УДК 517.956

С. А. Алдашев (Актюб. ун-т, Актобе, Казахстан)

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

We show nonuniqueness of a solution of the Gellerstedt spatial problem for a class of multidimensional hyperbolic elliptic equations.

Показано неєдиність розв'язку просторової задачі Геллерстедта для одного класу багатовимірних гіперболо-еліптичних рівнянь.

Проблема корректности смешанных задач для гиперболо-эллиптических уравнений в многомерных областях в настоящее время остается открытой [1, 2]. В данной работе показано, что однородная пространственная задача Геллерстедта для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ сферической поверхностью $\Gamma\colon |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ конусами $K_0\colon |x| = -t$, $K_1\colon |x| = 1 + t$, $-1/2 \le t \le 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через S — общую часть границ областей D^+, D^-, представляющих множество $\{t = 0,\, 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m. Часть конусов K_0, K_1, ограничивающих области D^-, обозначим через S_0, S_1 соответственно.

В области D рассмотрим многомерные гиперболо-эллиптические уравнения

$$\Delta_x u + \operatorname{sgn} t\, u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \ge 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \ge 0$, $0 \le \theta_1 < 2\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 2, \ldots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

В [1, 2] в качестве многомерного аналога задачи Геллерстедта для уравнения (1) предложена следующая задача.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D при $t \ne 0$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = 0, \qquad u|_{S_0} = 0. \tag{2}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространство Соболева.

Через $a_{in}^k(r,t),\ \hat{a}_{in}^k(r,t),\ b_n^k(r,t),\ c_n^k(r,t),\ h_n^k$ обозначим коэффициенты разложения в ряды по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $a_i(r,\theta,t)h(\theta),\ a_i\dfrac{x_i}{r}h,\ b(r,\theta,t)h,\ c(r,\theta,t)h,\ h(\theta),\ i=1,\ldots,m,$ причем $h(\theta)\in$ $\in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Если $a_i(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t)\in W_2^l(D^+\cup D^-),\ i=1,\ldots,m,\ l\geq m+1,$ то справедлива следующая теорема.

Теорема. *Задача* 1 *имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.*

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области D^+ имеет вид [3, 4]

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u+u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0, \quad (3)$$

где

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\theta_j),$$

$$g_1=1,\quad g_j=(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2,\quad j>1.$$

Решение задачи 1 в области D^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (4) в (3), аналогично [3, 5] получим уравнение вида

$$h_0^1\bar{u}_{0rr}^1+h_0^1u_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}h_0^1+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+b_0^1\bar{u}_{0t}^1+c_0^1\bar{u}_0^1+$$

$$+\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}\left\{h_n^k\bar{u}_{nrr}^k+h_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}h_n^k+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+b_n^k\bar{u}_{nt}^k+\right.$$

$$\left.+\left[c_n^k-\frac{\lambda_n h_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^m\left(a_{in-1}^k-n\hat{a}_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k\right\}=0,\quad \lambda_n=n(n+m-2). \quad (5)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$h_0^1\bar{u}_{0rr}^1+h_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}h_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \quad (6)$$

$$h_1^k\bar{u}_{1rr}^k+h_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}h_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}h_1^k\bar{u}_1^k=$$

$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+b_0^1\bar{u}_{0t}^1+c_0^1\bar{u}_0^1\right),\quad n=1,\quad k=\overline{1,k_1}, \quad (7)$$

$$h_n^k\bar{u}_{nrr}^k+h_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}h_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}h_n^k\bar{u}_n^k=$$

$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_{in-1}^{k}\bar{u}_{n-1r}^{k} + b_{n-1}^{k}\bar{u}_{n-1t}^{k} + \right.$$

$$\left. + \left[c_{n-1}^{k} + \sum_{i=1}^{m}\left(a_{in-2}^{k} - (n-1)\,\hat{a}_{in-1}^{k}\right)\right]\bar{u}_{n-1}^{k}\right\}, \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=2,3,\ldots. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots,$ — решение системы (6)–(8), то оно является и решением уравнения (5).

Учитывая ортогональность сферических функций $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ [4], первое из условий (2) записываем в виде

$$\bar{u}_n^k\left(r,\sqrt{1-r^2}\right)=0, \qquad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots, \quad 0\le r\le 1. \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (6)–(8) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k + \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r,t), \qquad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots, \tag{10}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Выполняя в (9), (10) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$, а затем полагая $r=\rho\cos\varphi$, $t=\rho\sin\varphi$, $\rho\ge 0$, $0\le\varphi\le\pi$, получаем

$$\upsilon_{n\rho\rho}^k + \frac{1}{\rho}\upsilon_{n\rho}^k + \frac{1}{\rho^2}\upsilon_{n\varphi\varphi}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{\rho^2\cos^2\varphi}\upsilon_n^k = f_n^k(\rho,\varphi), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(1,\varphi)=0,$$

