bar{g}_i(\tau, \xi) dS_\xi \tag{4}$$

*і справджується нерівність*

$$|u|_{2b+\alpha} \le C_1 |\varphi|_{2b+\alpha} + C_2 |f|_\alpha + C_3 \sum_{j=1}^{bN} \left| g_j \right|_{2b-r_j+\alpha}, \tag{5}$$

*в якій*

$$C_i = C_{i1} + C_{i2} \sum_{j=1}^{bN} \sup_{|k| \le r_j} \left| b_{jk} \right|_{2b-r_j+\alpha} + C_{i3} \operatorname{mes} S \sum_{j=1}^{bN} \sup_{|k| \le r_j - 1} \left| p_{jk} \right|_{2b-r_j+\alpha},$$

$$i = 1, 2.$$

Тут $\boldsymbol{\Gamma}$ — фундаментальна матриця розв'язків системи (1) [6], $D^{(\alpha_i)}_S$ — оператор дробового диференціювання, $\mathbb{E}_i$ визначаються за допомогою резольвент $R^1_{ij}$ та $R^2_{ij}$ рівностями

$$\mathbb{E}_i(t, \tau, x, \xi) \equiv \varepsilon^{(\alpha_i)}_i(t, \tau, x, \xi) + \sum_{j=1}^{bN} \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_S \varepsilon^{(\alpha_j)}_j(t, \beta, x, y) \mathcal{R}_{ij}(\beta, \tau, y, \xi) dS_y,$$

$$\mathcal{R}_{ij}(t, \tau, z, \xi) \equiv R^1_{ij}(t, \tau, z, \xi) + R^2_{ij}(t, \tau, z, \xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{bN} \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_S R^2_{ik}(t, \beta, z, y) R^1_{kj}(\beta, \tau, y, \xi) dS_y, \qquad i, j = \overline{1, bN},$$

$\varepsilon^{(\alpha_i)}_i$ — ядра поверхневих потенціалів, що зводять крайову задачу до системи інтегральних рівнянь,

$$\overline{g}_i(t, z) = g_i(t, z) - B_i u_1|_{\Gamma_0} - \int_S P_i u_1 \, dS_\xi,$$

$u_1$ — розв'язок задачі (1), (2) в області $Q$.

**2. Допоміжні твердження.** Наведемо означення просторів, в яких розглядається дана задача.

**Означення 1** [5, с. 72]. *Функція* $f(t, x; \tau, \xi)$ *належить класу* $C_\mu^{(m)}(\Gamma_0, \Gamma_0)$, *якщо при* $t > \tau$ *вона має неперервні похідні* $D_x^k f$ *до порядку цілої частини* $m$ $(m = [m] + \{m\})$, *для яких правильними є оцінки*:

1) *при* $|k| \le [m]$

$$\left| D_x^k f(t, x; \tau, \xi) \right| \le C(t-\tau)^{-\frac{\mu + |k|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$

2) *при* $|k| = [m]$ *і* $|\Delta x| < (t-\tau)^{1/2b}$

$$\left| \Delta_x D_x^k f(t, x; \tau, \xi) \right| \le C |\Delta x|^{\{m\}} (t-\tau)^{-\frac{\mu + m}{2b}} \left[ e^{-c\rho(t,\tau,x+\Delta x,\xi)} + e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)} \right],$$

3) *при* $|k| \le [m]$ *і* $0 < \Delta t < t - \tau$

$$\left| \Delta_t D_x^k f(t, x; \tau, \xi) \right| \le C |\Delta t|^{\frac{\mu - |k|}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{\mu + |k|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}.$$

$C_\mu^{(m)}(\Gamma_0)$ — *клас функцій* $f(t, x)$, *похідні яких задовольняють умови* 1 – 3 *при значеннях* $\tau = \xi = 0$.

