УДК 517.9

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
С. М. Чуйко (Славян. пед. ун-т)

МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

We study the problem of finding existence conditions and the construction of solutions of the Noetherian weakly nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. We propose a new iterative algorithm with accelerated convergence for the construction of solutions of the Noetherian weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case.

Досліджено задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язків нетерових слабконелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано нову ітераційну процедуру з прискореною збіжністю для знаходження розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о нахождении условий существования и построении сходящихся итерационных процедур для вычисления решений

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,\big(z_1(t,\varepsilon),\ldots,z_n(t,\varepsilon)\big),$$
$$z_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad z_j(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot)\colon\ C[a,b] \to R^m$, $m \neq n$. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задачи (1), (2) дважды непрерывно дифференцируемы по неизвестной z в малой выпуклой окрестности порождающего решения и непрерывно дифференцируемы по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля; вектор-функция $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывна по независимой переменной t на отрезке $[a,\ b]$.

Для построения решений краевой задачи (1), (2) традиционно используется метод простых итераций [1 – 7]. Преимуществом этого метода являются простота и численная устойчивость, однако сходимость итерационной процедуры, получаемой по методу простых итераций, линейна, поэтому естественно возникает задача о построении итерационной процедуры, имеющей ускоренную сходимость. Для ускорения сходимости итерационных процедур Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [8] в случае периодических задач и Н. Н. Боголюбовым, Ю. А. Митропольским и А. М. Самойленко [9] в случае квазипериодических задач разработаны и строго обоснованы эффективные методы последовательных замен переменных.

В данной статье для построения итерационной процедуры, имеющей ускоренную сходимость, в случае общей нетеровой краевой задачи используем эффективный метод Ньютона – Канторовича [10, 11], который применяется к операторной системе, полученной в монографии [1]. Решение краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \qquad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{3}$$

При этом порождающая задача рассматривается в критическом случае $\big(P_{Q^*} \neq 0\big)$ и предполагается выполненным условие ее разрешимости [1]

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{4}$$

Тогда задача (3) имеет r-параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \alpha\big](t).$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — постоянная $(m\times n)$-матрица, P_{Q^*} — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*}\colon R^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица $(X(a) = = I_n)$ однородной части системы (3), $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, $(n \times r)$-мерная матрица $X_r(t)$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы $X(t)$,

$$G[f(s); \alpha](t) = X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\Big\} + K\big[f(s)\big](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи (3), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу,

$$K\big[f(s)\big](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (3). Необходимое условие существования решения задачи (1), (2) в критическом случае определяет следующая лемма [1].

Лемма. *Пусть краевая задача* (1), (2) *представляет критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие* (4) *разрешимости порождающей задачи* (3). *Предположим также, что задача* (1), (2) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^* \in R^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K\big[Z(z_0(s, c_r), s, 0)\big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

2. Достаточное условие существования решения. Предположим далее условия леммы выполненными. Фиксируя один из действительных корней $c_r^* \in R^r$ уравнения (5), ищем решение задачи (1), (2) $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$ в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\big[f(s); \alpha\big](t).$$

Таким образом, приходим к краевой задаче

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{6}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{7}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z,t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon = 0:$

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) =$$

$$= Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

где

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_2(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=}}.$$

Остаток $R_1(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$, чем два первых члена разложения, поэтому

$$R_1(z,t,\varepsilon)\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \qquad \frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому и второму аргументам векторного функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, выделяем линейные по x и по ε части $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ и $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)$ этого функционала и член $J(z_0(\cdot,c_r^*),0) = J(z(\cdot,0),0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0:$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) =$$

$$= J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Остаток $J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$, чем два первых члена разложения, поэтому

$$J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0, \qquad \frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0.$$

Пусть

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\big[A_1(s)X_r(s)\big](\cdot)\Big\}$$

— $(d \times r)$-матрица. При условии $P_{B_0^*} = 0$ задача о построении решения

$$x(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\big(x^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, x^{(n)}(t,\varepsilon)\big),$$

$$x^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C[a,b], \quad x^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