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi) = u_n^k(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi), \qquad \overline{\lambda_n} = \frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4}, \tag{12}$$

$$f_n^k(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi)^{(m-1)/2}\,\bar{f}_n^k(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots.$$

Сначала рассмотрим случай $n=0$, $k=1$. Тогда из (11), (12) находим

$$\upsilon_{0\rho\rho}^1 + \frac{1}{\rho}\upsilon_{0\rho}^1 + \frac{1}{\rho^2}\upsilon_{0\varphi\varphi}^1 + \frac{\overline{\lambda_0}}{\rho^2\cos^2\varphi}\upsilon_0^1 = 0, \tag{13}$$

$$\upsilon_0^1(1,\varphi)=0. \tag{14}$$

Решение задачи (13), (14) будем искать в виде

$$\upsilon_0^1(\rho,\varphi) = R(\rho)\phi(\varphi). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13), имеем

$$\rho^2 R_{\rho\rho} + \rho R_\rho - \mu R = 0, \tag{16}$$

$$\phi_{\varphi\varphi} + \left(\mu + \frac{\overline{\lambda_0}}{\cos^2\varphi}\right)\phi = 0, \quad \mu = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Ограниченным решением уравнения (16) является функция

$$R(\rho) = \rho^s, \qquad \mu = s^2, \quad 0 \le s = \mathrm{const}\,.$$

Далее, уравнение (17) запишем следующим образом:

$$\phi_{\varphi\varphi} = \left[\frac{l(l-1)}{\cos^2\varphi} - s^2\right]\phi, \quad l = -\frac{m-3}{2}. \tag{18}$$

Выполняя в уравнении (18) замену переменных $\xi = \sin^2\varphi$, приходим к уравнению

$$\xi(\xi-1)g_{\xi\xi} + \left[(\alpha+\beta+1)\xi - \frac{1}{2}\right]g_\xi + \alpha\beta g = 0,$$

$$g(\xi) = \frac{\phi(\varphi)}{\cos^l\varphi}, \qquad \alpha = \frac{l+s}{2}, \quad \beta = \frac{l-s}{2},$$

общее решение которого представимо в виде [6]

$$g_s(\xi) = c_{1s}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};\xi\right) + c_{2s}\sqrt{\xi}F\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\xi\right) \tag{19}$$

и периодическое по φ, если $s = 0, 1, \ldots$, где c_{1s}, c_{2s} — произвольные независимые постоянные, а $F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Таким образом, в силу (15), (19) общее решение уравнения (13) принимает вид

$$\upsilon_0^1(\rho,\varphi) = \sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\cos^l\varphi\left[c_{1s}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + c_{2s}\sin\varphi F\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{20}$$

Поскольку $\left|\upsilon_0^1\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty$, из (20) имеем

$$c_{1s}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};1\right) + c_{2s}F\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2},\frac{3}{2};1\right) = 0$$

или

$$c_{2s} = -\frac{2c_{1s}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2-\beta)}, \tag{21}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Подставляя (21) в (20), получаем

$$\upsilon_0^1(\rho,\varphi) = \sum_{s=0}^{\infty}c_{1s}\rho^s\cos^l\varphi\left[F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2-\beta)}\sin\varphi F\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{22}$$

Подчинив функцию (22) граничному условию (14), получим $c_{1s} = 0$, $s = 0, 1, \ldots$, и, значит, $\upsilon_0^1(r,\varphi) \equiv 0$, т. е. $u_0^1(r,t) \equiv 0$. Отсюда следует $\overline{f}_1^k(r,t) \equiv 0$.

Далее, из задачи (11), (12) получаем задачу

$$\upsilon^k_{1\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\upsilon^k_{1\rho} + \frac{1}{\rho^2}\upsilon^k_{1\varphi\varphi} + \frac{\overline{\lambda_1}}{\rho^2\cos^2\varphi}\upsilon^k_1 = 0,$$

$$\upsilon^k_1(\rho,\varphi) = 0, \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1},$$

решение которой также $\upsilon^k_1(\rho,\varphi) \equiv 0$.

Продолжая этот процесс, находим $\upsilon^k_n(\rho,\varphi) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, $u(r,\theta,t) \equiv 0 \ \forall (r,\theta,t) \in \bar{D}^+$.

Следовательно, задача 1 сводится к задаче Дарбу в области D^- для уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0$$

с данными $u\,|_S = 0$, $u\,|_{S_0} = 0$, имеющей бесчисленное множество нетривиальных решений [3, 5].

Теорема доказана.

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
3. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
4. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
5. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 1. – С. 64 – 68.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.

Получено 17.06.09,
после доработки — 26.08.09