УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О НОРМАЛЬНОСТИ СЕМЕЙСТВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЕТВЛЕНИЕМ

We study the space mappings with branching that satisfy to modulus inequalities. For classes of such mappings, we obtain some sufficient conditions of the normality of families.

Вивчаються просторові відображення з розгалуженням, що задовольняють модульні нерівності. Щодо класів таких відображень отримано низку достатніх умов нормальності сімей.

1. Введение. Данная работа является продолжением статьи [1], в которой получены аналогичные теоремы для гомеоморфизмов. Техника исследования отображений с ветвлением во многом отличается от использованной в [1].

Приведем основные определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Везде далее запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно. Будем также предполагать, что отображение f сохраняет ориентацию, т. е. топологический индекс $\mu(y, f, G)$ строго положителен для произвольной области $G \subset\subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. В дальнейшем $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$, $B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, ω_{n-1} — площадь единичной гиперсферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $dm(x)$ — n-мерная мера Лебега.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае записываем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int_D \rho^n(x)\, dm(x).$$

В 2001 г. О. Мартио предложил следующее определение (см. [2]). Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x)\rho^n(x)\, dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ кривых γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Здесь и далее $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$.

Определение Q-гомеоморфизма тесно связано с изучением весовых модулей (см. [3]), поскольку в правой части (1) можно перейти к инфимуму по всем допустимым функциям ρ. Отметим, что оценки типа (1) в случае $Q(x) \equiv 1$ характеризуют конформные отображения, а при $Q(x) \le q$ — квазиконформные (см., например, пп. 8.1, 13.1 и 34.3 в [4]). В случае, когда непостоянное отображение f не является гомеоморфизмом, оценки вида (1) при ограниченной функции Q фактически являются частью определения квазирегулярных отображений (отображений с ограниченным искажением). В данной статье будем рассматривать отображения с ветвлением, которые удовлетворяют модульному соотношению (1) с, вообще говоря, неограниченной функцией $Q(x)$.

Отображение $g\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, будем называть *Q-отображением,* если условие (1) при $g = f$ выполнено для любого семейства Γ кривых γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Такое определение немного отличается от традиционного (см. [5]).

Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с метриками d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X \to X'$ называется *нормальным,* если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f_0\colon X \to X'$.

Введенное понятие тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно,* если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X. Заметим, что по одной из версий теоремы Арцела – Асколи, если (X, d) — сепарабельное метрическое пространство, а (X', d') — компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно (см., например, п. 20.4 в [4]). В силу этого вопрос о нормальности семейства отображений часто сводится к установлению оценок искажения расстояния, обеспечивающих равностепенную непрерывность семейств в каждой точке.

Вопрос об оценках искажения и нормальности семейств для квазиконформных отображений и их обобщений исследовался многими авторами, такими как Л. Альфорс, П. Белинский, М. Вуоринен, Ю. Вяйсяля, Ф. Геринг, В. Гутлянский, С. Крушкаль, М. Лаврентьев, О. Лехто, В Миклюков, А. Мори, И. Овчинников, И. Песин, Ю. Решетняк, С. Рикман, В. Рязанов, Г. Суворов, Б. Шабат и др. Необходимо также отметить вклад в развитие теории Q-гомеоморфизмов и их обобщений, а также модульной и емкостной техники А. Гольберга, В. Гутлянского, Н. Зорий, А. Игнатьева, О. Мартио, В. Рязанова, П. Тамразова, У. Сребро, и Э. Якубова (см., например, [2, 3, 5 – 10]). В частности, в указанных работах можно найти оценки искажения при Q-гомеоморфизмах, полученные на основе свойств функций ограниченного и конечного среднего колебания.

2. Предварительные сведения. Напомним несколько определений, необходимых для дальнейшего изложения. Нам понадобятся понятия конденсатора и емкости конденсатора (см., например, § 5 в [11] или раздел 10 гл. 2 в [12]).

Конденсатором называют пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. Конденсатор E называют *кольцевым,* если $A \setminus C$ является кольцом.

Напомним, что *кольцом* в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется двусвязная область $R \subset \mathbb{R}^n$, т. е. такая область, дополнение к которой в $\overline{\mathbb{R}^n}$ состоит из двух связных компонент, например, C_1 и C_2. Кратко это записывают так: $R = R(C_1, C_2)$. Пусть $E = (A, C)$ — конденсатор.