операторной системы $x(t,\varepsilon) = \Phi x(t,\varepsilon)$ эквивалентна задаче о построении решения краевой задачи (6), (7), при $\varepsilon = 0$ обращающегося в нулевое [12]:

$$\Phi x(t,\varepsilon) = -X_r(t) B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon \ell_1 G\big[Z(z_0+x,s,\varepsilon); J(z_0+x,\varepsilon)\big](\cdot) +$$

$$+\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0+x,\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\varepsilon A_1(s) G\big[Z(z_0+x,\tau,\varepsilon); J(z_0+x,\varepsilon)\big](s) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0+x,s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} +$$

$$+\varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t) + X_r(t) c_r.$$

Оператор $\Phi\Big(Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big)$ представляет собой суперпозицию билинейного по $Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ оператора, действующего на непрерывно дифференцируемую по x функцию $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Билинейность по $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ означает, что для любых действительных чисел λ_1, λ_2, любых функций $Z_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, $Z_2(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и функционалов $J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, $J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ имеет место равенство

$$\Phi\Big(\lambda_1 Z_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + \lambda_2 Z_2(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon); \lambda_1 J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \lambda_2 J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big) =$$

$$= \lambda_1 \Phi\Big(Z_1(z_(t,\varepsilon),t,\varepsilon); J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big) + \lambda_2 \Phi\Big(Z_2(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon); J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big).$$

Вектор-функция $Z(z,t,\varepsilon)$ дважды непрерывно дифференцируема по первому аргументу в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ и точки $\varepsilon = 0$. Кроме того, в этой окрестности векторный функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ дважды непрерывно дифференцируем (в смысле Фреше) по первому аргументу, поэтому оператор $\Phi x(t,\varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемый ограниченный оператор, действующий из пространства непрерывных на отрезках $[a,b]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций $x(t,\varepsilon) \in C[a,b], C[0,\varepsilon_0]$ в себя. Производная последнего оператора имеет вид

$$\frac{\partial \Phi\big(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)\big)}{\partial x} =$$

$$= -X_r(t) B_0^+ P_{Q_r^*}\left\{\varepsilon \ell_1 G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot) + \frac{\partial J_1(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x} -\right.$$

$$\left. -\ell K\left[\varepsilon A_1(s) G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](s) + \frac{\partial R_1(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot)\right\} +$$

$$+\varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right](t)$$

и при $\varepsilon \to 0$ равна нулю. Действительно, из непрерывности функционалов ℓ и ℓ_1, ограниченности операторов Грина задачи Коши и обобщенного оператора Грина и непрерывной дифференцируемости по независимой переменной x нелинейностей $Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)$ и $J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ следует, что два первых слагаемых последней производной

$$\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\big)}{\partial x}=$$

$$=-\varepsilon X_r(t)B_0^+P_{Q_r^*}\left\{\ell_1 G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x};\frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot)-\right.$$

$$\left.-\ell K\left[A_1(s)G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,\tau,\varepsilon)}{\partial x};\frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](s)\right](\cdot)\right\}+$$

$$+\varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x};\frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right](t)-$$

$$-X_r(t)B_0^+P_{Q_r^*}\left\{\frac{\partial J_1(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}-\ell K\left[\frac{\partial R_1(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot)\right\}$$

при $\varepsilon\to 0$ равны нулю. Кроме того, из непрерывной дифференцируемости по переменной x нелинейностей $Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)$ и $J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, следует, что

$$\frac{\partial R_1(z_0(t,c_r^*),t,0)}{\partial x}\equiv 0,\qquad \frac{\partial J_1(z_0(\cdot,c_r^*),0)}{\partial x}\equiv 0.$$

Следовательно, и третье, и четвертое слагаемые последней производной при $\varepsilon\to 0$ равны нулю.

3. Итерационная процедура. Для применения метода Ньютона – Канторовича в рассматриваемом критическом случае введем оператор

$$\varphi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),\varepsilon\big)=\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\big)-x(t,\varepsilon),$$

действующий из пространства непрерывных на отрезках $[a,b]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций

$$x(t,\varepsilon)=\operatorname{col}\left(x^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,x^{(1)}(t,\varepsilon)\right),$$

$$x^{(i)}(\cdot,\varepsilon)\in C[a,b],\quad x^{(i)}(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\quad i=1,2,\ldots,n,$$

в это же пространство. Поскольку

$$\det\left[\frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial x}\right]=-1\neq 0,$$

при достаточно малом $\varepsilon\in[0;\varepsilon^*]\subset[0;\varepsilon_0]$ существует окрестность

$$\big\|x(t,\varepsilon)\big\|\le\rho^*$$

точки $x(t,\varepsilon)=0$, в пределах которой

$$\det\left[\frac{\partial\varphi(x(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right]\neq 0,$$