**Означення 2.** $C^{(m+\alpha)}(Q)$ — *клас функцій* $f(t, x)$, *що визначені в* $Q$ *і мають неперервні похідні по* $x$ *до порядку* $m$, *до того ж старші похідні по* $x$ *є гельдеровими з показником* $\alpha$. *Норма в класі* $C^{(m+\alpha)}(Q)$ *визначається таким чином*:

$$|u|_{m+\alpha} = |u|_{C^{(m)}} + \sup_{(t,x),(t,x+\Delta x) \in Q} \left( \frac{\left| \Delta_x D_x^m u(t, x) \right|}{|\Delta x|^\alpha} \right).$$

$\overset{o}{C}{}^{(\alpha)}(Q)$ — *клас функцій* $f \in C^{(\alpha)}(Q)$, *що задовольняють умову* $f(t, x)|_{\Gamma_0} = 0$.

Розглянемо далі оператори дробового інтегрування та диференціювання, які визначені на функціях з класу $C_\mu^{(m)}(\Gamma_0, \Gamma_0)$:

$$I_S^\alpha(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1-\alpha}} \int_S G(t-\beta, x, y) f(\beta, y; \tau, \xi) dS_y,$$

$$D_S^\alpha(f) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(t, x; \tau, \xi)}{(t-\tau)^\alpha} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\tau^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}} \int_S G(t-\beta, x, y) \left[ f(\beta, y; \tau, \xi) - f(t, x; \tau, \xi) \right] dS_y,$$

де $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція Ейлера, $G(t, x, y)$ — фундаментальний розв'язок параболічного рівняння

$$\Lambda(D) G \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + (-1)^b \Delta_x^b \right) G = 0, \qquad t > 0,$$

на поверхні $S$, який має властивість

$$\int_S D_x^m G(t,x,y)(y-x)^k dS_y = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ m!, & m = k, \quad |k|, |m| < 2b. \end{cases}$$

Сформулюємо твердження про дію цих операторів.

**Твердження** [5, с. 80]. 1. *Якщо* $\mu < n - 1 + 2b$, $0 < 2b\alpha < m < 2b$, *то оператор дробового диференціювання* $D_S^\alpha$ *відображає простір* $C_\mu^{(m)}(\Gamma_0, \Gamma_0)$ *в* $C_{\mu+2b\alpha}^{(m-2b\alpha)}(\Gamma_0, \Gamma_0)$.

2. *Якщо виконується умова* $m + [2b\alpha] < 2b$, *то оператор дробового інтегрування* $I_S^\alpha$ *діє з простору* $C_\mu^{(m)}(\Gamma_0, \Gamma_0)$ *у простір* $C_{\mu-2b\alpha}^{(m+2b\alpha)}(\Gamma_0, \Gamma_0)$.

Наведемо ще лему про оцінку поверхневого інтеграла, яка легко доводиться, якщо в локальній системі координат перейти від поверхневого інтеграла до об'ємного, який оцінюється інтегралом типу Пуассона.

**Лема** (про оцінку поверхневого інтеграла). *Якщо* $S \in C^{(1+\alpha)}$, *то поверхневий інтеграл*

$$I(t,\tau,x) = \int_S \frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-1}{2b}}} dS_\xi, \qquad c > 0,$$

*є обмеженою функцією для будь-яких* $x \in \mathbb{R}^n$, $t > \tau$.

**3. Алгоритм доведення теореми про коректність.** Розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді суми $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$, де $u_1$ — розв'язок системи (1), що задовольняє початкову умову (2), $u_2$ — розв'язок неоднорідної крайової задачі

$$L(t,x,D,K)u_2 = 0, \qquad u_2|_{t=0} = 0,$$
$$B_i u_2|_{\Gamma_0} + \int_S P_i(t,z,\xi,D_\xi)u_2(t,\xi)dS_\xi = \bar{g}_i(t,z), \qquad i = \overline{1,bN}, \quad z \in S. \tag{6}$$

