УДК 517.925

А. О. Игнатьев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ЭКВИАСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

A system of ordinary differential equations with impulse effects at fixed moments of time is considered. This system admits the zero solution. Sufficient conditions of the equiasymptotic stability of the zero solution are obtained.

Розглянуто систему звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу, яка допускає нульовий розв'язок. Встановлено достатні умови еквіасимптотичної стійкості нульового розв'язку.

1. Введение. При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями во многих случаях длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения имеют „мгновенный" характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Сейчас теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием представляет собой интенсивно развивающееся направление математики, различные аспекты которого изложены в монографиях [1 – 5]. В последние годы опубликовано много прикладных работ, в которых в качестве математических моделей использованы дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Вследствие этого увеличилось количество работ по исследованию различных аспектов теории импульсных систем [6 – 13]. Настоящая статья посвящена изучению устойчивости решений систем с импульсным воздействием. Она является продолжением и развитием работы [8].

2. Основные определения. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = J_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ — время, $i \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), τ_i — константы, $x \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $J_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Уравнения (1), (2) описывают динамику системы, состоящей из двух частей: непрерывной (при $t \neq \tau_i$), описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, и дискретной (в моменты τ_i), когда решения системы скачкообразно изменяются. Обозначим

$$B_H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leq H \right\},$$

$$G_i := \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \tau_{i-1} < t < \tau_i,\ x \in B_H \right\}, \qquad G := \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Сформулируем гипотезы $\Gamma_1 - \Gamma_5$, которым может удовлетворять система (1), (2).

Γ_1. Функция $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon G \to \mathbb{R}^n$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}_+ \times B_H$; $f(t,0) \equiv 0$, и существует константа $L > 0$ такая, что $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$ при $(t,x) \in G$, $(t,y) \in G$, $x \in B_H$, $y \in B_H$.

Γ_2. Функции $J_i\colon B_H \to \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, непрерывны и удовлетворяют условию

Липшица с константой L в B_H, $J_i(0) = 0$ при $i \in \mathbb{N}$.

Γ_3. Существует константа $h \in (0, H)$ такая, что если $x \in B_h$, то $x + J_i(x) \in B_H$ при $i \in \mathbb{N}$.

Γ_4. Константы τ_i удовлетворяют условиям

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots, \qquad \lim_{i \to \infty} \tau_i = \infty.$$

Γ_5. Константы τ_i удовлетворяют условию: для любых $T > 0$, $t > 0$ отрезок $[t, t+T]$ содержит не более p констант τ_i, причем число p зависит только от T и не зависит от t.

Обозначим через $x(t, t_0, x_0)$ при $t > t_0$ решение системы (1), (2), удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ в случае, когда $t_0 \neq \tau_i$, $i \in \mathbb{N}$. Если же $t_0 = \tau_i$ при каком-либо натуральном i, то под выражением $x(t, t_0, x_0)$ будем понимать $x(t, t_0 + 0, x_0 + J_i(x_0))$ (при $t > t_0$). Значение этого решения в момент t также обозначим через $x(t, t_0, x_0)$. Это решение будем предполагать непрерывно дифференцируемым по t на любом из множеств G_i и непрерывным слева в точках разрыва: $x(\tau_i, t_0, x_0) = x(\tau_i - 0, t_0, x_0)$.

При выполнении гипотез $\Gamma_1 - \Gamma_3$ система (1), (2) допускает тривиальное решение

$$x \equiv 0. \tag{3}$$

Сформулируем понятия устойчивости и притяжения тривиального (нулевого) решения системы (1), (2).

Определение 1. *Тривиальное решение системы* (1), (2) *называется устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *можно указать* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что если* $\|x_0\| \le \delta$, *то* $\|x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon$ *при* $t > t_0$.

