УДК 517.942

А. М. Гомилко (Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев),
В. Н. Пивоварчик (Южно-укр. пед. ун-т, Одесса)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ В ВИДЕ ВОСЬМЕРКИ*

The inverse problem for the Sturm – Liouville equation is studied on a graph consisting of two quasi-one-dimensional loops of the same length connected at a vertex. As spectral data, we consider the set of eigenvalues of the entire system together with the sets of eigenvalues of two Dirichlet problems for the Sturm – Liouville equations obtained by imposing the condition of total reflection at the vertex of the graph. We obtain conditions for three sequences of real numbers that enable one to reconstruct the pair of real-valued potentials from L_2 corresponding to each loop. An algorithm for the construction of the entire set of potentials corresponding to this triple of spectra is presented.

Вивчається обернена задача для рівняння Штурма – Ліувілля на графі, що складається з двох квазіодновимірних петель однакової довжини, які мають спільну вершину. В якості спектральних даних розглядається множина власних значень усієї системи разом з множинами власних значень двох задач Діріхле для рівнянь Штурма – Ліувілля, що отримуються, якщо у вершині графа взяти умови повного відбиття. Одержано умови на три послідовності дійсних чисел, що дозволяють відновити пару відповідних кожній петлі дійсних потенціалів із L_2. Наведено алгоритм побудови всієї множини потенціалів, що відповідають даній трійці спектрів.

1. Введение. В последнее время существенно возросло количество публикаций, посвященных прямым спектральным задачам Штурма – Лиувилля на квазиодномерных графах (см., например, [1 – 9]). Обратные спектральные задачи Штурма – Лиувилля на графах рассматриваются в двух постановках. В первой постановке считается, что потенциалы уравнений Штурма – Лиувилля тождественно равны нулю, и требуется определить форму графа (см. [10 – 12] и приведенную там библиографию). Во второй постановке, к которой относится и данная статья, форма графа предполагается заданной и требуется найти потенциалы на ребрах графа [13 – 16]. Для случая петлеобразного некомпактного графа в работе [13] приведен алгоритм нахождения потенциала, а в [14] найдены достаточные (близкие к необходимым) условия на функцию определенного класса для того, чтобы она была S-функцией.

Отметим, что рассматриваемая спектральная краевая задача на графе является частным случаем спектральной векторной краевой задачи. Некоторые варианты векторной обратной задачи рассматривались в работах [17, 18], однако результаты настоящей работы не являются их частным случаем.

Постановка рассматриваемой далее обратной спектральной задачи связана с работой [8], где исследуется движение квантовой частицы на двумерной периодической прямоугольной решетке. Если рассматривать соответствующую задачу на одном периоде по каждой из осей, т. е. на крестообразной области (звездообразный граф), а на концах периодов (т. е. на концах лучей графа) наложить условия сшивания, то получим краевую задачу Штурма – Лиувилля следующего вида:

$$y_j''(x) + (\lambda^2 - q_j(x))\,y_j(x) = 0, \qquad x \in (0, a), \quad j = 1, 2, \tag{1.1}$$

$$y_1(0) = y_1(a) = y_2(0) = y_2(a), \tag{1.2}$$

$$y_1'(0) - y_1'(a) + y_2'(0) - y_2'(a) = 0, \tag{1.3}$$

где $q_j(x)$, $j = 1, 2,$ — вещественные функции, принадлежащие пространству $L_2(0, a)$. Из условий сшивания (1.2), (1.3) первое означает непрерывность плот-

* Выполнена при поддержке Фонда гражданских исследований и развития США (CRDF) и Министерства просвещения и науки Украины (грант UK2-2811-OD-06).

© А. М. ГОМИЛКО, В. Н. ПИВОВАРЧИК, 2008

ности вероятности нахождения квантовой частицы в данной точке, а второе является следствием закона Кирхгофа. Такая краевая задача возникает также при рассмотрении движения квантовой частицы в квазиодномерном волноводе, имеющем форму восьмерки.

В данной работе исследуется обратная спектральная задача (1.1) – (1.3), при этом в качестве спектральных данных рассматривается множество собственных значений всей системы вместе с множествами собственных значений двух задач Дирихле

$$\begin{gathered} y_j''(x) + (\lambda^2 - q_j(x))\, y_j(x) = 0, \quad x \in (0, a), \\ y_j(0) = y_j(a) = 0, \quad j = 1, 2, \end{gathered} \tag{1.4}$$

получаемых, если в вершине графа взять условия полного отражения. В статье получены условия на три последовательности вещественных чисел, по которым восстанавливаются вещественные потенциалы q_1, q_2 из $L_2(0, a)$, так что одна из последовательностей описывает спектр задачи (1.1) – (1.3), а две другие совпадают с последовательностями собственных значений задач (1.4) при $j = 1, 2$. Приведен алгоритм построения всего множества потенциалов, соответствующих данной тройке последовательностей.

Основная идея решения обратной задачи для рассматриваемой системы состоит в ее сведении к двум независимым задачам восстановления потенциалов q_j, $j = 1, 2$, по двум спектрам — к спектру задачи Дирихле (1.4) и спектру краевой задачи Дирихле – Неймана

$$\begin{gathered} y_j''(x) + (\lambda^2 - q_j(x))\, y_j(x) = 0, \quad x \in (0, a), \\ y_j(0) = y_j'(a) = 0, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Поскольку решение такого рода обратной задачи известно [19] (гл. 3, § 4), такое сведение позволяет дать алгоритм восстановления потенциалов краевых задач (1.1) – (1.3) и (1.4) для $j = 1, 2$.