Емкостью конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n \, dm(x), \tag{2}$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u: A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$.

Напомним, что отображение $f: D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* (записываем $f \in ACL$), если в любом n-мерном параллелепипеде P с ребрами, параллельными осям координат, и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат.

***Замечание* 1.** Согласно лемме 5.5 в [11],

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0^{\infty}(E)} \int_A |\nabla u|^n \, dm(x), \tag{3}$$

где $W_0^{\infty}(E) = W_0(E) \bigcap C_0^{\infty}(A)$, а $C_0^{\infty}(A)$ — множество вещественнозначных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в A.

Более того, условие $u(x) \geq 1$ для каждого $x \in C$ может быть заменено условием $u(x) = 1$ для каждого $x \in C$ или даже условием $u(x) = 1$ в некоторой окрестности C (см. замечание 2.2 в [13] или [14, с. 502]).

В дальнейшем в $\overline{\mathbb{R}^n}$ используется *сферическая* (*хордальная*) метрика $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \qquad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\,\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Хордальным диаметром множества $B \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(B) = \sup_{x, y \in B} h(x, y).$$

Кольцом Тейхмюллера называют кольцо $R_T(t) = R([-1, 0], [t, \infty])$, $t > 1$. Сформулируем теперь очень важный результат, принадлежащий Герингу (см. [15] или п. 7.37 в [16]).

Лемма 1. *Пусть $R(B, F)$ — произвольное кольцо, такое, что континуумы B и F невырождены. Тогда*

$$\operatorname{cap}(R(B, F)) \geq \operatorname{cap}\left(R_T\left(\frac{1}{h(B)h(F)}\right)\right). \tag{4}$$

Кольцом Гретша называют кольцо $R_G(t) = R([t, \infty], \overline{\mathbb{B}^n})$, $t > 1$. Пусть функция $\Psi(t)$ определена соотношением $\operatorname{cap} R_G(t) = \omega_{n-1}(\log \Psi(t))^{1-n}$. Известно [16], что функция $\log \Psi(t) - \log t$ возрастает. Полагаем

$$\log\lambda_n = \lim_{t\to\infty}\left(\log\Psi(t) - \log t\right).$$

Известно также, что $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$ (см., например, [15, с. 225, 226], (7.19) и (7.22) в [16]). Согласно лемме 7.22 в [16],

$$\operatorname{cap}(R_T(t)) = \frac{\omega_{n-1}}{\{\log\Phi(t)\}^{n-1}},$$

где функция Φ удовлетворяет условиям

$$t + 1 \le \Phi(t) \le \lambda_n^2(t+1) < 2\lambda_n^2 t, \quad t > 1.$$

Везде ниже будем использовать обозначение λ_n из приведенного выше определения, не оговаривая конкретный смысл, если недоразумение невозможно.

Из соотношения (4) получаем следующую оценку емкости.

Лемма 2. *Для любых непересекающихся невырожденных континуумов* B *и* F *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *имеет место соотношение*

$$\operatorname{cap}(R(B,F)) \ge \frac{\omega_{n-1}}{\left[\log\dfrac{2\lambda_n^2}{h(B)h(F)}\right]^{n-1}}.$$

Аналог следующей леммы в несколько альтернативном варианте доказан в работе [13] (см. лемму 2.9).

Лемма 3. *Предположим, что* $E = (A, C)$ *— конденсатор, такой, что* $A \subset B^n(r)$, *и множество* C *связно. Тогда имеет место соотношение*

$$\operatorname{cap} E \ge \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log\dfrac{2\lambda_n^2}{h(C)h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B^n(r))}\right\}^{n-1}}.$$

Доказательство в силу монотонности емкостей следует из леммы 2.

3. Основная лемма об оценке искажения. Введем еще несколько определений. Следующее понятие можно найти в [12, с. 32] (см. раздел 3 главы II). Пусть $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha\colon [a, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если: 1) $\alpha(a) = x$; 2) $f\circ\alpha = \beta|_{[a,c)}$; 3) если $c < c' \le b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ и $f\circ\alpha = \beta|_{[a,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. следствие 3.3 гл. 2 в [12]).