при этом производная $\varphi'_x\bigl(x(t,\varepsilon),\varepsilon\bigr)$ сохраняет непрерывность. Таким образом, согласно теореме Канторовича [10, с. 680], в критическом случае первого порядка для нахождения решения краевой задачи (6), (7) получаем следующую итерационную процедуру:

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = x_k(t,\varepsilon) -$$
$$- \left[\frac{\partial\Phi\bigl(z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)\bigr)}{\partial x} - I_n\right]^{-1} \left[\Phi\bigl(z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)\bigr) - x_k(t,\varepsilon)\right], \quad (8)$$
$$x_0(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Итерационная процедура (8) сходится при условии, что в достаточно малой окрестности порождающего решения выполняется неравенство

$$2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon) < 1. \quad (9)$$

Здесь величины $\gamma_1(\varepsilon)$, $\gamma_2(\varepsilon)$, $\gamma_3(\varepsilon)$ гарантируют выполнение неравенств

$$\left\| \left\{ \frac{\partial\varphi(z_0(t,c_r^*),\varepsilon)}{\partial z} \right\}^{-1} \right\| \le \gamma_1(\varepsilon), \qquad \left\| \varphi\bigl(z_0(t,c_r^*),\varepsilon\bigr) \right\| \le \gamma_2(\varepsilon),$$
$$\left\| \frac{\partial^2\varphi(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2} \right\| \le \gamma_3(\varepsilon).$$

В пределах указанной окрестности порождающего решения итерационная процедура (8) обеспечивает квадратичную сходимость. Оператор

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial\varphi(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \right] x(t,\varepsilon) \right\} y(t,\varepsilon)$$

определяет отображение

$$x(\cdot,\varepsilon),\ y(\cdot,\varepsilon)\colon\ \Bigl\{ C[a,b] \times C[a,b] \Bigr\} \to C[a,b],$$

имеющее свойства симметрии и билинейности [13, 14]. Норма второй производной (по Фреше) оператора $\varphi(z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ имеет вид

$$\left\| \frac{\partial^2\varphi(z(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2} \right\| = \sup_{\|x\|\le 1} \frac{\left\| \dfrac{\partial}{\partial z} \left\{ \dfrac{\partial\varphi(z(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} x \right\} x \right\|}{\|x\|^2}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть для краевой задачи* (1), (2) *имеет место критический случай* $P_{Q^*} \ne 0$ *и выполнено условие* (4) *разрешимости порождающей задачи* (3). *Тогда для каждого корня* $c_r^* \in R^r$ *уравнения* (5) *при условии*

$$P_{B_0^*} = 0 \quad (10)$$

задача (6), (7) *имеет хотя бы одно решение*

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(x^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,x^{(n)}(t,\varepsilon)\right),$$

$$x^{(i)}(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b],\quad x^{(i)}(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\quad i=1,2,\ldots,n,$$

при $\varepsilon=0$ *обращающееся в нулевое* $x(t,0)\equiv 0$. *При условии* (9) *это решение можно определить с помощью сходящегося для* $\varepsilon\in[0,\varepsilon^*]$ *итерационного процесса* (8). *Тогда задача* (1), (2) *имеет хотя бы одно решение*

$$z(t,\varepsilon)=\operatorname{col}\big(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,z^{(n)}(t,\varepsilon)\big),$$

$$z^{(i)}(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b],\quad z^{(i)}(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\quad i=1,2,\ldots,n,$$

при $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0)\equiv z_0(t,c_r^*)$, *которое может быть найдено по формуле* $z_k(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon)$, $k=1,2,\ldots$, *с помощью итерационного процесса* (8).

Соответствующая итерационная процедура, имеющая квадратичную сходимость, для некритической краевой задачи (1), (2) была построена в статье [15].

Замечание. Условие (10) в случае нетеровых краевых задач $(m\neq n)$ равносильно требованию $\operatorname{rank}B_0=d$, а в случае фредгольмовых $(m=n)$ — условию простоты корней $(\det B_0\neq 0)$ уравнения (5). Обозначим вектор

$$F_1(c_r^*)=P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\big[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0\big](\cdot)+\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)-$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](s)+A_2(s)\Big](\cdot)\Big\}.$$

При выполнении равенства $F_1(c_r^*)=0$ вид оператора $\Phi x(t,\varepsilon)$ значительно упрощается. Действительно,

$$\Phi x(t,\varepsilon)=-X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon\ell_1 G\big[A_1(s)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(s)+R_1(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon);$$