Определение 2. *Решение* (3) *системы* (1), (2) *называется*:

притягивающим, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *существует* $\lambda = \lambda(t_0) > 0$ *и для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $x_0 \in B_\lambda$ *существует* $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ *такое, что* $\|x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon$ *для всех* $t \ge t_0 + \sigma$;

эквипритягивающим, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *найдется* $\lambda = \lambda(t_0) > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что для любых* $x_0 \in B_\lambda$, $t \ge t_0 + \sigma$ *выполняется неравенство* $\|x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon$;

равномерно притягивающим, если имеется такое $\lambda > 0$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых* $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\lambda$, $t \ge t_0 + \sigma$ *справедливо* $x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon$.

Иными словами, решение (3) системы (1), (2) называется:

притягивающим, если для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\lambda$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0; \tag{4}$$

эквипритягивающим, если соотношение (4) выполняется равномерно по $x_0 \in B_\lambda$;

равномерно притягивающим, если предельное соотношение (4) выполняется равномерно по $x_0 \in B_\lambda$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Определение 3. *Тривиальное решение системы* (1), (2) *называется*:

асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее;

эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчиво и эквипритягива-

ющее;

равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.

Определение 4. *Будем говорить, что функция* $\omega: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}$ $(\omega \in \mathcal{K})$, *если она непрерывна, строго возрастает и* $\omega(0) = 0$.

Введем следующие определения.

Определение 5. *Будем говорить, что функция* $V: \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $\mathcal{V}_0$ $(V \in \mathcal{V}_0)$, *если* V *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}_+ \times B_H$.

Будем говорить, что функция $V \in \mathcal{V}_0$ *принадлежит классу* $\mathcal{V}_1$ $(V \in \mathcal{V}_1)$, *если* V *является непрерывно дифференцируемой на* $\mathbb{R}_+ \times B_H$ *и ее производная вычисляется по формуле*

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x).$$

Аналогично работе [8] введем следующее определение.

Определение 6. *Функция* $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, *называется финально ненулевой, если для любого* $M > 0$ *существует* $t > M$ *такое, что* $g(t) \neq 0$.

Числовая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *называется финально ненулевой, если для любого натурального числа* M *существует* $k > M$ *такое, что* $u_k \neq$ $\neq 0$.

3. Основные результаты. Рассмотрим систему с импульсным воздействием (1), (2) в предположении, что выполняются гипотезы $\Gamma_1 - \Gamma_5$ и существуют $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $q \in \mathbb{N}$ такие, что

$$f(t + \omega_1, x) \equiv f(t, x), \qquad \tau_{k+q} = \omega_2 + \tau_k,$$
$$J_{k+q}(x) \equiv J_k(x) \quad \forall x \in B_H \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Если ω_1/ω_2 — рациональное число, то система (1), (2) является периодической. Изучению устойчивости решения (3) системы (1), (2) в случае ее периодичности посвящена статья [8]. В ней показано, что асимптотически устойчивые решения периодических систем являются равномерно асимптотически устойчивыми, и получены достаточные условия их асимптотической устойчивости. В дальнейшем будем рассматривать систему (1), (2) в предположениях (5) и иррациональности числа ω_1/ω_2. В частном случае $J_i(x) \equiv 0$, $i \in \mathbb{N}$, система (1), (2) является периодической с периодом ω_1, а в случае $f(t, x) \equiv 0$ — периодической с периодом ω_2. В общем случае $f(t, x) \not\equiv 0$, $J_i(x) \not\equiv 0$ систему (1), (2) будем называть двоякопериодической.

Перейдем к исследованию устойчивости нулевого решения двоякопериодической системы (1), (2). Вначале приведем известный результат Кронекера [14, с. 9].