Отметим, что краевая задача (1.1) – (1.3) допускает естественную операторную трактовку. Определим в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, a) \oplus \oplus L_2(0, a)$ со стандартным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ линейный самосопряженный и полуограниченный снизу оператор A:

$$A \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1''(x) + q_1(x)\, y_1(x) \\ -y_2''(x) + q_2(x)\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y_1(x) \in W_2^2(0, a), \quad j = 1, 2 \\ y_1(0) = y_1(a) = y_2(0) = y_2(a) \\ y_1'(0) - y_1'(a) + y_2'(0) - y_2'(a) = 0 \end{array} \right\},$$

где $W_2^2(0, a)$ — пространство Соболева. При этом оператор A имеет дискретный спектр и его собственные значения совпадают с квадратами собственных значений краевой задачи (1.1) – (1.3). Кроме того, интегрируя по частям, для любой вектор-функции $\vec{y} = \{y_1(x), y_2(x)\}^t \in D(A)$ (t означает транспонирование матрицы) получаем равенство

$$(A\vec{y}, \vec{y})_H \doteq \int_0^a \left[|y_1'(x)|^2 + |y_2'(x)|^2 + q_1(x)|y_1(x)|^2 + q_2(x)|y_2(x)|^2 \right] dx. \tag{1.6}$$

Таким образом, для того чтобы все собственные значения задачи (1.1) – (1.3) были вещественными и отличными от нуля, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был положительным: $A > 0$. Как следует из (1.6), простым достаточным условием положительности оператора A является условие

$$q_j(x) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{(почти всюду)}, \quad j = 1, 2. \tag{1.7}$$

С другой стороны, если $A > 0$, то, полагая в равенстве (1.6) поочередно $\vec{y} = \{y_1(x), 0\}^t \in D(A)$, $\vec{y} = \{0, y_2(x)\}^t \in D(A)$, замечаем, что тогда и все собственные значения задач (1.4) для $j = 1, 2$ также будут вещественными и отличными от нуля. При этом положительности оператора A всегда можно добиться с помощью сдвига в (1.1) – (1.3) спектрального параметра $\lambda^2 \to \lambda^2 - q_0$, $q_0 > 0$, поэтому далее, без ограничения общности, будем считать, что оператор $A > 0$ и собственные значения задач (1.1) – (1.3) и (1.4) при $j = 1, 2$ являются ненулевыми вещественными числами.

В п. 2 приведено описание свойств множества собственных значений краевой задачи (1.1) – (1.3), а также спектров связанных с этой системой вспомогательных спектральных задач (1.4) при $j = 1, 2$. Это описание необходимо для формулировки условий на соответствующие последовательности, позволяющие восстановить потенциалы q_1, q_2. В п. 3 дано решение обратной спектральной задачи для системы (1.1) – (1.3) в отмеченной выше постановке.

Поскольку при исследовании прямых и обратных спектральных задач широко используются методы теории аналитических функций, приведем некоторые определения и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения.

Напомним, что целую функцию $f(\lambda)$ называют функцией конечного порядка ρ, если выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \rho, \qquad M_f(r) = \max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)|.$$

При этом $f(\lambda)$ называется целой функцией экспоненциального типа $\sigma > 0$, если она имеет порядок $\rho = 1$ и выполняется равенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r} = \sigma.$$

Целая функция экспоненциального типа $f(\lambda)$ называется функцией типа синуса, если она удовлетворяет условиям: 1) корни $f(\lambda)$ расположены в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im}\lambda_k| < h$; 2) при некотором значении h_1 выполняются неравенства $0 < m \leq |f(\lambda)| \leq M < \infty$, $\operatorname{Im}\lambda = h_1$; 3) справедливо равенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(ir)|}{r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(-ir)|}{r}.$$

Через $\mathcal{L}^d$, $d > 0$, обозначим класс целых функций $\psi(\lambda)$ экспоненциального типа $\sigma \leq d$, принадлежащих на вещественной оси пространству L_2. Согласно теореме Пэли – Винера класс $\mathcal{L}^d$ совпадает с множеством преобразований Фурье функций из $L_2(-d, d)$. При этом систематически будем использовать следующее простое утверждение (следствие теоремы Пэли – Винера и равенства Парсеваля для преобразования Фурье): если функция $\psi_1(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{L}^{a_1}$, а функция $\psi_2(\lambda)$ — классу $\mathcal{L}^{a_2}$, то их произведение принадлежит $\mathcal{L}^{a_1+a_2}$.

Для функции двух переменных x и λ штрих означает дифференцирование по переменной x, а если функция зависит от одной переменной, то штрих обозначает дифференцирование по этой переменной. Кроме того, для частных производных от функции двух переменных $F = F(x, t)$ будем использовать обозначения $F'_x(x,t) = \partial F(x,t)/\partial x$, $F'_t(x,t) = \partial F(x,t)/\partial t$.

2. Прямые спектральные задачи. В данном пункте дается необходимое для дальнейшего описание свойств последовательностей собственных значений краевых задач (1.1) – (1.3) и (1.4).

Пусть вещественная функция $q(x)$ принадлежит $L_2(0,a)$. Обозначим через $s(\lambda,x)$, $c(\lambda,x)$ фундаментальную систему решений уравнения Штурма – Лиувилля

$$y''(x) + (\lambda^2 - q(x))\,y(x) = 0, \qquad x \in (0,a), \tag{2.1}$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$s(\lambda,0) = s'(\lambda,0) - 1 = 0, \qquad c(\lambda,0) - 1 = c'(\lambda,0) = 0.$$

Теорема 2.1 (следствие теоремы 1.2.1 из [19]). *Для решений* $s(\lambda,x)$, $c(\lambda,x)$ *уравнения* (2.1) *справедливы интегральные представления*

$$s(\lambda,x) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x A(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt, \tag{2.2}$$

$$c(\lambda,x) = \cos\lambda x + \int_0^x B(x,t)\cos\lambda t\,dt, \tag{2.3}$$

где ядра

$$A(x,t) = K(x,t) - K(x,-t), \qquad B(x,t) = K(x,t) + K(x,-t), \tag{2.4}$$

и $K(x,t)$ *— единственное непрерывное решение интегрального уравнения*

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2} q(s)\,ds + \int_0^{(x+t)/2}\int_0^{(x-t)/2} q(s+\tau)K(s+\tau,\, s-\tau)\,d\tau\,ds, \tag{2.5}$$

причем $K(x,t) \equiv 0$ *при* $|t| > |x|$ *и*

$$A(x,0) \equiv 0, \qquad K(x,x) = A(x,x) = B(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(s)\,ds.$$

***Замечание* 2.1.** В теореме 1.2.1 из [19] предполагается выполненным условие непрерывности потенциала $q \in C[0,a]$. Теорема 2.1 непосредственно следует из анализа проведенного в [19] доказательства.