Нам понадобится следующее утверждение (см. предложение 10.2 гл. 2 в [12]).

Лемма 4. *Пусть* $E = (A, C)$ *— произвольный конденсатор,* Γ_E *— семейство всех кривых вида* $\gamma\colon [a, b) \to A$ *с* $\gamma(a) \in C$ *и* $|\gamma| \cap (A\setminus F) \ne \varnothing$ *для произвольного компакта* $F \subset A$, *где* $|\gamma| = \gamma([a, b))$. *Тогда* $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$.

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (записывают $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. Известно, что если $\Gamma_1 > \Gamma_2$, то $M(\Gamma_1) \le M(\Gamma_2)$ (см., например, теорему 6.4 в [4]).

Аналоги следующей леммы доказаны в работе [1] для гомеоморфизмов.

Лемма 5. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — *открытое дискретное Q-отображение, такое, что* $D' = f(D) \subset B^n(r)$ с $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B^n(r)) \geq \delta > 0$. *Предположим, что для некоторого* $x_0 \in D$ *и* $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *существуют число* p, $p \leq n$, *и семейство неотрицательных на* $(0, \infty)$ *функций* $\{\psi_\varepsilon(t), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\,dm(x) \leq K I^p(\varepsilon), \quad 0 < I(\varepsilon) < \infty, \tag{5}$$

где

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)\,dt,$$

а K — *конечная положительная константа. Тогда*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|)\right\}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, *где*

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \qquad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{1/(n-1)}, \qquad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E = (A, C)$, где $A = B(x_0, \varepsilon_0)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. Поскольку f — открытое и непрерывное отображение, fC есть компактное подмножество открытого множества fA. Следовательно, пара множеств $E' = fE = (fA, fC)$ также является конденсатором. Рассмотрим для конденсаторов E и fE семейства кривых Γ_E и Γ_{fE} соответственно (см. обозначения леммы 4). Пусть Γ^* — семейство максимальных f-поднятий кривых Γ_{fE} с началом в C, лежащих в A. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Предположим противное. Тогда существует кривая $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE}, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha\colon [a, c) \to$ $\to A$ лежит со своим замыканием $\overline{\alpha}$ в некотором компакте внутри A. Следовательно, $\overline{\alpha}$ — компакт в A. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в fA, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE}$. Пусть G — предельное множество $\alpha(t)$ при $t \to c - 0$. Для $x \in G$ в силу непрерывности f имеем $f(\alpha(x_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $x_k \in [a, c)$, $x_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако $f(\alpha(x_k)) = \beta(x_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в A. По условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ [17, с. 8, 9]

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) \neq \varnothing$$

в силу монотонности последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным по I (см. (9.12) в [18]). Таким образом, вследствие дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки и кривая $\alpha\colon [a, c) \to A$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha\colon [a, c] \to A$. Тогда имеем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$, т. е. $\alpha(c) \in f^{-1}(\beta(c))$. С другой стороны, можно построить (см. следствие 3.3 главы 2 в [12]) максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Тогда, объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, что противоречит максимальности поднятия α.

Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{fE} > f\Gamma^*$ и, следовательно, $M(\Gamma_{fE}) \le M(f\Gamma^*)$. Таким образом, согласно лемме 4 и определению Q-отображения

$$\operatorname{cap} fE \le \int_D Q(x)\rho^n(x)\,dm(x) \tag{7}$$

для произвольной функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_E$.

Теперь пусть $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$. По теореме Лузина [19, с. 69] существует борелевская функция $\psi^*_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$ для почти всех t. Следовательно, функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*_\varepsilon(|x - x_0|)\,/\,I(\varepsilon), & x \in A_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon, \end{cases}$$

является борелевской. Кроме того, пусть $\gamma \in \Gamma_E$. Тогда (см., например, теорему 5.7 в [4])

$$\int_\gamma \rho_\varepsilon |dx| \ge \frac{1}{I(\varepsilon)} \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi^*_\varepsilon(t)\,dt = 1. \tag{8}$$