Лемма 1. *Пусть* ω_1 *и* ω_2 *— произвольные действительные числа. Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *можно указать* $L = L(\varepsilon) > 0$ *такое, что в каждом интервале длины* L *найдется, по крайней мере, одно число* T, *удовлетворяющее системе неравенств*

$$|T - s\omega_1| < \varepsilon, \qquad |T - m\omega_2| < \varepsilon,$$

где s *и* m *— некоторые целые числа.*

Рассмотрим монотонно стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$. В соответствии с леммой 1 для каждого ε_i существует последовательность чисел $\{T_{i,k}\}$ такая, что $T_{i,k} < T_{i,k+1}$, $T_{i,k} \to \infty$ при $k \to \to \infty$ и выполняются неравенства $\left| T_{i,k} - s_{i,k}\omega_1 \right| < \varepsilon_i$, $\left| T_{i,k} - m_{i,k}\omega_1 \right| < \varepsilon_i$, где $s_{i,k}$, $m_{i,k}$ — целые числа. Не нарушая общности, будем считать $T_{i,k} < T_{i+1,k}$, $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $T_{i,i} = T_i$, $s_{i,i} = s_i$, $m_{i,i} = m_i$ и рассмотрим „диагональную” последовательность $\{T_i\}$. Для нее получаем

$$|T_i - s_i\omega_1| < \varepsilon_i, \qquad |T_i - m_i\omega_2| < \varepsilon_i. \tag{6}$$

В соответствии с (6) имеем

$$T_i = s_i\omega_1 + \delta_{i1} = m_i\omega_2 + \delta_{i2}, \quad \text{где} \quad \left|\delta_{i1}\right| < \varepsilon_i, \ \left|\delta_{i2}\right| < \varepsilon_i. \tag{7}$$

Обозначим $x_k = x(t_0 + m_k\omega_2, t_0, x_0)$. Пусть $t^* > t_0$ — фиксированный момент времени. Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \left\| x(t^*, t_0, x_k) - x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0) \right\| = 0. \tag{8}$$

Траектории I и II системы (1), (2), начинающиеся в моменты времени t_0 и $t_0 + + m_k\omega_2$ в точке x_k, за время $\Delta t = t^* - t_0$ переходят соответственно в точки $x(t^*, t_0, x_k)$ и $x(t^* + m_k\omega_2, t_0 + m_k\omega_2, x_k) = x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0)$. Траекторию II системы (1), (2), проходящую через точку x_k при $t = t_0 + m_k\omega_2$, можно трактовать как траекторию системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t + m_k\omega_2, x), \quad t \neq \tau_i, \tag{9}$$

$$\Delta x = J_{i+m_k q}(x), \quad t = \tau_i, \tag{10}$$

с той же начальной точкой x_k и начальным моментом времени t_0. Учитывая, что $J_{i+m_k q}(x) \equiv J_i(x)$, $x \in B_H$, в силу (7) и ω_1-периодичности по t функции f,

$$f(t + m_k\omega_2, x) \equiv f(t + s_k\omega_1 + \delta_{k1} - \delta_{k2}, x) \equiv$$
$$\equiv f(t + \delta_{k1} - \delta_{k2}, x), \quad x \in B_H, \quad t \in \mathbb{R},$$

получаем, что дискретная система (10) совпадает с системой (2), а правые части непрерывных систем (9) и (1) имеют свойство

$$\lim_{k\to\infty} \| f(t + \delta_{k1} - \delta_{k2}, x) - f(t, x) \| = 0$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}$, $x \in B_H$ в силу равномерной непрерывности функции $f(t, x)$. Поскольку количество точек импульсных воздействий τ_i на отрезке $\left[t_0, t^*\right]$ конечно и решение системы с импульсным воздействием непрерывно зависит от правых частей (см., например, [1], теорема 2.5), отсюда следует справедливость предельного соотношения (8).