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](\cdot)+J_1(z_0+x,\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[\varepsilon A_1(s)G\big[A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+\varepsilon A_2(\tau)+R_1(z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);$$

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](s)+R_1(z_0+x,s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}+$$

$$+\varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t)+X_r(t)c_r.$$

Производная последнего оператора имеет вид

$$\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\big)}{\partial x}=-X_r(t)B_0^+P_{Q_r^*}\left\{\varepsilon\ell_1 G\left[A_1(s)+\frac{\partial R_1(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x};\right.\right.$$

$$\left.\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\frac{\partial J_1(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot)+\frac{\partial J_1(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}-$$

$$-\ell K\left[\varepsilon A_1(s)G\left[A_1(\tau)+\frac{\partial R_1(z_0+x,\tau,\varepsilon)}{\partial x};\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\frac{\partial J_1(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](s)+\frac{\partial R_1(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot)\right\}+$$

$$+\varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x};\frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right](t).$$

В случае задачи для уравнения (1) с периодическим условием

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon)) \equiv \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) \equiv J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon)) \equiv 0$$

оператор, входящий в итерационную процедуру (8), упрощается

$$\Phi\big(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)\big) = \varepsilon G\big[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); 0\big](t) +$$
$$+ X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \Big\{\varepsilon A_1(s) G\big[A_1(\tau) x(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau) +$$
$$+ R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon); 0\big](s) + R_1(z_0 + x, s, \varepsilon)\Big\}(\cdot),$$

как и его производная

$$\frac{\partial \Phi\big(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)\big)}{\partial x} = \varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial x}; 0\right](t) +$$
$$+ X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \left\{\varepsilon A_1(s) G\left[A_1(\tau) + \frac{\partial R_1(z_0 + x, \tau, \varepsilon)}{\partial x}; 0\right](s) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial R_1(z_0 + x, s, \varepsilon)}{\partial x}\right\}(\cdot).$$

При выполнении равенства $F_1(c_r^*) = 0$ для краевой задачи с периодическим условием последний оператор принимает вид

$$\Phi x(t, \varepsilon) = X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \Big[\varepsilon A_1(s) G\big[\varepsilon A_1(\tau) x(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ A_2(\tau) + R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon); 0\big](s) + R_1(z_0 + x, s, \varepsilon)\Big](\cdot) +$$
$$+ \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); 0\Big](t).$$

При этом упрощается и его производная

$$\frac{\partial \Phi\big(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)\big)}{\partial x} = \varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial x}; 0\right](t) +$$
$$+ X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \left\{\varepsilon A_1(s) G\left[A_1(\tau) + \frac{\partial R_1(z_0 + x, \tau, \varepsilon)}{\partial x}; 0\right](s) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial R_1(z_0 + x, s, \varepsilon)}{\partial x}\right\}(\cdot).$$

Следствие. *Пусть краевая задача с периодическим условием для уравнения* (1) *представляет критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено требование* (4) *разрешимости порождающей задачи* (3). *Тогда для каждого простого* $(\det B_0 \neq 0)$ *корня* $c_r^* \in R^r$ *уравнения* (5) *для порождающих амплитуд задача* (6), (7) *имеет единственное решение*

$$x(t, \varepsilon) = \operatorname{col}\big(x^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, x^{(n)}(t, \varepsilon)\big),$$
$$x^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[0, T], \quad x^{(i)}(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в нулевое* $x(t,0) \equiv 0$. *При условиях* (9) *и* $F_1(c_r^*) = 0$ *это решение можно определить с помощью сходящегося для* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *итерационного процесса* (8). *Задача* (1), (2) *имеет в этом случае единственное решение*

$$z(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\big(z^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, z^{(n)}(t,\varepsilon)\big),$$

$$z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \quad z^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) \equiv z_0(t,c_r^*)$, *которое может быть найдено по формуле* $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)$, $k = 1,2,\ldots$, *с помощью итерационного процесса* (8); *здесь*

$$\Phi x_k(t,\varepsilon) = X_r(t)B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\ Big[\varepsilon A_1(s)G\big[\varepsilon A_1(\tau)x_k(\tau,\varepsilon) +$$

$$+ A_2(\tau) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);0\big](s) + R_1(z_0 + x_k, s,\varepsilon)\Big](\cdot) +$$

$$+ \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*) + x_k(s,\varepsilon), s,\varepsilon);0\Big](t),$$

$$\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)\big)}{\partial x} = \varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*) + x_k(s,\varepsilon), s,\varepsilon)}{\partial x};0\right](t) +$$

$$+ X_r(t)B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\left\{\varepsilon A_1(s)G\left[A_1(\tau) + \frac{\partial R_1(z_0 + x_k,\tau,\varepsilon)}{\partial x};0\right](s) +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial R_1(z_0 + x_k, s,\varepsilon)}{\partial x}\right\}(\cdot), \quad k = 0,1,2\ldots.$$