Используя обозначение

$$A := A(a,a) = \frac{1}{2}\int_0^a q(x)\,dx,$$

на основании теоремы 2.1 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.1.** *Справедливы представления*

$$s(\lambda,a) = \frac{\sin\lambda a}{\lambda} - A\frac{\cos\lambda a}{\lambda^2} + \frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda^2}, \tag{2.6}$$

$$s'(\lambda,a) = \cos\lambda a + A\frac{\sin\lambda a}{\lambda} + \frac{\psi_2(\lambda)}{\lambda}, \tag{2.7}$$

$$c(\lambda, a) = \cos\lambda a + A\frac{\sin\lambda a}{\lambda} + \frac{\psi_3(\lambda)}{\lambda}, \tag{2.8}$$

$$c(\lambda, a) + s'(\lambda, a) = 2\cos\lambda a + 2A\frac{\sin\lambda a}{\lambda} - A^2\frac{\cos\lambda a}{\lambda^2} + \frac{\psi_4(\lambda)}{\lambda^2}, \tag{2.9}$$

где целые функции ψ_j *принадлежат классу* $\mathcal{L}^a$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Доказательство. Представления (2.6), (2.8) получаются непосредственно из (2.2), (2.3) после интегрирования по частям, причем функции

$$\psi_1(\lambda) = \int_0^a A_t'(a,t)\cos\lambda t\, dt, \qquad \psi_3(\lambda) = -\int_0^a B_t'(a,t)\sin\lambda t\, dt. \tag{2.10}$$

Существование частных производных $A_t'(a,t) \in L_2(0,a)$, $B_t'(a,t) \in L_2(0,a)$ следует из (2.4), (2.5). При дифференцировании равенства (2.2) по x получаем соотношение (2.5) с функцией

$$\psi_2(\lambda) = \int_0^a A_x'(a,t)\sin\lambda t\, dt \in \mathcal{L}^a, \qquad A_x'(a,t) \in L_2(0,a). \tag{2.11}$$

Для доказательства (2.9) следует установить представление

$$\psi_2(\lambda) + \psi_3(\lambda) = -A^2\frac{\cos\lambda a}{\lambda} + \frac{\psi_4(\lambda)}{\lambda}, \tag{2.12}$$

где $\psi_4 \in \mathcal{L}^a$. Согласно (2.10), (2.11), (2.4) и (2.5) имеем равенство

$$\psi_2(\lambda) + \psi_3(\lambda) = \int_0^a L(t)\sin\lambda t\, dt, \tag{2.13}$$

где ядро

$$L(t) := A_x'(a,t) - B_t'(a,t) =$$

$$= \int_{(a-t)/2}^a q(\beta)K(\beta, \beta-(a-t))\,d\beta - \int_{(a+t)/2}^a q(\beta)K(\beta, \beta-(a+t))\,d\beta.$$

Отсюда в силу условия $q \in L_2(0,a)$ и соответствующих свойств ядра $K(x,t)$ (см. (2.5)) заключаем, что существует производная

$$L'(t) = \frac{1}{2}\left\{q\left(\frac{a-t}{2}\right)K\left(\frac{a-t}{2}, \frac{t-a}{2}\right) - q\left(\frac{a+t}{2}\right)K\left(\frac{a+t}{2}, -\frac{a+t}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \left\{\int_{(a-t)/2}^a q(\beta)K_t'(\beta, \beta-(a-t))\,d\beta + \int_{(a+t)/2}^a q(\beta)K_t'(\beta, \beta-(a+t))\,d\beta\right\} \in L_2(0,a).$$

Тогда, интегрируя в (2.13) по частям, получаем

$$\psi_2(\lambda) + \psi_3(\lambda) = -\frac{\cos\lambda a}{\lambda}\int_0^a q(\beta)K(\beta,\beta)\,d\beta + \frac{1}{\lambda}\int_0^a L'(t)\cos\lambda t\, dt. \tag{2.14}$$

При этом постоянная (см. (2.5))

$$\int_0^a q(\beta)K(\beta,\beta)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^a q(\beta)\int_0^\beta q(s)\,ds\,d\beta = \frac{1}{4}\left(\int_0^a q(t)\,dt\right)^2 = A^2.$$

Отсюда и из (2.14) с учетом включения $L'(t) \in L_2(0, a)$ получаем представление (2.12).

Следствие доказано.

***Следствие* 2.2** [19] (гл. 1, § 5). *Для собственных значений* ν_k, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\nu_{-k} = -\nu_k$, *задачи Дирихле*

$$y''(x) + (\lambda^2 - q(x))\,y(x) = 0, \qquad x \in (0, a), \quad y(0) = y(a) = 0, \tag{2.15}$$

при соответствующей нумерации справедлива асимптотическая формула

$$\nu_k = \frac{\pi k}{a} + \frac{A(a,a)}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.16}$$

где последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *принадлежит* l_2.