Теорема 1. *Пусть для двоякопериодической системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1), (2) *существует функция* $V(t, x) = = V_1(t, x) + V_2(t, x)$, $V_1 \in \mathcal{V}_1$, $V_2 \in \mathcal{V}_1$, *такая, что*

$$V_1(t + \omega_1, x) \equiv V_1(t, x), \qquad V_2(t + \omega_2, x) \equiv V_2(t, x), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in B_H, \tag{11}$$

$$V(t, x) \geq a(\|x\|), \quad a \in \mathcal{K}, \qquad V(t, 0) \equiv 0, \tag{12}$$

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \quad \text{при} \quad (t, x) \in G, \tag{13}$$

$$V(\tau_i + 0, x + J_i(x)) - V(\tau_i, x) \le 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad x \in B_H. \tag{14}$$

Если вдоль любого финально ненулевого решения системы (1), (2) *выполняется хотя бы одно из условий*:

$\dfrac{dV}{dt}$ — *финально ненулевая функция*,

$\{V(\tau_i + 0, x + J_i(x)) - V(\tau_i, x)\}$ — *финально ненулевая последовательность, то решение* (3) *системы* (1), (2) *эквиасимптотически устойчиво*.

Доказательство. Устойчивость нулевого решения системы (1), (2) следует из известной теоремы Гургулы – Перестюка [15]. Это значит, что для произвольных $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для любого $x_0 \in B_\delta$ выполняется неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon$. Покажем, что для любого $x_0 \in B_\delta$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = 0.$$

Предположим противное: пусть существуют $x_0 \in B_\delta$ и $\eta > 0$ такие, что $V(t, x(t, t_0, x_0)) > \eta > 0$ при $t \ge t_0$. Функция $V(t, x(t, t_0, x_0))$ в силу условий (12) – (14) неотрицательна и является монотонно невозрастающей функцией времени, поэтому существует предел

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = V_0 \ge \eta > 0.$$

Рассмотрим монотонно стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ и соответствующие последовательности натуральных чисел $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющие соотношениям (6) и (7). Обозначим $x_k = x(t_0 + m_k\omega_2, t_0, x_0)$. Поскольку решение (3) системы (1), (2) устойчиво, последовательность $\{x_k\}$ ограничена и имеет предельную точку x^*. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{x_k\}$ сходится к x^*. В силу равномерной непрерывности функций V_1, V_2 и свойства (11) имеем

$$V_2(t_0, x_k) = V_2(t_0 + m_k\omega_2, x_k),$$

$$V_1(t_0, x_k) = V_1(t_0 + s_i\omega_1, x_k) = V_1(t_0 + m_i + \delta_{i2} - \delta_{i1}, x_k),$$

$$\lim_{i\to\infty} V_1(t_0 + m_i\omega_2 + \delta_{i2} - \delta_{i1}, x_k) = V_1(t_0, x_k),$$

$$V(t_0, x^*) = \lim_{k\to\infty} V(t_0, x_k) = \lim_{k\to\infty} [V_1(t_0, x_k) + V_2(t_0, x_k)] =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty} V_1(t_0 + m_i\omega_2 + \delta_{i2} - \delta_{i1}, x_k) + \lim_{k\to\infty} V_2(t_0 + m_k\omega_2, x_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[V_1(t_0 + m_k\omega_2 + \delta_{k2} - \delta_{k1}, x_k) + V_2(t_0 + m_k\omega_2, x_k)\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} [V_1(t_0 + m_k\omega_2, x_k) + V_2(t_0 + m_k\omega_2, x_k)] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} V(t_0 + m_k\omega_2, x_k) = \lim_{k\to\infty} V(t_0 + m_k\omega_2, x(t_0 + m_k\omega_2, t_0, x_0)) = V_0.$$

Рассмотрим теперь траекторию $x(t, t_0, x^*)$ при $t_0 < t < \infty$. Предположим, что эта траектория является финально ненулевой. В этом случае на ней существуют точки, где либо $\dot{V}\big(t,\, x(t, t_0, x^*)\big) < 0$, либо $V\big(\tau_i + 0,\; x + J_i(x)\big) - V(\tau_i, x) < 0$, т. е. можно указать момент времени $t^* > t_0$, в который выполняется условие

$$V\big(t^*, x(t^*, t_0, x^*)\big) \;=\; V_1^* \;<\; V_0. \tag{15}$$

Поскольку последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке x^*, вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных [1, с. 21] можно записать $x(t^*, t_0, x^*) = \lim\limits_{k\to\infty} x(t^*, t_0, x_k)$, откуда