Продовжимо коефіцієнти системи $A_k(t,x)$ з області $\Omega$ на увесь простір зі збереженням гельдеровості [7, с. 106]. Тоді при виконанні умов теореми існує фундаментальна матриця розв'язків системи $\boldsymbol{\Gamma} = Z + V$, $V \in C_{n-2b-\alpha}^{(2b+\alpha)}(\Pi, \Pi)$, $\boldsymbol{\Pi} = (0,T) \times \mathbb{R}^n$, за допомогою якої розв'язок задачі (1), (2) зображується у вигляді

$$u_1(t,x) = \varphi(x) + \int_0^t d\tau \int_\Omega \Gamma(t,\tau,x,\xi)\big(f(\tau,\xi) - L(\tau,\xi,D,K)\varphi(\xi)\big)d\xi.$$

Об'ємний потенціал має всі похідні, що входять в систему, на основі леми про диференціювання об'ємного інтеграла по області $\Omega$ [8, с. 41] та умов на функції $f$ та $\varphi$.

Розв'язок крайової задачі (6) шукаємо за допомогою поверхневих потенціалів з невідомою щільністю $\mu_j$:

$$u_2(t,x) = \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_S \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi)\mu_j(\tau,\xi)dS_\xi, \tag{7}$$

де

$$\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi) = G_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi) - W_j(t,\tau,x,\xi), \qquad 0 < \alpha_j < 1, \quad 1 \leq j \leq bN,$$

$$W_j(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{\Gamma}(t,\beta,x,y) L(\beta,y,D_y,K) G_j^{(\alpha_j)}(\beta,\tau,y,\xi)\,dy, \qquad (8)$$

$G_j^{(\alpha_j)}$ — функції типу ядер Пуассона, які визначено в [5, с. 86] і для яких виконуються нерівності

$$\left| D_x^k G_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi) \right| \le C_k (t-\tau)^{-\frac{n-1+2b-r_j+|k|-2b\alpha_j}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$
$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad \xi \in S. \qquad (9)$$

Розглянемо потенціал $W_j$. Його щільність

$$L(t,x,D_x,K) G_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi) = \sum_{|k|=2b} \left[ A_k(\tau,\xi) - A_k(t,x) \right] D_x^k G_j^{(\alpha_j)} +$$
$$+ P_{2b-1}(t,x,D_x) G_j^{(\alpha_j)} + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}_+^n} K(t,\beta,x,y) G_j^{(\alpha_j)}(\beta,\tau,y,\xi)\,dy,$$

де оператор $P_{2b-1}$ містить молодші похідні із $L(t,x,D_x)$. Нехай виконуються умови теореми. Покладемо $\alpha_j = \dfrac{2b - r_j - \varepsilon}{2b} < 1$, $\varepsilon < \alpha$. Тоді

$$L(t,x,D_x,K) G_j^{(\alpha_j)} \in C^{(\alpha)}_{n-1+2b-\varepsilon'}(\Pi^+, \Gamma_0), \qquad \varepsilon' = \alpha - \varepsilon > 0.$$

За теоремою 6.5 [5, с. 80] $W_j \in C^{(2b+\alpha)}_{n-1-\varepsilon'}(\Pi^+, \Gamma_0)$. А це означає, що при $t > 0$ і за умов $x \in \Omega$, $\mu_j \in C^{(\alpha)}(\Gamma_0)$ $u_2$ задовольняє однорідну систему за рахунок того, що $L(t,x,D,K) W_j = L(t,x,D,K) G_j^{(\alpha_j)}$. Нульова початкова умова виконується, оскільки підінтегральні функції $\varepsilon_j^{(\alpha_j)}$ є неперервними за сукупністю змінних при $t > \tau$, $x \ne \xi$. Використавши співвідношення [5, с. 87], яке виконується на межі області, задовольнимо крайові умови (6):

$$I_S^{(\alpha_i)} \mu_i(t,z) + \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_S E_{ij}(t,\tau,z,\xi) \mu_j(\tau,\xi)\, dS_\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \int_S P_i(t,z,\xi,D_\xi) \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,\xi,y)\, dS_\xi \right\} \mu_j(\tau,y)\, dS_y = \bar{g}_i(t,z), \quad i = \overline{1,bN}, \qquad (10)$$