***Следствие* 2.3.** *Справедливо включение*

$$\left\{k^2\left(s'(\nu_k, a) + c(\nu_k, a) - 2(-1)^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \in l_1.$$

Доказательство. Прежде всего из тождества $c(\lambda, a)s'(\lambda, a) - c'(\lambda, a) \times$ $\times\, s(\lambda, a) = 1$ получаем $c(\nu_k, a)s'(\nu_k, a) = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и, значит, требуется доказать справедливость включения

$$\left\{k^2\left(s'(\nu_k, a) + \frac{1}{s'(\nu_k, a)} - 2(-1)^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \in l_1.$$

Используя в представлении (2.7) асимптотическую формулу (2.16), получаем равенство (довольно простые выкладки опускаем) $s'(\nu_k, a) = (-1)^k + \psi_2(\nu_k)/\nu_k +$ $+\, O(k^{-2})$, $k \to \infty$. Отсюда на основании (2.16) и соотношения $1 + \alpha + 1/(1+\alpha) =$ $= 2 + O(\alpha^2)$, $\alpha \to 0$, имеем

$$(-1)^k\left[s'(\nu_k, a) + 1/s'(\nu_k, a)\right] = 2 + O\left(\frac{|\psi_2(\nu_k)|^2}{\nu_k^2} + k^{-4}\right) =$$

$$= 2 + k^{-2}O\left(|\psi_2(\nu_k)|^2 + k^{-2}\right), \quad k \to \infty.$$

При этом, поскольку функция ψ_2 принадлежит $\mathcal{L}^a$, а для ν_k справедлива асимптотическая формула (2.16), последовательность $\{\psi_2(\nu_k)\}$ принадлежит l_2 и, значит, $\{|\psi_2(\nu_k)|^2\} \in l_1$ (см. [19], гл. 1, § 4).

Следствие доказано.

Обозначим через $s_j(\lambda, x)$, $c_j(\lambda, x)$, $j = 1, 2$, решения уравнений (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$s_j(\lambda, 0) = s_j'(\lambda, 0) - 1 = 0, \qquad c_j(\lambda, 0) - 1 = c_j'(\lambda, 0) = 0.$$

Тогда, если искать решение $\{y_1(\lambda, x), y_2(\lambda, x)\}^t$ задачи (1.1) – (1.3) в виде $y_j(\lambda, x) = C_{j1}s_j(\lambda, x) + C_{j2}c_j(\lambda, x)$, $j = 1, 2$, подставляя эти выражения в краевые условия (1.2), (1.3), находим, что собственные значения λ задачи (1.1) – (1.3) являются корнями целой функции

$$\phi(\lambda) := -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -s_1(\lambda,a) & 1-c_1(\lambda,a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_2(\lambda,a) & 1-c_2(\lambda,a) \\ 1-s_1'(\lambda,a) & -c_1'(\lambda,a) & 1-s_2'(\lambda,a) & -c_2'(\lambda,a) \end{vmatrix} =$$

$$= (2-c_1(\lambda,a)-s_1'(\lambda,a))s_2(\lambda,a) + (2-c_2(\lambda,a)-s_2'(\lambda,a))s_1(\lambda,a). \qquad (2.17)$$

В следующих лемме и теореме будут использованы обозначения

$$A_j = \frac{1}{2}\int_0^a q_j(x)dx, \quad j = 1, 2, \qquad A_3 = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad b = \frac{a}{2},$$

где $q_1(x)$, $q_2(x)$ — потенциалы из уравнений (1.1).

Лемма 2.1. *Пусть* $q_j \in L_2(0,a)$, $j = 1, 2$, — *вещественные функции. Тогда для функции* $\phi(\lambda)$, *заданной равенством* (2.17), *справедливо представление*

$$\phi(\lambda) = 16\lambda^{-1}\sin^3\lambda b\cos\lambda b - 8A_3\lambda^{-2}\sin^2\lambda b(3\cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b) +$$

$$+ 2\lambda^{-3}(4A_1A_2 + A_1^2 + A_2^2)\sin\lambda b\cos\lambda b(\cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b) -$$

$$- 2A_1A_2A_3\lambda^{-4}\cos^4\lambda b + \lambda^{-2}(\sin^2\lambda b\,\psi_5(\lambda) + \lambda^{-1}\sin\lambda b\,\psi_6(\lambda) + \lambda^{-2}\psi_7(\lambda)), \qquad (2.18)$$

где $\psi_5 \in \mathcal{L}^a$, $\psi_6 \in \mathcal{L}^{3/2a}$, $\psi_7 \in \mathcal{L}^{2a}$.

Доказательство. Подставим равенства (2.6) – (2.8), примененные к соответствующим решениям уравнений (1.1), в выражение (2.17). Тогда после простых алгебраических преобразований, используя элементарные формулы

$$\cos\lambda a = \cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b, \qquad \sin\lambda a = 2\sin\lambda b\cos\lambda b, \qquad b = \frac{a}{2},$$

получаем

$$\phi(\lambda) = 16\lambda^{-1}\sin^3\lambda b\cos\lambda b - 8A_3\lambda^{-2}\sin^2\lambda b(3\cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b) +$$

$$+ 2\lambda^{-3}(4A_1A_2 + A_1^2 + A_2^2)\sin\lambda b\cos\lambda b(\cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b) -$$

$$- 2A_1A_2A_3\lambda^{-4}(\sin^4\lambda b - 2\sin^2\lambda b\cos^2\lambda b + \cos^4\lambda b) -$$

$$- 2\lambda^{-3}\sin\lambda b\cos\lambda b(\psi_4^{(1)}(\lambda) + \psi_4^{(2)}(\lambda)) +$$

$$+ \lambda^{-4}\cos^2\lambda a(A_1\psi_4^{(2)}(\lambda) + A_2\psi_4^{(1)}(\lambda) + A_1^2\psi_1^{(2)}(\lambda) + A_2^2\psi_1^{(1)}(\lambda)) -$$

$$- \lambda^{-4}(\psi_1^{(2)}(\lambda)\psi_4^{(1)}(\lambda) + \psi_1^{(1)}(\lambda)\psi_4^{(2)}(\lambda)) +$$

$$+ 4\lambda^{-2}\sin^2\lambda b(\psi_1^{(1)}(\lambda) + \psi_1^{(2)}(\lambda)) - 4\lambda^{-3}\sin\lambda b\cos\lambda b(A_1\psi_1^{(2)}(\lambda) + A_2\psi_1^{(1)}(\lambda)),$$