$$\lim_{k\to\infty} V\big(t^*, x(t^*, t_0, x_k)\big) \;=\; V_1^*. \tag{16}$$

Учитывая, что при выполнении условий теоремы справедливо предельное соотношение (8), получаем неравенство

$$\big\| x(t^*, t_0, x_k) - x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0) \big\| \;\le\; \gamma_k,$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0$. В силу того, что $V = V_1 + V_2$ и функция V_2 периодична по t с периодом ω_2, имеем

$$\big| V(t^*, x) - V(t^* + m_k\omega_2, x) \big| \;=$$

$$= \;\big| V_1(t^*, x) - V_1(t^* + m_k\omega_2, x) \big| \;<\; M(\varepsilon_k) \quad \forall\, x \in B_H, \tag{17}$$

где $M(\varepsilon_k) \to 0$ при $k \to \infty$, а из условия (16) следует соотношение

$$\Big| V\big(t^*, x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0)\big) - V_1^* \Big| \;<\; \eta_k, \tag{18}$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = 0$. Из (17) получаем неравенство

$$\Big| V\big(t^*, x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0)\big) - V\big(t^* + m_k\omega_2, x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0)\big) \Big| \;<\; M(\varepsilon_k), \tag{19}$$

а из неравенств (18), (19) следует, что

$$\Big| V\big(t^* + m_k\omega_2, x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0)\big) - V_1^* \Big| \;<\; \eta_k \;+\; M(\varepsilon_k), \tag{20}$$

где $\eta_k + M(\varepsilon_k) \to 0$ при $k \to \infty$. В то же время

$$\lim_{k\to\infty} V\big(t^* + m_k\omega_2, x(t^* + m_k\omega_2, t_0, x_0)\big) \;=\; V_0. \tag{21}$$

Соотношения же (20) и (21) противоречат неравенству $V_1^* < V_0$, т. е. предполагая, что траектория $x(t, t_0, x^*)$ финально ненулевая, получаем противоречие. В случае, когда $x(t, t_0, x^*)$ не является финально ненулевой, существует $T_* > 0$ такое, что $x(t, t_0, x^*) \equiv 0$ при $t \ge T_*$, откуда в силу свойств функции V имеем $V\big(t,\; x(t, t_0, x^*)\big) = 0$ при $t \ge T_*$. Это означает, что в этом случае также существует такое $t^* > t_0$, что выполняется условие (15), и мы снова приходим к противоречию. Полученное противоречие показывает, что любое решение с $|\,x_0\,| \le \delta$ имеет свойство

$$\lim_{k\to\infty} V\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) \;=\; 0. \tag{22}$$

Покажем, что предельное соотношение (22) выполняется равномерно по $x_0 \in B_\delta$. Из (22) следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $x_0 \in B_\delta$ можно указать $\sigma(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$, при котором $V\big(t_0 + \sigma,\ x(t_0 + \sigma, t_0, x_0)\big) \le a(\varepsilon)/2$. В силу непрерывности функции $V(t, x)$ от x и непрерывной зависимости решений от начальных условий, в некоторой окрестности $Q(x_0)$ точки x_0 выполняется неравенство

$$V\big(t_0 + \sigma, x(t_0 + \sigma, t_0, x_0')\big) \le a(\varepsilon) \quad \text{при} \quad x_0' \in Q(x_0). \tag{23}$$

Вследствие монотонного возрастания функции $V(t, x)$ вдоль решений из (23) следует, что $V\big(t,\ x(t, t_0, x_0')\big) \le a(\varepsilon)$ при $t \ge t_0 + \sigma(\varepsilon, t_0, x_0)$, $x_0' \in Q(x)$. Компактная область B_δ оказывается покрытой системой окрестностей $\{Q(x_0)\}$, из которой по лемме Гейне – Бореля [16, с. 49] можно выделить конечное подпокрытие $Q_1, \ldots, Q_j$ с соответствующими числами $\sigma_1, \ldots, \sigma_j$. Положим $\sigma(\varepsilon, t_0) = \max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_j\}$. Тогда

$$V\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) \le a(\varepsilon) \quad \text{для любых} \quad x_0 \in B_\delta, \quad t \ge t_0 + \sigma(\varepsilon, t_0). \tag{24}$$