Отсюда заключаем, что $\rho_\varepsilon(x) \in \operatorname{adm}\Gamma_E$. Комбинируя (5), (7) и (8), получаем

$$\operatorname{cap} fE \le K\,I^{p-n}(\varepsilon). \tag{9}$$

Поскольку $fA \subset B^n(r)$, в силу леммы 3, примененной к конденсатору fE,

$$\operatorname{cap} fE \ge \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log \dfrac{2\lambda_n^2}{h(fC)\,h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B^n(r))}\right\}^{n-1}}. \tag{10}$$

Вследствие того, что по условию $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B^n(r)) \ge \delta$, из (9) и (10) имеем

$$h(fC) \le \frac{2\lambda_n^2}{\delta} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{1/(n-1)} (I(\varepsilon))^{(p-n)/(n-1)}\right\}.$$

Обозначая

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \qquad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{1/(n-1)}, \qquad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1},$$

получаем

$$h(fC) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon)\right\}, \tag{11}$$

где $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$. Пусть теперь $x \in D$ такое, что $|x - x_0| = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда $x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ и $f(x) \in f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon)}\right) = fC$ и из (11) имеем оценку

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|)\right\} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{12}$$

В силу произвольности $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, (12) имеет место во всем шаре $B(x_0, \varepsilon_0)$.

4. Оценки искажения расстояния при *Q*-отображениях. Везде ниже $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$ и $\delta(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — *открытое дискретное* Q-*отображение, для которого* $D' = f(D) \subset B^n(r)$ *с* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B^n(r)) \geq \delta > 0$. *Тогда для каждой точки* $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *и для каждого* $\beta \geq 1/(n-1)$

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)}\right\}, \tag{13}$$

где α_n *задается соотношением* (6).

Доказательство. Обозначим $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0)$. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t q_{x_0}^{\beta}(t)}, & t \in (0, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in [\varepsilon_0, \infty). \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta n - 1}(r)} \leq \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)}.$$

Заключение теоремы следует теперь из леммы 5 с $p = 1$.

***Замечание* 2.** Конечно, среднее значение $q_{x_0}(r)$ функции $Q(x)$ на некоторых сферах $|x - x_0| = r$ может быть бесконечно. Однако по теореме Фубини (см., например, [19]) $q_{x_0}(r)$ измерима по параметру r, поскольку $Q(x)$ измерима по x. Более того, $\int_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)} < \infty$ для $x \neq x_0$, так как $q_{x_0}(r) \geq 1$. Интеграл может быть равен 0, если $q_{x_0}(r) = \infty$ почти всюду, но в таком случае неравенство (13) очевидно, ибо $\alpha_n \geq 32$ и $\delta \leq 1$, а $h(f(x), f(x_0))$ меньше либо равно 1.

Выбирая в теореме 1 величину $\beta = 1/(n-1)$, приходим к следующему утверждению.

***Следствие* 1.** *Если*

$$q_{x_0}(r) \leq \left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1} \tag{14}$$

для $r < \varepsilon(x_0) < \delta(x_0)$, *то*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log \dfrac{1}{|x - x_0|}} \tag{15}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$.

***Замечание* 3.** Если вместо соотношения (14) выполнено

$$q_{x_0}(r) \le c\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1},$$

то

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log\frac{1}{|x-x_0|}}\right]^{1/c^{1/(n-1)}}.$$

5. Конечное среднее колебание. Говорят, что функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ с $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, $\varphi\in BMO(D)$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B\subset D}\frac{1}{|B|}\int_B|\varphi(x)-\varphi_B|\,dm(x) < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B\subset D$ и $\varphi_B = |B|^{-1}\times$ $\times\int_B\varphi(x)\,dm(x)$ — среднее значение функции φ на шаре B. С целью упрощения записи обозначаем в дальнейшем

$$\fint_A f(x)\,dm(x) := \frac{1}{|A|}\int_A f(x)\,dm(x),$$

где, как обычно, $|A|$ — лебегова мера множества $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Известно, что $L^\infty(D)\subset BMO(D)\subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [20]).