Пример. Покажем, что все требования следствия выполнены в задаче

$$\frac{dz}{dt} = (2t-1)z + \varepsilon z\ln z,$$
$$\ell z(\cdot) = z(0,\varepsilon) - z(1,\varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Для этого исследуем порождающую задачу

$$\frac{dz_0}{dt} = (2t-1)z_0,$$
$$\ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(1) = 0. \tag{12}$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциального уравнения (12) — функция $X(t) = e^{t^2-t}$. Поскольку $Q = \ell X(\cdot) = 0$, имеет место критический случай. При этом $r = d = 1$,

$$P_{Q^*} = P_{Q_d^*} = P_Q = P_{Q_r} = 1.$$

Решение порождающей задачи (12) имеет вид

$$z_0(t,c_r^*) = e^{t^2-t+\frac{1}{6}}.$$

Задача (11) удовлетворяет требованиям доказанной теоремы, так как $B_0 = 1$. Следовательно, выполнено условие (10). Таким образом, итерационная процедура (8) применима для нахождения периодического решения уравнения (11), кроме того, в данном случае выполнены все условия следствия, в частности требование $F_1(c_r^*) = 0$. Действительно,

$$F_1(c_r^*) = e^{\frac{1}{6}} \int\limits_0^1 \left(s^2 - s + \frac{7}{6}\right)\left(\frac{s}{6} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right) ds = 0.$$

Для нахождения первого приближения используем оператор

$$\Phi\big(z_0(t, c_r^*)\big) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c_r^*), s, \varepsilon); 0\Big](t) +$$

$$+ X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \Big\{\varepsilon A_1(s) G\big[Z(z_0(s, c_r^*), \tau, \varepsilon); 0\big](s)\Big\}(\cdot) =$$

$$= \varepsilon G\big[Z(z_0(t, c_r^*), t, 0); 0\big](t) = \varepsilon e^{\frac{1}{6}} e^{t^2 - t}\left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right).$$

Производная этого оператора имеет вид

$$\frac{\partial \Phi\big(z_0(t, c_r^*)\big)}{\partial x} = \varepsilon G\big[A_1(s); 0\big](t) + \varepsilon X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \Big\{A_1(s) G\big[A_1(\tau); 0\big](s)\Big\}(\cdot).$$

Для достаточно малых значений малого параметра ε величина

$$\frac{\partial \Phi\big(z_0(t, c_r^*)\big)}{\partial x} - 1$$

отлична от нуля, в частности при $\varepsilon = 0,1$

$$-1{,}05\,891 \leq \frac{\partial \Phi\big(z_0(t, c_r^*)\big)}{\partial x} - 1 \leq -0{,}941\,091;$$

при $\varepsilon = 0{,}5$

$$-1{,}29\,454 \leq \frac{\partial \Phi\big(z_0(t, c_r^*)\big)}{\partial x} - 1 \leq -0{,}705\,457.$$

В отличие от оператора $\Phi\big(z_0(t, c_r^*)\big)$ значение его производной $\Phi'_x\big(z_0(t, c_r^*)\big)$ не выражается через элементарные функции. Для вычисления второго слагаемого воспользуемся разложением интеграла

$$G\big[A_1(s); 0\big](t) = e^{t^2 - t} \int\limits_0^t e^{s - s^2} A_1(s) ds$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0{,}5$. Приводя подобные слагаемые с точностью до $(t - 0{,}5)^{21}$, получаем полином

$$G\big[A_1(s); 0\big](t) \approx -1{,}5697 \cdot 10^{-15} + 1{,}16\,667t - 1{,}08\,333t^2 + 1{,}47\,222t^3 -$$

$$- 0{,}909\,722t^4 + 0{,}770\,833t^5 - 0{,}431\,713t^6 + 0{,}281\,911t^7 - 0{,}143\,167t^8 +$$

$$+ 0{,}0785\,547t^9 - 0{,}0364\,895t^{10} + 0{,}0176\,008t^{11} - 0{,}00754\,951t^{12} +$$

$$+ 0{,}00328\,947t^{13} - 0{,}00131\,318t^{14} + 0{,}000\,523\,882t^{15} -$$

$$- 0{,}000\,192\,717t^{16} + 0{,}0000\,679\,567t^{17} - 0{,}0000\,207\,956t^{18} +$$

$$+ 5{,}38\,275 \cdot 10^{-6} t^{19} - 9{,}8141 \cdot 10^{-7} t^{20} + 1{,}05\,508 \cdot 10^{-7} t^{21}.$$