Из оценок (12) и (24) получаем $\|x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon$ при $x_0 \in B_\delta$, $t \ge t_0 + \sigma(\varepsilon, t_0)$, а это доказывает, что нулевое решение системы (1), (2) эквиасимптотически устойчиво.

Теорема 2. *Пусть для двоякопериодической системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1), (2) *существует функция* $V(t, x) = V_1(t, x) + V_2(t, x)$, $V_1 \in \mathcal{V}_1$, $V_2 \in \mathcal{V}_1$, *удовлетворяющая условиям* (11),

$$|V(t, x)| \le b(\|x\|), \quad b \in \mathcal{K}, \tag{25}$$

$$\frac{dV}{dt} \ge 0 \quad (t, x) \in G, \tag{26}$$

$$V(\tau_i + 0, x + J_i(x)) - V(\tau_i, x) \ge 0, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Пусть, кроме того, вдоль любого финально ненулевого решения системы уравнений (1), (2) *выполняется хотя бы одно из условий*:

dV/dt — *финально ненулевая функция*;

$\{V(\tau_i + 0,\ x + J_i(x)) - V(\tau_i, x)\}$ — *финально ненулевая последовательность. Тогда если в любой сколь угодно малой окрестности начала координат при любом* $t > 0$ *найдется точка* x *такая, что* $V(t, x) > 0$, *то решение* (3) *системы* (1), (2) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon < H$ — некоторое положительное число. Выберем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и сколь угодно малое $\delta > 0$. Покажем, что существуют $x_0 \in B_\delta$ и $t > t_0$ такие, что $\|x(t, t_0, x_0)\| > \varepsilon$. Для этого выберем $x_0 \in B_\delta$ так, что $V(t_0, x_0) = V_0 > 0$. Предположим противное:

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon \tag{28}$$

при всех $t > t_0$. Из условия (25) получаем

$$|V(t, x)| < V_0 \quad \text{при} \quad \|x\| < b^{-1}(V_0) = \eta, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где b^{-1} — функция, обратная к функции b. Учитывая предположения (26) – (28), заключаем, что полутраектория $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ удовлетворяет условиям

$$\eta \le \|x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon.$$

Рассмотрим монотонно стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, соответствующие последовательности натуральных чисел $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющие соотношениям (6), (7), а также последовательность точек $\{x_j\}$, где $x_j = x(t_0 + m_j\omega_2,\ t_0,\ x_0)$, $j = 1, 2, \ldots$. Учитывая, что эта последовательность расположена в компактном множестве, из нее можно выделить сходящуюся к точке x_* подпоследовательность, причем x_* удовлетворяет условию $\eta \le \|x_*\| \le \varepsilon$. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{x_j\}$ сходится к точке x_*.

Функция $v(t) = V(t,\ x(t, t_0, x_0))$ является монотонно неубывающей и ограниченной сверху числом $b(\varepsilon)$, следовательно, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = v_0 = V(t_0, x_*)$$