где индекс $l = 1, 2$ у функций $\psi_j^{(l)} \in \mathcal{L}^a$ соответствует утверждениям следствия 2.1, примененного к уравнению (2.1) с потенциалом $q = q_l(x)$. Полагая

$$\psi_5(\lambda) = \psi_1^{(1)}(\lambda) + \psi_1^{(2)}(\lambda) \in \mathcal{L}^a,$$

$$\psi_6(\lambda) = -2\cos\lambda b(\psi_4^{(1)}(\lambda) + \psi_4^{(2)}(\lambda) + 2A_1\psi_1^{(2)}(\lambda) + 2A_2\psi_1^{(1)}(\lambda)) \in \mathcal{L}^{3/2a},$$

$$\psi_7(\lambda) = -2A_1A_2A_3(\sin^4\lambda b - 2\sin^2\lambda b\cos^2\lambda b) +$$

$$+ \cos\lambda a(A_1\psi_4^{(2)}(\lambda) + A_2\psi_4^{(1)}(\lambda) + A_1^2\psi_1^{(2)}(\lambda) + A_2^2\psi_1^{(1)}(\lambda)) -$$

$$- (\psi_1^{(2)}(\lambda)\psi_4^{(1)}(\lambda) + \psi_1^{(1)}(\lambda)\psi_4^{(2)}(\lambda)) \in \mathcal{L}^{2a},$$

получаем равенство (2.18).

Лемма доказана.

Отметим, что непосредственно из (2.18) вытекает соотношение

$$\lambda^2\phi(\lambda) - 16\lambda\sin^3\lambda b\cos\lambda b + 8A_3\sin^2\lambda b(3\cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b) \in \mathcal{L}^{2a}. \qquad (2.19)$$

Исходя из представления (2.18), рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении на бесконечности множества корней четной целой функции $\phi(\lambda)$, которое совпадает с множеством собственных значений краевой задачи (1.1) – (1.3). Обозначим эти корни через ζ_k, причем, согласно приведенному в п. 1 замечанию, считаем, без ограничения общности, что все числа ζ_k вещественны и не равны нулю. Далее понадобится следующее определение.

Определение 2.1. *Нумерацию последовательности симметрично расположенных относительно мнимой оси комплексных чисел* λ_k *будем называть правильной, если* (*с учетом кратности*) *выполняются следующие условия*: 1) $\lambda_k = -\lambda_{-k}$ $(\operatorname{Re}\lambda_k \neq 0)$; 2) $\operatorname{Re}\lambda_k \leq \operatorname{Re}\lambda_{k+1}$.

Теорема 2.2. *При условии* $q_j \in L_2(0,a)$ *множество корней* $\{\pm\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *функции* $\phi(\lambda)$ *можно представить в виде объединения четырех правильно занумерованных последовательностей* $\{\pm\rho_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$ *и* $\{\pm\rho_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}, j = 2, 3, 4,$ *для которых при* $k \geq 1$ *справедливы представления*

$$\rho_k^{(j)} = \frac{2\pi k}{a} + \frac{A_j}{2\pi k} + \frac{\beta_k^{(j)}}{k}, \quad j = 1, 2, 3, \qquad (2.20)$$

$$\rho_k^{(4)} = \frac{\pi(2k-1)}{a} + \frac{A_3}{\pi(2k-1)} + \frac{\beta_k^{(4)}}{k}, \qquad (2.21)$$

где при $A_1 \neq A_2$ *последовательности* $\{b_k^{(j)}\} \in l_2$, $j = 1, 2, 3, 4,$ *а при* $A_1 = A_2$ *последовательности* $\{b_k^{(j)}\} \in l_6$, $j = 1, 2, 3,$ *и* $\{b_k^{(4)}\} \in l_2$.

Доказательство. Для установления асимптотических формул (2.20), использовав равенство (2.18), представим функцию $\phi(\lambda)$ в виде

$$\phi(\lambda) = \phi_{s,0}(\lambda) + \lambda^{-2}\phi_{s,1}(\lambda), \qquad (2.22)$$

$$\phi_{s,0}(\lambda) = 16\lambda^{-1}\sin^3\lambda b\cos\lambda b - 24A_3\lambda^{-2}\sin^2\lambda b\cos^2\lambda b +$$

$$+ 2\lambda^{-3}(4A_1A_2 + A_1^2 + A_2^2)\sin\lambda b\cos\lambda b\cos^2\lambda b - 2A_1A_2A_3\lambda^{-4}\cos^4\lambda b,$$

$$\phi_{s,1}(\lambda) = 8A_3\sin^4\lambda b + \sin^2\lambda b\,\psi_5(\lambda) + \lambda^{-1}\sin\lambda b\,\psi_6(\lambda) + \lambda^{-2}\psi_7(\lambda).$$

При этом можно заметить, что функция $\phi_{s,0}(\lambda)$ допускает представление

$$\phi_{s,0} = 2\lambda^{-4}\cos^4\lambda b\,F(2\lambda\tan\lambda b), \qquad (2.23)$$

где многочлен

$$F(X) = X^3 - 3A_3X^2 + \frac{1}{2}(4A_1A_2 + A_1^2 + A_2^2)X - A_1A_2A_3.$$

На основании теоремы Виета заключаем, что кубическое уравнение

$$F(X) = 0 \qquad (2.24)$$

имеет корни $X_j = A_j$, $j = 1, 2, 3,$ и тогда, согласно (2.23), имеем равенство

$$\phi_{s,0}(\lambda) = 2\lambda^{-1}\cos^4\lambda b\prod_{j=1}^{3}(2\tan\lambda b - A_j\lambda^{-1}). \tag{2.25}$$