Аналогично, с точностью до $(t - 0{,}5)^{21}$, получаем полином

$$\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*)\big)}{\partial x} \approx \varepsilon\Big(-0{,}589\,087 + 1{,}75\,575t - 1{,}96\,696t^2 + 2{,}15\,949t^3 -$$

$$- 1{,}52\,335t^4 + 1{,}16\,847t^5 - 0{,}702\,529t^6 + 0{,}434\,209t^7 - 0{,}229\,908t^8 +$$

$$+ 0{,}122\,036t^9 - 0{,}058\,184t^{10} + 0{,}0274\,747t^{11} - 0{,}0119\,808t^{12} + 0{,}00513\,824t^{13} -$$

$$- 0{,}00206\,392t^{14} + 0{,}000805\,121t^{15} - 0{,}000\,290738t^{16} + 0{,}0000\,973\,512t^{17} -$$

$$- 0{,}0000\,280\,652t^{18} + 6{,}64\,702\cdot 10^{-6}t^{19} - 1{,}10\,784\cdot 10^{-6}t^{20} + 1{,}05\,508\cdot 10^{-7}t^{21}\Big).$$

Таким образом, полагая $\varepsilon = 0{,}1$, на первом шаге итерационной процедуры (8) находим первое приближение $z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (11). Здесь

$$x_1(t,\varepsilon) = -\left[\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*)\big)}{\partial x} - 1\right]^{-1}\Phi\big(z_0(t,c_r^*)\big) \approx$$

$$\approx -5{,}31\,111\cdot 10^{-12} + 0{,}018\,594t - 0{,}0712\,929t^2 + 0{,}105\,586t^3 - 0{,}108\,013t^4 +$$

$$+0{,}0854\,975t^5 - 0{,}0459\,865t^6 + 0{,}0152\,232t^7 + 0{,}00522\,619t^8 - 0{,}0103\,855t^9 +$$

$$+0{,}00729\,421t^{10} + 0{,}000907\,002t^{11} - 0{,}0098\,0691t^{12} + 0{,}017\,4217t^{13} -$$

$$- 0{,}0216\,099t^{14} + 0{,}0213\,278t^{15} - 0{,}0169\,551t^{16} + 0{,}0106\,973t^{17} -$$

$$- 0{,}00516\,626t^{18} + 0{,}00180\,097t^{19} - 0{,}000\,404\,909t^{20} + 0{,}0000\,446962t^{21}.$$

Найденное первое приближение позволяет проверить отличие от нуля величины

$$\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon)\big)}{\partial x} - 1;$$

в частности,

$$-1{,}0589 \le \frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*) + x_1(t;0{,}1)\big)}{\partial x} - 1 \le -0{,}94\,109.$$

Для нахождения второго приближения воспользуемся неограниченной дифференцируемостью нелинейности $Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ уравнения (11) по неизвестной $z(t,\varepsilon)$ в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ и независимостью этой нелинейности от малого параметра ε и разложим эту нелинейность

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)) = Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \frac{1}{2!}A_5(t)x^2(t,\varepsilon) +$$

$$+\frac{1}{3!}A_7(t)x^3(t,\varepsilon) + \frac{1}{4!}A_9(t)x^4(t,\varepsilon) + r(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon).$$

Здесь

$$A_5(t) = \frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z^2}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = e^{t-t^2-\frac{1}{6}},$$

$$A_7(t) = \frac{\partial^3 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z^3}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = -e^{2t-2t^2-\frac{1}{3}},$$

$$A_9(t)=\frac{\partial^4 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z^4}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}=2e^{3t-3t^2-\frac{1}{2}},$$

при этом

$$R_1(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\approx\frac{1}{2!}A_5(t)x^2(t,\varepsilon)+\frac{1}{3!}A_7(t)x^3(t,\varepsilon)+\frac{1}{4!}A_9(t)x^4(t,\varepsilon).$$