де

$$E_{ij}(t,\tau,z,\xi) = \sum_l \left[ B_i^{(l)}(t,\bar{z},D_{\bar{z}}) a_l(z) - B_{0i}^{(l)}(\tau,\bar{\xi},D_{\bar{z}}) a_l(z) \right] \times$$
$$\times G_j^{(l,\alpha_j)}(t-\tau, \bar{z}-\bar{\xi}; \tau, \bar{\xi}) \frac{a_l(\xi)}{\sqrt{g^{(l)}(\xi)}} - B_i(t,z,D_z) W_j(t,\tau,z,\xi) - \delta_{ij} \frac{W_\Lambda(t,\tau,z,\xi)}{(t-\tau)^{1-\alpha_i}}. \qquad (11)$$

Застосувавши оператор дробового диференціювання порядку $\alpha_i$, систему інтегральних рівнянь Вольтерри – Фредгольма 1-го роду (10) відносно невідомих щільностей $\mu_j$ зведемо до еквівалентної системи 2-го роду

$$\mu_i(t,z) = D_S^{(\alpha_i)} \bar{g}_i(t,z) + \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_S Q_{ij}(t,\tau,z,\xi) \mu_j(\tau,\xi)\, dS_\xi, \quad i = \overline{1,bN}, \qquad (12)$$

де введено позначення

$$Q_{ij}(t,\tau,z,\xi) \equiv -D_S^{(\alpha_i)}E_{ij}(t,\tau,z,\xi) - D_S^{(\alpha_i)}\int_S P_i(t,z,y,D_y)\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,y,\xi)dS_y. \quad (13)$$

Для однозначного знаходження розв'язку системи методом послідовних наближень оцінимо ядра $Q_{ij}$.

Розглянемо функції $E_{ij}$, що визначаються формулою (11). Враховуючи, що $b_{ik} \in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Gamma_0)$, $B_iW_j \in C^{(2b-r_i+\alpha)}_{n-1+r_i-\varepsilon'}(\Pi^+,\Gamma_0)$, $W_\Lambda \in C^{(2b+\alpha)}_{n-2}(\Gamma_0,\Gamma_0)$, знаходимо, що $E_{ij} \in C^{(2b-r_i+\alpha)}_{n-1+r_i-\varepsilon'}(\Gamma_0,\Gamma_0)$. Далі, на підставі твердження з п. 2 про дію оператора дробового диференціювання одержимо, що $D_S^{(\alpha_i)}E_{ij} \in C^{(\alpha+\varepsilon)}_{n-1+2b-\alpha}(\Gamma_0,\Gamma_0)$.

Оцінимо другий доданок у формулі (13). Для похідних функцій $\varepsilon_j^{(\alpha_j)}$ на основі оцінки (9) з урахуванням вибору чисел $\alpha_j$ справджується нерівність

$$\left|D_x^k\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi)\right| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{n-1+|k|+\varepsilon}{2b}}e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$
$$t>\tau, \quad x,\ \xi\in S, \quad |k|<2b. \quad (14)$$

Щоб встановити порядок диференціального оператора $P_i(t,z,y,D_y)$, $y$, $z\in S$, розпишемо дію оператора дробового диференціювання, який визначено у п. 2:

$$D_S^{(\alpha_i)}\mathcal{P}_{ij}(t,\tau,z,\xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)}\frac{\mathcal{P}_{ij}(t,\tau,z,\xi)}{(t-\tau)^{\alpha_i}} +$$
$$+\frac{\alpha_i}{\Gamma(1-\alpha_i)}\int_\tau^t\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+2b\alpha_i}{2b}}}\int_S G(t-\beta,z,y)\left[\mathcal{P}_{ij}(\beta,\tau,y,\xi)-\mathcal{P}_{ij}(t,\tau,z,\xi)\right]dS_y \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)}H_1 + \frac{\alpha_i}{\Gamma(1-\alpha_i)}H_2,$$

де

$$\mathcal{P}_{ij}(t,\tau,z,\xi) \equiv \int_S\sum_{|k|\le s}p_{ik}(t,z,y)D_y^k\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,y,\xi)dS_y.$$

На підставі нерівності (14) та леми про оцінку поверхневого інтеграла із п. 2 маємо

$$|H_1(t,\tau,z,\xi)| \le C\sup_{\substack{1\le i\le bN,|k|\le s\\ z,y\in S}}|p_{ik}(t,z,y)|(t-\tau)^{-\frac{|s|+2b-r_i}{2b}},$$
$$t>\tau, \quad z,\ \xi\in S. \quad (15)$$

Для сумовності $H_1$ потрібно, щоб $|s|-r_i<0$. Отже, $|s|=r_i-1$.