Следуя работе [8], введем следующие определения. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0\in D$ (записываем $\varphi\in FMO$ в x_0), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\fint_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\,dm(x) < \infty, \tag{16}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)\,dm(x)$. Заметим, что при выполнении условия (16) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi}_\varepsilon\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Также будем говорить, что $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ — функция конечного среднего колебания в области D (записываем $\varphi\in FMO(D)$ или просто $\varphi\in FMO$), если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x\in D$. В частности, если для некоторых чисел $\varphi_\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, выполнено соотношение

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\fint_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon|\,dm(x) < \infty,$$

то функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 [8]. Например, функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, если в точке $x_0\in D$ выполнено

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\,dm(x) < \infty.$$

Следующее утверждение является, пожалуй, ключевым при изучении отображений конечного среднего колебания. Ранее оно широко использовалось в работах А. Игнатьева и В. Рязанова (см. следствие 2.3 в [8]) для решения проблемы гомеоморфного (непрерывного) продолжения гомеоморфизмов на границу.

Лемма 6. *Пусть* D_0 *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *содержащая начало координат и* $\varphi : D_0 \to \mathbb{R}$ *— неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке* 0. *Тогда*

$$\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon \to 0$ *для некоторого* $\varepsilon_0 \leq \operatorname{dist}(0, \partial D_0)$.

Теорема 2. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *— открытое дискретное Q-отображение, такое, что* $D' = f(D) \subset B^n(r)$ *с* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B^n(r)) \geq \delta > 0$. *Если функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$, *то*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta}\left\{\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|x-x_0|}}\right\}^{\beta_0}$$

для $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ *при некотором* $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *где* α_n *зависит только от* n, *а* $\beta_0 > 0$ *— только от* n *и функции* Q.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 < \min\{1, \operatorname{dist}(x_0, \partial D)\}$. Предположим, что функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в области D. Тогда на основании леммы 6 для функции $\psi(t) = \dfrac{1}{t\log\frac{1}{t}}$ будем иметь

$$\int_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) = \int_{\varepsilon<|y|<\varepsilon_0} Q(y+x_0)\psi^n(|y|)\,dm(y) =$$

$$= \int_{\varepsilon<|y|<\varepsilon_0} \frac{Q(y+x_0)}{\left(|y|\log\frac{1}{|y|}\right)^n}\,dm(y) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{17}$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция $Q_1(y) := Q(y+x_0)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0. Заметим также, что

$$I(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt = \log\left(c\log\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{18}$$

где $c = \dfrac{1}{\log\dfrac{1}{\varepsilon_0}}$. Теперь на основании соотношений (17) и (18) получаем, что для выбранной функции ψ в точности выполнено соотношение (5) с $p = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 5.

6. О нормальных семействах Q-отображений. Обозначим через $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ класс всех открытых дискретных Q-отображений $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, таких, что $D' = f(D) \subset B^n(r)$ с $h(\overline{\mathbb{R}^n \setminus B^n(r)}) \geq \delta > 0$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Если $Q \in FMO$, то класс $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений в $\mathbb{R}^n$.*

***Следствие* 2.** *Семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ нормально в $\mathbb{R}^n$, если для каждого $x_0 \in D$*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty .$$

***Следствие* 3.** *Класс $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений в $\mathbb{R}^n$, если каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега функции $Q(x)$.*

Теорема 4. *Семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ нормально в $\mathbb{R}^n$, если условие расходимости интеграла*

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)} = \infty$$

выполняется при некотором $\beta \geq 1/(n-1)$ и, в частности, при $\beta = 1$ в каждой точке $x_0 \in D$.

Вследствие замечания 3 справедливо следующее утверждение.

***Следствие* 4.** *Класс $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ нормален в $\mathbb{R}^n$, если $Q(x)$ имеет особенности логарифмического типа порядка не выше чем $n-1$ в каждой точке $x \in \in D$.*

7. Об отображениях с конечным искажением длины. Следуя [5], говорим, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является отображением с *конечным метрическим искажением* (записываем $f \in FMD$), если f обладает (N)-свойством Лузина и

$$0 < l(x,f) \leq L(x,f) < \infty \quad \text{почти всюду,}$$

где

$$L(x,f) = \limsup_{y\to x}\sup_{y\in D} \frac{|f(x)-f(y)|}{|y-x|}, \qquad l(x,f) = \liminf_{y\to x}\inf_{y\in D} \frac{|f(x)-f(y)|}{|y-x|}.$$

Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ между пространствами с мерой (X, Σ, μ) и (X', Σ', μ') обладает (N)-*свойством,* если $\mu'(f(S)) = 0$, как только $\mu(S) = 0$. Аналогично, f имеет (N^{-1})-*свойство,* если $\mu(S) = 0$, как только $\mu'(f(S)) = 0$.