Используя нулевое приближение $z_0(t,c_r^*)$, проверяем выполнение условия (9). Для этого оценим величину

$$\frac{\partial^2\Phi\big(z_0(t,c_r^*)\big)}{\partial x^2}=\varepsilon G\Big[A_5(s);0\Big](t)+$$
$$+X_r(t)B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\Big\{\varepsilon A_1(s)G\big[A_5(\tau);0\big](s)+A_5(s)\Big\}(\cdot).$$

В частности, для $\varepsilon=0,1$ имеем

$$-1{,}25\,383\le\frac{\partial^2\Phi\big(z_0(t,c_r^*)\big)}{\partial x^2}\le-0{,}926\,804.$$

Используя первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ и разложение

$$\frac{\partial^2 Z(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial x^2}\approx A_5(t)+A_7(t)x_1(t,\varepsilon)+\frac{1}{2!}A_9(t)x_1^2(t,\varepsilon),$$

оцениваем величину

$$\frac{\partial^2\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)\big)}{\partial x^2}=\varepsilon G\left[\frac{\partial^2 Z\big(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon)\big)}{\partial x^2};0\right](t)+$$
$$+X_r(t)B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\left\{\varepsilon A_1(s)G\left[\frac{\partial^2 R_1\big(z_0(\tau,c_r^*)+x_1(\tau,\varepsilon)\big)}{\partial x^2};0\right](s)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 R_1\big(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon)\big)}{\partial x^2}\right\}(\cdot).$$

Здесь

$$\frac{\partial^2 R_1(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial x^2}\equiv\frac{\partial^2 Z(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial x^2}.$$

В частности, для $\varepsilon=0,1$ получаем оценку

$$-1{,}25\,383\le\frac{\partial^2\varphi\big(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),\varepsilon\big)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)\big)}{\partial x^2}\le-0{,}926\,804.$$

Вычисление второго приближения $z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (11)

$$x_2(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)-\left[\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)\big)}{\partial x}-1\right]^{-1}\times$$
$$\times\Big[\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)\big)-x_1(t,\varepsilon)\Big],$$

согласно следствию, невозможно в элементарных функциях, поэтому подставим в операторы

$$\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)\big)=\varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon);0\Big](t)+$$

$$+X_r(t)B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\Big\{\varepsilon A_1(s)G\big[A_1(\tau)x_1(\tau,\varepsilon)+R_1(z_0+x_1,\tau,\varepsilon);0\big](s)+$$

$$+R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}(\cdot)$$

и

$$\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)\big)}{\partial x}=\varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x};0\right](t)+$$

$$+X_r(t)B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\left\{\varepsilon A_1(s)G\left[A_1(\tau)+\frac{\partial R_1(z_0+x_1,\tau,\varepsilon)}{\partial x};0\right](s)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x}\right\}(\cdot)$$

приближенные равенства

$$Z(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\approx Z(z_0(t,c_r^*),t,0)+A_1(t)x_1(t,\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{2!}A_5(t)x_1^2(t,\varepsilon)+\frac{1}{3!}A_7(t)x_1^3(t,\varepsilon)+\frac{1}{4!}A_9(t)x_1^4(t,\varepsilon)$$

и

$$\frac{\partial R_1(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial x}\approx A_5(t)x_1(t,\varepsilon)+\frac{1}{2!}A_7(t)x_1^2(t,\varepsilon)+\frac{1}{3!}A_9(t)x_1^3(t,\varepsilon),$$

а также тождество

$$\frac{\partial Z(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial x}\equiv A_1(t)+\frac{\partial R_1(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial x}.$$

В первом приближенном равенстве отброшены слагаемые, имеющие порядок малости по малому параметру не ниже пятого, а во втором — не ниже четвертого. Таким образом, на втором шаге итерационной процедуры (8), согласно следствию, находим второе приближение

$$z_2(t;\varepsilon)=z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon)$$

к периодическому решению уравнения (11). Здесь

$$x_2(t;0{,}1)\approx-0{,}0000\,294344+0{,}019\,653t-0{,}0771\,809t^2+$$

$$+0{,}122\,051t^3-0{,}13\,815t^4+0{,}12\,724t^5-0{,}0913\,763t^6+$$

$$+0{,}0542\,647t^7-0{,}0198\,152t^8-0{,}00292\,169t^9+0{,}0173\,311t^{10}-$$

$$-0{,}0258\,518t^{11}+0{,}0329\,137t^{12}-0{,}0393\,473t^{13}+0{,}0431\,496t^{14}-$$

$$-0{,}041\,112t^{15}+0{,}0325\,485t^{16}-0{,}020\,602t^{17}+0{,}00998\,658t^{18}-$$