Для оцінки $H_2$ оцінимо спочатку приріст функцій $\mathcal{P}_{ij}$ по першому аргументу:

$$\Delta_t\mathcal{P}_{ij}(t,\tau,z,\xi) = \int_S\sum_{|k|\le r_i-1}\left[p_{ik}(t+\Delta t,z,y)-p_{ik}(t,z,y)\right]D_y^k\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t+\Delta t,\tau,y,\xi)dS_y +$$
$$+\int_S\sum_{|k|\le r_i-1}p_{ik}(t,z,y)\left[D_y^k\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t+\Delta t,\tau,y,\xi)-D_y^k\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,y,\xi)\right]dS_y.$$

Оцінка першого доданка випливає з гельдеровості коефіцієнтів крайового оператора по першому аргументу з показником $\frac{2b - r_i + \alpha}{2b}$, оскільки $p_{ik} \in$ $\in C_{t,z}^{(2b-r_i+\alpha)}(\Gamma_0, S)$, леми про оцінку поверхневого інтеграла і того, що $t + \Delta t - \tau \geq$ $\geq t - \tau$. Оцінка другого доданка випливає з того, що $D_y^k \varepsilon_j^{(\alpha_j)} \in C_{n-1+|k|+\varepsilon}^{(2b-|k|)}(\Gamma_0, \Gamma_0)$, $|k| < 2b$. Остаточно маємо

$$\left|\Delta_t \mathcal{P}_{ij}(t, \tau, z, \xi)\right| \leq C_1 |\Delta t|^{\frac{2b-r_i+\alpha}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{r_i-1+\varepsilon}{2b}} +$$

$$+ C_2 \sup_{\substack{1 \leq i \leq bN, |k| \leq r_i - 1 \\ z, y \in S}} |p_{ik}(t, z, y)| |\Delta t|^{\frac{2b-r_i+1}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{r_i-1+\varepsilon}{2b}}, \tag{16}$$

$$t > \tau, \quad z, \xi \in S.$$

$H_2$ безпосередньо оцінити не можна, тому поділимо проміжок інтегрування пополам точкою $t_1$ і розглянемо два інтеграли

$$H_2 = \int_\tau^{t_1} \ldots + \int_{t_1}^{t} \ldots \equiv H_2^1 + H_2^2.$$

Для оцінки $H_2^1$ використаємо лему про оцінку поверхневого інтеграла і те, що $t - \beta \geq t - t_1 \geq (t-\tau)/2$, $|s| = r_i - 1$, $2b\alpha_i = 2b - r_i - \varepsilon$:

$$\left|H_2^1(t, \tau, z, \xi)\right| \leq C_1 \int_\tau^{t_1} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+2b\alpha_i}{2b}} (\beta-\tau)^{\frac{r_i-1+\varepsilon}{2b}}} \int_S \frac{e^{-c\rho(t,\beta,z,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2b}}} dS_y +$$

$$+ C_2 \int_\tau^{t_1} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+2b\alpha_i}{2b}}} \int_S \frac{e^{-c\rho(t,\beta,z,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2b}}} dS_y \, (t-\tau)^{-\frac{r_i-1+\varepsilon}{2b}} \leq C(t-\tau)^{-\frac{2b-1}{2b}}, \tag{17}$$

$$t > \tau, \quad z, \xi \in S.$$

Зобразимо $H_2^2$ у вигляді

$$H_2^2(t, \tau, z, \xi) = \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_i}} \int_S G(t-\beta, z, y)\left[\mathcal{P}_{ij}(\beta, \tau, y, \xi) - \mathcal{P}_{ij}(t, \tau, y, \xi)\right] dS_y +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_i}} \int_S G(t-\beta, z, y)\left[\mathcal{P}_{ij}(t, \tau, y, \xi) - \mathcal{P}_{ij}(t, \tau, z, \xi)\right] dS_y \equiv h_1 + h_2.$$