Для доказательства существования последовательностей корней функции $\phi(\lambda)$ с асимптотиками (2.20) достаточно показать существование такой последовательности $\{r_k\}\in l_2$ при $A_1 \neq A_2$ или $\{r_k\}\in l_6$ при $A_1 = A_2$, что при достаточно больших k внутри каждой из окружностей

$$\left|\lambda - \frac{2\pi k}{a} - \frac{A_j}{2\pi k}\right| = \frac{r_k}{k}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.26}$$

содержатся корни функции $\phi(\lambda)$ (один корень, если $A_1 \neq A_2$, и три корня при $A_1 = A_2$; тогда $A_1 = A_2 = A_3$ и все окружности (2.26) совпадают между собой). При этом нетрудно установить (записывая асимптотические разложения для корней уравнения $2\lambda\tan\lambda b - A_j\lambda^{-1} = 0$), что функция $\phi_{s,0}(\lambda)$ имеет нужное для дальнейшего использования теоремы Руше свойство: если положить $r_k = 1/k$, то при достаточно больших k внутри каждой из окружностей (2.26) будет находиться ровно один ее корень, если $A_1 \neq A_2$ (если $A_1 = A_2$, то внутри (2.26) находятся три корня функции $\phi_{s,0}(\lambda)$).

Пусть в соответствии с (2.26) при фиксированном значении индекса $j = 1, 2, 3$, комплекснозначная последовательность $\lambda_{j,k}$ имеет вид

$$\lambda_{j,k} = \frac{2\pi k}{a} + \frac{A_j}{2\pi k} + \frac{\mu_k}{k}, \quad \mu_k = r_k e^{i\theta}, \quad \theta\in[0,2\pi], \quad r_k\in(0,1]. \tag{2.27}$$

Тогда при $k \to \infty$ справедливы равномерные по r_k оценки:

$$\sin\lambda_{j,k}b = (-1)^k\sin\left(\frac{A_jb}{2\pi k} + \frac{b\mu_k}{k}\right) = (-1)^k\left(\frac{A_jb}{2\pi k} + \frac{b\mu_k}{k}\right)\left(1 + O(k^{-2})\right),$$

$$\cos\lambda_{j,k}b = (-1)^k\cos\left(\frac{A_jb}{2\pi k} + \frac{b\mu_k}{k}\right) = (-1)^k + O(k^{-2}), \tag{2.28}$$

$$\tan\lambda b = \left(\frac{A_jb}{2\pi k} + \frac{b\mu_k}{k}\right)\left(1 + O(k^{-2})\right), \quad \lambda_{j,k}^{-1} = \frac{b}{\pi k} + O(k^{-3}).$$

Используя соотношения (2.25), (2.28), а также для удобства записи временное соглашение, что $A_4 = A_1$, $A_{-1} = A_3$, получаем

$$\lambda_{j,k}\phi_{s,0}(\lambda_{j,k}) = 16\left(1 + O(k^{-2})\right)\prod_{l=1}^{3}\left(\left(\frac{A_jb}{2\pi k} + \frac{b\mu_k}{k}\right)\left(1 + O(k^{-2})\right) - \frac{A_l}{2\lambda_{j,k}}\right) =$$

$$= 16k^{-3}b^3\mu_k \times$$

$$\times\left(\frac{(A_j - A_{j-1})(A_j - A_{j+1})}{4\pi^2} + \frac{\mu_k}{2\pi}(2A_j - A_{j-1} - A_{j+1}) + \mu_k^2\right) + d_k, \tag{2.29}$$

где $|d_k| \le ck^{-5}$ с константой $c > 0$, не зависящей от значений $r_k\in(0,1]$.

Рассмотрим оценку сверху для функции $\phi_{s,1}$ на последовательностях вида (2.27). Исходя из определения функции $\phi_{s,1}$, имеем равенство

$$\lambda_{j,k}\phi_{s,1}(\lambda_{j,k}) = \lambda_{j,k}^{-1}\Big(8A_3\sin^4\lambda_{j,k}b +$$

$$+ \sin^2\lambda_{j,k}b\,\psi_5(\lambda_{j,k}) + \lambda_{j,k}^{-1}\sin\lambda_{j,k}b\,\psi_6(\lambda_{j,k}) + \lambda_{j,k}^{-2}\psi_7(\lambda_{j,k})\Big),$$

и тогда, используя (2.28), получаем оценку

$$\left|\lambda_{j,k}\phi_{s,1}(\lambda_{j,k})\right| \le ck^{-3}\left\{k^{-2} + \left|\psi_5(\lambda_{j,k})\right| + \left|\psi_6(\lambda_{j,k})\right| + \left|\psi_7(\lambda_{j,k})\right|\right\} \le ck^{-3}\tilde{d}_k \tag{2.30}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $r_k \in (0,1]$, и последовательностью

$$\tilde{d}_k = k^{-2} + \sup_{\lambda:\left|\lambda-\tilde{\lambda}_{j,k}\right|\le 1}\{|\psi_5(\lambda)| + |\psi_6(\lambda)| + |\psi_7(\lambda)|\}, \tag{2.31}$$

$$\tilde{\lambda}_{j,k} = \frac{2\pi k}{a} + \frac{A_j}{2\pi k}.$$

Поскольку функции ψ_j, $j = 5, 6, 7$, из правой части (2.31) принадлежат классу $\mathcal{L}^{2a}$, то (см. [19], гл. 1, § 4, задача 5) последовательность $\{\tilde{d}_k\}$ принадлежит l_2.