$$-0{,}00348\,343t^{19}+0{,}000\,780\,806t^{20}-0{,}0000\,852\,132t^{21}.$$

Второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ получено разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0{,}5$ с точностью до $(t-0{,}5)^{21}$ и приведением подобных слагаемых. Точность полученных приближений демонстрирует последовательное уменьшение от итерации к итерации норм невязок в решении дифференциальной системы (11). Действительно, при $\varepsilon = 0{,}1$ имеем

$$\left\| A(t)z_0(t,c_r^*) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0) - \frac{dz_0(t,c_r^*)}{dt} \right\|_{C[0;1]} \approx 0{,}0196\,893,$$

$$\left\| A(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - \frac{dx_1(t,\varepsilon)}{dt} \right\|_{C[0;1]} \approx 1{,}23\,248 \cdot 10^{-3},$$

$$\left\| A(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - \frac{dx_2(t,\varepsilon)}{dt} \right\|_{C[0;1]} \approx 6{,}23\,776 \cdot 10^{-5}.$$

В отличие от двухшаговой схемы [1] построение приближенных решений периодической задачи для уравнения (11) с помощью итерационного процесса (8) приводит к непериодическим приближениям; действительно, при $\varepsilon = 0{,}1$ имеем

$$\|x_1(0,\varepsilon) - x_1(1,\varepsilon)\| \approx 5{,}45\,363 \cdot 10^{-12},$$

$$\|x_2(0,\varepsilon) - x_2(1,\varepsilon)\| \approx 7{,}27\,338 \cdot 10^{-6}.$$

Оценить точность первых трех приближений можно с использованием невязок в решении краевой задачи (1), (2)

$$\Delta_i(\varepsilon) = \left\{ \left\| A(t)x_i(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_i(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - \frac{dx_i(t,\varepsilon)}{dt} \right\|^2_{C[0;1]} + \right.$$

$$\left. + \left\| \ell_1 x_i(\cdot) - J(z_0(\cdot,c_r^*) + x_i(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \right\|^2_{R^m} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Полагая $\varepsilon = 0{,}1$, находим невязки в решении периодической задачи (11):

$$\Delta_1(\varepsilon) \approx 0{,}0196\,893, \qquad \Delta_2(\varepsilon) \approx 1{,}23\,248 \cdot 10^{-3}, \qquad \Delta_3(\varepsilon) \approx 6{,}28\,002 \cdot 10^{-5}.$$

Проверим выполнение условия сходимости итерационной процедуры (8). Для этого, согласно теореме Канторовича [10, с. 680, 682], проверим выполнение условия (9) в достаточно малой окрестности порождающего решения. При $\varepsilon = 0{,}1$ имеем

$$\gamma_1(\varepsilon) \geq \frac{1}{1{,}0589}.$$

Далее

$$\left\|\varphi(z_2,\varepsilon)\right\|_{C[0;1]} \approx \left\|\varphi(z_1,\varepsilon)\right\|_{C[0;1]} \approx \left\|\varphi(z_0,\varepsilon)\right\|_{C[0;1]} =$$

$$= \left\| \varepsilon e^{\frac{1}{6}} e^{t^2-t} \left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \right\|_{C[0;1]} \approx 0{,}00\,161\,145,$$

следовательно, $\gamma_2(\varepsilon) \geq 0{,}00\,161\,145$. Поскольку при $\varepsilon = 0{,}1$

$$\gamma_3(\varepsilon) \approx \max_{[0;1]} \left|\varphi''\big(z_0(t, c_r^*) + x_1(t, \varepsilon)\big)\right| \approx \max_{[0;1]} \left|\varphi''\big(z_0(t, c_r^*) + x_2(t, \varepsilon)\big)\right| \approx 1{,}25\,383,$$

то

$$2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon) \approx 0{,}00\,429\,394 \ll 1.$$

Следовательно, при $\varepsilon = 0{,}1$ условие (9) сходимости итерационной процедуры (8) выполняется.

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
4. *Samoilenko A. M., Ronto N. I.* Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions. – Moscow: Mir, 1979. – 183 p.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
6. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев.: Наук. думка, 1968. – 244 с.
7. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
8. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – Киев: Изд-во ВУАН, 1934. – 108 с.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
11. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
12. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278 – 288.
13. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. – М.: Наука, 1971. – 567 с.
14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
15. *Чуйко С. М.* Ускорение сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 127 – 132.

Получено 03.04.08