Для оцінки $h_1$ використаємо нерівність (16) для приросту функції $\mathcal{P}_{ij}$:

$$|h_1(t, \tau, z, \xi)| \leq C_1 \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+2b\alpha_i}{2b} - \frac{2b-r_i+\alpha}{2b}} (\beta-\tau)^{\frac{r_i-1+\varepsilon}{2b}}} +$$

$$+ C_2 \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+2b\alpha_i}{2b} - \frac{2b-r_i+1}{2b}} (\beta-\tau)^{\frac{r_i-1+\varepsilon}{2b}}} \leq C(t-\tau)^{-\frac{r_i-2}{2b}}, \tag{18}$$

$$t > \tau, \quad z, \xi \in S.$$

В обох інтегралах враховано те, що $\beta - \tau \geq t_1 - \tau = (t-\tau)/2$.

Оцінимо $h_2$. Функція $\mathcal{P}_{ij}(t, \tau, z, \xi)$ по третьому аргументу має похідні до порядку $2b - r_i$, причому старші похідні є гельдеровими з показником $\alpha$, оскільки цьому класу належать функції $p_{ik}$. Цим і скористаємось при оцінюванні різниці похідних функції $\mathcal{P}_{ij}$ порядку $m = 2b - r_i$. Для цього додамо і віднімемо від різниці перші $m$ членів ряду Тейлора:

$$h_2 = \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_i}} \int_S G(t-\beta, z, y) \frac{D_z^m \mathcal{P}_{ij}(t, \tau, z + \theta(y-z), \xi) - D_z^m \mathcal{P}_{ij}(t, \tau, z, \xi)}{m!} \times$$

$$\times (y-z)^m dS_y + \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_i}} \sum_{1 \le |k| \le 2b - r_i} \frac{D_z^k \mathcal{P}_{ij}(t, \tau, z, \xi)}{k!} \int_S G(t-\beta, z, y)(y-z)^k dS_y.$$

Так, згідно з властивістю фундаментального розв'язку, яку наведено в п. 2, другий доданок дорівнює нулеві. Таким чином,

$$|h_2(t, \tau, z, \xi)| \le C \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_i}} \int_S \frac{e^{-c\rho(t, \beta, z, y)}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2b}}} \frac{|y-z|^{2b - r_i + \alpha}}{(t-\tau)^{\frac{r_i - 1 + \varepsilon}{2b}}} dS_y \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\frac{r_i - 1 - \alpha}{2b}}, \quad t > \tau, \quad z, \xi \in S. \tag{19}$$

Тут ми поділили і помножили на $t - \beta$ у відповідному степені, в результаті чого одержали інтеграл типу $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |z|^m e^{-c|z|^q} dz$, який є збіжним.

Отже, на основі оцінок (15) – (19) для другого доданка в конструкції ядер $Q_{ij}$ маємо

$$\left| D_S^{(\alpha_i)} \int_S P_i(t, z, \xi, D_\xi) \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t, \tau, \xi, y) dS_\xi \right| \le C(t-\tau)^{-\frac{2b-1}{2b}}, \quad t > \tau.$$

Для знаходження розв'язку системи (12) подамо ядро $Q_{ij}$ у вигляді суми двох ядер

$$Q_{ij}(t, \tau, z, \xi) = -D_S^{(\alpha_i)} E_{ij}(t, \tau, z, \xi) - D_S^{(\alpha_i)} \int_S P_i \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t, \tau, y, \xi) dS_y \equiv Q_{ij}^{(1)} + Q_{ij}^{(2)},$$

для яких справджуються оцінки

$$\left| Q_{ij}^{(1)}(t, \tau, z, \xi) \right| \le C(t-\tau)^{-\frac{n-1+2b-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t, \tau, z, \xi)}, \quad t > \tau, \quad z, \xi \in S,$$

$$\left| Q_{ij}^{(2)}(t, \tau, z, \xi) \right| \le C(t-\tau)^{-\frac{2b-1}{2b}}, \quad t > \tau, \quad z, \xi \in S.$$