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал числовой прямой, $\gamma\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ — локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma\colon \Delta \to \Delta_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая, что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0,t]}$ кривой γ, если $t > t_0$, и $-l(\gamma|_{[t_0,t]})$, если $t < t_0$, $t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\tilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,g}(l_\gamma(t)) = l_{\tilde{\gamma}}(t)$ $\forall\, t \in \Delta$. Будем говорить, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ обладает (L)-*свойством,* если выполнены следующие условия:

(L_1) для почти всех кривых $\gamma \in D$ кривая $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma,f}$ обладает (N)-свойством;

(L_2) для почти всех кривых $\tilde{\gamma} \in f(D)$ каждое *поднятие* γ кривой $\tilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma,f}$ обладает (N^{-1})-свойством.

Здесь кривая $\gamma \in D$ называется *поднятием кривой* $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Следуя [5], говорим, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является *отображением с конечным искажением длины* (записываем $f \in FLD$), если $f \in FMD$ и обладает (L)-свойством.

Заметим, что развитая выше теория применима к семействам отображений $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины, поскольку отображения класса FLD являются Q-отображениями с $Q(x) = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке $x \in D$ (см. теорему 6.10 в [5]).

Предположим, что для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f' в точке x, $J(x, f)$ — якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. Пусть, кроме того,

$$l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Обозначим через $\mathcal{L}_{Q,\Delta}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений конечного искажения длины $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ таких, что $D' = f(D) \subset B^n(r)$ с $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B^n(r)) \geq \Delta > 0$ и $K_I(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду.

Теорема 5. *Пусть* $\Delta > 0$ *и* $Q : D \to [1, \infty]$ — *измеримая функция, такая, что*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} = \infty \quad \forall\, x_0 \in D.$$

Тогда семейство отображений $\mathcal{L}_{Q,\Delta}(D)$ *нормально в* $\mathbb{R}^n$.

***Следствие* 5.** *Семейство отображений* $\mathcal{L}_{Q,\Delta}(D)$ *нормально в* $\mathbb{R}^n$, *если* $q_{x_0}(r) = O\left(\left(\log\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right)$ *для каждого* $x_0 \in D$ *при* $r \to 0$.

***Следствие* 6.** *Семейство отображений* $\mathcal{L}_{Q,\Delta}(D)$ *нормально в* $\mathbb{R}^n$, *если функция* $Q(x)$ *имеет в каждой точке* $x_0 \in D$ *логарифмические особенности порядка не выше чем* $n-1$.

***Следствие* 7.** *Если* $Q \in FMO$, *то семейство отображений* $\mathcal{L}_{Q,\Delta}(D)$ *нормально в* $\mathbb{R}^n$.

***Следствие* 8.** *Семейство отображений* $\mathcal{L}_{Q,\Delta}(D)$ *нормально в* $\mathbb{R}^n$, *если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty \quad \forall\, x_0 \in D.$$

1. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
2. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
3. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1388 – 1398.
4. *Väisälä J.* Lectures on n dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. D. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
6. *Gol'berg A. L.* Quasiconformal mappings and radii of normal systems of neighborhoods // Ukr. Math. J. – 1999. – **51**, № 10. – P. 1566 – 1568.
7. *Зорий Н. В.* Модульные, функциональные и потенциальные характеристики конденсаторов в области; соотношения между ними // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 604 – 613.
8. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Cont. Math. – 2004. – **364**. – P. 193 – 203.
10. *Ryazanov V. I.* Closure of classes quasiconformal mappings with integral constraints // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 4. – P. 399 – 404.
11. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
12. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
13. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465**. – P. 1 – 13.
14. *Gehring F. W.* Symmetrization of rings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – **101**. – P. 499 – 519.
15. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings // Complex Anal. and Appl. – 1976. – **2**.
16. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings // Lect. Notes Math. – 1988. – **1319**.
17. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
18. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1942.
19. *Saks S.* Theory of the integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1937.
20. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415 – 426.

Получено 07.11.06,
после доработки — 05.05.08