(см. доказательство теоремы 1), причем

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \le v_0. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь полутраекторию $x(t,\ t_0, x_*)$ при $t > t_0$. В силу предположений теоремы имеется либо момент времени t_1 такой, что $dV(t_1,$ $x(t_1, t_0, x_*))/dt > 0$, либо момент импульсного воздействия τ_k такой, что $V(\tau_k +$ $+ 0,\ x(\tau_k, t_0, x_*) + J_k(x\,(\tau_k, t_0, x_*)) - V(\tau_k,\ x(\tau_k, t_0, x_*)) > 0$. Это означает, что существует момент времени $t_* > t_0$ такой, что $V(t_*,\ x(t_*, t_0, x_*)) = v_1 > v_0$. Поскольку последовательность $\{x_j\}$ сходится к точке x_*, вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных получаем неравенство

$$\left\| x(t_*, t_0, x_*) - x(t_*, t_0, x_j) \right\| < \gamma$$

при всех $j > N(\gamma)$, каково бы ни было наперед заданное число $\gamma > 0$. Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} V\big(t_*, x(t_*, t_0, x_j)\big) = v_1. \tag{30}$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что

$$\lim_{j\to\infty} V\big(t_* + m_j\omega_2, x(t_* + m_j\omega_2, t_0, x_0)\big) = v_0 \tag{31}$$

и

$$\left| V\big(t_* + m_j\omega_2, x(t_* + m_j\omega_2, t_0, x_0)\big) - v_1 \right| < \eta_j + M(\varepsilon_j), \tag{32}$$

где $\eta_j + M(\varepsilon_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Соотношения же (30) – (32) приводят к противоречию, так как $v_1 > v_0$. Полученное противоречие доказывает, что предположение (28) неверно, т. е. решение (3) системы (1), (2) является неустойчивым.

4. Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y\cos\alpha t + xy^2\sin\alpha t - x^3 + 2x^2y \\ \frac{dy}{dt} &= x\cos\alpha t - x^2y\sin\alpha t - x^2y \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad t \ne \pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\Delta x = -2x, \qquad \Delta y = -y \quad \text{при} \quad t = \pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

где α — иррациональное число. Выберем в качестве функции Ляпунова $V = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} = -x^4 + 2x^3 y - x^2 y^2 = -x^2 (x-y)^2 \le 0,$$

$$\Delta V\big|_{t=\pi k} = \frac{1}{2}\left[(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - x^2 - y^2\right] = -\frac{1}{2} y^2 \le 0.$$

В случае, когда при сколь угодно больших t вдоль траектории системы выполняются неравенства $x(t) \ne 0$, $x(t) \ne y(t)$, функция $\frac{dV}{dt}$ вдоль этой траектории является финально ненулевой. В случаях $x(t) = 0$ или $x(t) = y(t)$ получаем, что ΔV является финально ненулевым вдоль любой финально ненулевой траектории. Следовательно, в силу теоремы 1 ненулевое решение рассматриваемой системы является эквиасимптотически устойчивым.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. – New York etc.: Halsted Press, 1989. – 256 p.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapure etc.: World Sci., 1989.
4. *Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G.* Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. – 520 p.
5. *Li Z., Soh Y., Wen C.* Switched and impulsive systems: analysis, design, and applications. – Berlin etc.: Springer, 2005. – 274 p.
6. *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* До питання про стійкість інтегральних множин систем імпульсних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 2. – С. 249 – 257.
7. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости для импульсных систем // Там же. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1035 – 1043.
8. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием // Мат. заметки. – 2004. – **76**, вып. 1. – С. 44 – 51.
9. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. – 2003. – **194**, № 10. – С. 117 – 132.
10. *Borysenko S. D., Iovane G., Giordano P.* Investigations of the properties motion for essential nonlinear systems perturbed by impulses on some hypersurfaces // Nonlinear Anal. – 2005. – **62**. – P. 345 – 363.
11. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1516 – 1521.
12. *Ignatyev A. O., Ignatyev O. A., Soliman A. A.* Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action // Math. Notes. – 2006. – **80**, № 4. – P. 491 – 499.
13. *Kenzhebaev K. K., Stanzhitskii A. N.* Invariant sets of impulsive systems and their stability // Nonlinear Oscillations. – 2004. – **7**, № 1. – P. 78 – 82.
14. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 396 с.
15. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. физика. – 1982. – Вып. 31. – С. 9 – 14.
16. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966. – 320 с.

Получено 06.03.07,
после доработки — 11.06.07