Тоді система (12) набере вигляду

$$\mu_i(t, z) = D_S^{(\alpha_i)} \overline{g}_i(t, z) + \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_S Q_{ij}^{(2)} \mu_j dS_\xi + \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_S Q_{ij}^{(1)} \mu_j dS_\xi, \quad i = \overline{1, bN}. \tag{20}$$

Якщо розглядати (20) як систему інтегральних рівнянь Вольтерри – Фредгольма 2-го роду відносно шуканої функції $\mu_i$ з ядром $Q_{ij}^{(1)}$ та неоднорідністю

$$D_S^{(\alpha_i)} \overline{g}_i + \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_S Q_{ij}^{(2)} \mu_j dS_\xi,$$

то квазірегулярність ядра $Q_{ij}^{(1)}$ дозволяє встановити збіжність ряду Неймана, і для резольвенти $R^1_{ij}(t,\tau,z,\xi)$ правильною є оцінка, як і для ядра $Q^{(1)}_{ij}$ з іншими сталими. Тоді розв'язок системи (20) матиме вигляд

$$\mu_i(t,z) = D_S^{(\alpha_i)}\overline{g}_i(t,z) + \sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau \int_S R^1_{ij}(t,\tau,z,\xi) D_S^{(\alpha_j)}\overline{g}_j(\tau,\xi)dS_\xi + $$

$$+ \sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_S Q^{(2)}_{ij}\mu_j dS_\xi + \sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau \int_S R^1_{ij}(t,\tau,z,\xi)\sum_{l=1}^{bN}\int_0^\tau d\beta\int_S Q^{(2)}_{jl}\mu_l dS_y\, dS_\xi, \quad i = \overline{1,bN}. \tag{21}$$

Якщо в останньому доданку змінити порядок інтегрування, то відносно $\mu_i$ (21) є системою інтегральних рівнянь Вольтерри – Фредгольма 2-го роду з ядром

$$N_{ij}(t,\tau,z,\xi) \equiv Q^{(2)}_{ij}(t,\tau,z,\xi) + \sum_{l=1}^{bN}\int_\tau^t d\beta\int_S R^1_{il}(t,\beta,z,y)Q^{(2)}_{lj}(\beta,\tau,y,\xi)dS_y$$

та неоднорідністю

$$D_S^{(\alpha_i)}\overline{g}_i + \sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_S R^1_{ij}D_S^{(\alpha_j)}\overline{g}_j\, dS_\xi.$$

На основі оцінок для $Q^{(2)}_{ij}$ та $R^1_{ij}$ ядро $N_{ij}$ задовольняє нерівність

$$\left|N_{ij}(t,\tau,z,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-\frac{2b-1}{2b}}, \quad t>\tau, \quad z,\ \xi\in S,$$

яка гарантує існування резольвенти $R^2_{ij}$, для якої справджується оцінка

$$\left|R^2_{ij}(t,\tau,z,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-\frac{2b-1}{2b}}, \quad t>\tau, \quad z,\ \xi\in S.$$

Тоді розв'язок системи (21) має вигляд

$$\mu_i(t,z) = D_S^{(\alpha_i)}\overline{g}_i(t,z) + \sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_S \mathcal{R}_{ij}(t,\tau,z,\xi)D_S^{(\alpha_j)}\overline{g}_j(\tau,\xi)dS_\xi,$$

а остаточний розв'язок крайової задачі визначається формулою (4).

Усі встановлені нерівності дозволяють оцінити розв'язок крайової задачі та одержати оцінку (5).

Теорему доведено.


1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.
2. *Загорский Т. Я.* Смешанная задача для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1961. – 115 с.
3. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 162.
4. *Ивасишен С. Д.* Матрица Грина параболических задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 199 с.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
6. *Данилюк А. О.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 349. – С. 18 – 24.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
8. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.


Одержано 15.01.08,
після доопрацювання — 07.05.08