Таким образом, согласно оценкам (2.29), (2.30), для применимости теоремы Руше к функциям $\phi(\lambda)$ и $\phi_{s,0}(\lambda)$ внутри окружностей (2.26) при больших k достаточно выполнения оценки

$$r_k\left|\frac{(A_j - A_{j-1})(A_j - A_{j+1})}{4\pi^2} + \frac{\mu_k}{2\pi}(2A_j - A_{j-1} - A_{j+1}) + \mu_k^2\right| > \tilde{r}_k \tag{2.32}$$

с последовательностью $\{\tilde{r}_k\} \in l_2$.

Из проведенных рассмотрений следует, что в случае $A_1 \ne A_2$ найдется такая последовательность $\{r_k\} \in l_2$, $r_k \in (0, 1]$, что выполняется (2.32) и, значит, при больших k на окружностях (2.26) выполняется оценка

$$\left|\phi_{s,0}(\lambda)\right| > \left|\phi_{s,1}(\lambda)\right|. \tag{2.33}$$

Таким образом, на основании теоремы Руше с учетом свойств корней функции $\phi_{s,0}(\lambda)$ заключаем, что найдется такая последовательность $\{r_k\} \in l_2$, для которой начиная с некоторого k_0 внутри каждой из окружностей (2.26) находится ровно один корень (с учетом кратности) функции $\phi(\lambda)$.

В случае $A_1 = A_2$, когда все три корня кубического уравнения (2.24) совпадают между собой, оценка (2.32) принимает вид $r_k^3 > \tilde{r}_k$, $\{\tilde{r}_k\} \in l_2$, и можно сделать вывод о существовании необходимой последовательности $\{r_k\} \in l_6$ такой, что начиная с некоторого k_0 при каждом $k \ge k_0$ внутри каждой из окружностей (2.26) находится ровно три корня (с учетом кратности) функции $\phi(\lambda)$.

Для установления существования последовательности корней функции $\phi(\lambda)$ с асимптотикой (2.21) представим функцию $\phi(\lambda)$ в виде (см. (2.18))

$$\phi(\lambda) = \phi_{c,0}(\lambda) + \lambda^{-2}\phi_{c,1}(\lambda), \tag{2.34}$$

$$\phi_{c,0}(\lambda) = 16\lambda^{-1}\sin^3\lambda b\cos\lambda b + 8A_3\lambda^{-2}\sin^4\lambda b,$$

$$\phi_{c,1}(\lambda) = -24A_3\sin^2\lambda b\cos^2\lambda b +$$

$$+ 2\lambda^{-1}(4A_1A_2 + A_1^2 + A_2^2)\sin\lambda b\cos\lambda b(\cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b) -$$

$$- 2A_1A_2A_3\lambda^{-2}\cos^4\lambda b + \sin^2\lambda b\,\psi_5(\lambda) + \lambda^{-1}\sin\lambda b\,\psi_6(\lambda) + \lambda^{-2}\psi_7(\lambda)$$

и рассмотрим оценки функций $\phi_{c,0}(\lambda)$, $\phi_{c,1}(\lambda)$ на окружностях

$$\lambda \in C_k : \left| \lambda - \frac{\pi(k-1/2)}{b} - \frac{A_3}{2\pi(k-1/2)} \right| = \frac{r_k}{k}, \quad r_k \in (0, 1], \tag{2.35}$$

где $k = 1, 2, \ldots$. Здесь, полагая

$$\lambda_k = \frac{\pi(k-1/2)}{b} + \frac{A_3}{2\pi(k-1/2)} + \frac{\mu_k}{k}, \qquad |\mu_k| = r_k \in (0, 1], \tag{2.36}$$

при $k \to \infty$ имеем равномерные по $r_k \in (0, 1]$ оценки

$$\lambda_k^{-1} = \frac{b}{\pi(k-1/2)} + O(k^{-3}), \qquad \sin\lambda_k b = -(-1)^k + O(k^{-2}),$$
$$\cos\lambda_k b = (-1)^k\left(\frac{A_3 b}{2\pi(k-1/2)} + \frac{\mu_k b}{k}\right) + O(k^{-3}). \tag{2.37}$$

Тогда (см. (2.34))

$$\left|\lambda_k \phi_{c,0}(\lambda_k)\right| =$$
$$= 8\left|1 + O(k^{-2})\right|\left|2(-1)^k\left(\frac{A_3 b}{2\pi(k-1/2)} + \frac{\mu_k b}{k}\right) - A_3\lambda_k^{-1}(-1)^k + O(k^{-3})\right| =$$
$$= 16bk^{-1}r_k + O(k^{-3}). \tag{2.38}$$

Для функции $\phi_{c,1}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$, используя (2.37), имеем равномерную по $r_k \in (0, 1]$ оценку

$$\left|\phi_{c,1}(\lambda_k)\right| \le c\left\{k^{-2} + |\psi_5(\lambda_k)| + k^{-1}|\psi_6(\lambda)| + k^{-2}|\psi_7(\lambda)|\right\} \le c\tilde{d}_k, \tag{2.39}$$

где последовательность $\left|\tilde{d}_k\right| \in l_2$ имеет вид

$$\tilde{d}_k = k^{-2} + \sup_{\lambda: \left|\lambda - \tilde{\lambda}_k\right| \le 1} \{|\psi_5(\lambda)| + |\psi_6(\lambda)| + |\psi_7(\lambda)|\},$$

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{\pi(k-1/2)}{b} + \frac{A_3}{2\pi(k-1/2)}.$$

Таким образом, согласно (2.38), (2.39), если ограничиться рассмотрением класса окружностей C_k вида (2.35), то для выполнения оценки

$$\left|\phi_{c,0}(\lambda)\right| > \left|\lambda^{-2}\phi_{c,1}(\lambda)\right|, \qquad \lambda \in C_k, \tag{2.40}$$

при достаточно больших k достаточно потребовать выполнения оценок $r_k > c\tilde{r}_k$ для некоторых $\{\tilde{r}_k\} \in l_2$ и постоянной $c > 0$, не зависящей от k. Отсюда делаем вывод о возможности выбора такой последовательности $\{r_k\} \in l_2$, $r_k \in (0, 1]$, для которой выполняются оценки (2.40) при больших k. При этом нетрудно установить, что при достаточно больших k функция $\phi_{c,0}(\lambda)$ имеет внутри окружностей (2.35) с $r_k = 1/k$ ровно один корень. Тогда на основании теоремы Руше заключаем, что найдется такая последовательность $\{r_k\} \in l_2$, что начиная с некоторого номера k_0 внутри каждой из окружностей (2.35) находится ровно один корень функции $\phi(\lambda)$.

Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что существуют такое натуральное число k_1 и такие последовательности $\rho_k^{(j)}$, $k \ge k_1$, $j =$

$= 1, 2, 3, 4,$ корней функции $\phi(\lambda)$, для которых выполняются асимптотические равенства (2.20), (2.21).

Согласно (2.18) положим

$$\phi_0(\lambda) = 16\lambda^{-1}\sin^3\lambda b\cos\lambda b, \qquad \phi_1(\lambda) = \phi(\lambda) - \phi_0(\lambda). \tag{2.41}$$

Поскольку функция $\lambda\phi_1(\lambda)\in\mathcal{L}^{2a}$, найдется такая постоянная $c > 0$, что при всех $\lambda \in C$, $|\lambda| \geq 1$, выполняется оценка $|\phi_1(\lambda)| \leq c|\lambda|^{-1}e^{2a|\operatorname{Im}\lambda|}$. Отсюда, используя явный вид функции $\phi_0(\lambda)$ из (2.41), заключаем, что при всех достаточно больших $k \geq k_0$ при $|\lambda| = \pi(4k-1)/(2a)$ выполняется оценка $|\phi_0(\lambda)| > |\phi(\lambda) - \phi_0(\lambda)|$. Тогда, применяя теорему Руше, получаем, что при $k \geq k_0$ функции $\phi(\lambda)$ и $\phi_0(\lambda)$ имеют одинаковое количество корней (с учетом кратности) в каждом из кругов $|\lambda| \leq \pi(4k-1)/(2a)$. Это вместе с приведенными выше рассуждениями и учетом четности функции $\phi(\lambda)$ полностью доказывает (2.20), (2.21).

Теорема доказана.

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi(\lambda) = s_1(\lambda, a)s_2(\lambda, a). \tag{2.42}$$

При этом множество корней $\{\xi_k\}_{-\infty, k\neq 0}^{\infty}$ функции $\chi(\lambda)$ является объединением спектров $\{\nu_k^{(j)}\}_{-\infty, k\neq 0}^{\infty}$ задач Дирихле (1.4) (см. следствие (2.2)). Далее последовательности $\nu_k^{(j)}$ считаем правильно занумерованными, причем $\nu_k^{(j)} >$ > 0 при $k \geq 1$, $j = 1, 2$.

Лемма 2.2. 1. *Пусть для некоторого* $n \in N$ *выполняется условие* $\nu_{2n-1}^{(1)} \notin$ $\notin \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ $\left(\nu_{2n-1}^{(2)} \notin \{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}\right)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{\phi(\nu_{2n-1}^{(1)})}{s_2(\nu_{2n-1}^{(1)}, a)} \geq 4 \qquad \left(\frac{\phi(\nu_{2n-1}^{(2)})}{s_1(\nu_{2n-1}^{(2)}, a)} \geq 4\right). \tag{2.43}$$

2. *Пусть для некоторого* $n \in N$ *выполняется условие* $\nu_{2n}^{(1)} \notin \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ $\left(\nu_{2n}^{(2)} \notin\right.$ $\left.\notin \left\{\nu_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}\right)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{\phi(\nu_{2n}^{(1)})}{s_2(\nu_{2n}^{(1)}, a)} \leq 0 \qquad \left(\frac{\phi(\nu_{2n}^{(2)})}{s_1(\nu_{2n}^{(2)}, a)} \leq 0\right). \tag{2.44}$$

3. *Пусть* $\nu_{2k-1}^{(1)} = \nu_{2p-1}^{(2)} = \nu$. *Тогда*

$$\phi'(\nu) - 4\frac{\partial s_1(\lambda, a)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\nu} - 4\frac{\partial s_2(\lambda, a)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\nu} \leq 0. \tag{2.45}$$

4. *Если* $\nu_{2k-1}^{(1)} = \nu_{2p}^{(2)} = \nu$, *то*

$$\phi'(\nu) - 4\frac{\partial s_2(\lambda, a)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\nu} \geq 0. \tag{2.46}$$

5. *Пусть* $\nu_{2k}^{(1)} = \nu_{2p-1}^{(2)} = \nu$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\phi'(\nu) - 4\frac{\partial s_1(\lambda, a)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\nu} \geq 0. \tag{2.47}$$

6. *Если* $\nu_{2k}^{(1)} = \nu_{2p}^{(2)} = \nu$, *то*

$$\phi'(\nu_{2k}^{(1)}) \le 0. \tag{2.48}$$

Доказательство. Из равенств $c_j(\nu_k^{(j)}, a)\, s_j'(\nu_k^{(j)}, a) = 1$ и (2.17) имеем

$$\begin{aligned}\phi(\nu_k^{(1)}) &= \left(2 - s_1'(\nu_k^{(1)}, a) - \frac{1}{s_1'(\nu_k^{(1)}, a)}\right) s_2(\nu_k^{(1)}, a),\\ \phi(\nu_k^{(2)}) &= \left(2 - s_2'(\nu_k^{(2)}, a) - \frac{1}{s_2'(\nu_k^{(2)}, a)}\right) s_2(\nu_k^{(2)}, a).\end{aligned} \tag{2.49}$$

С другой стороны, из перемежаемости корней функции $s_j'(\sqrt{\lambda}, a)$ с корнями $\{\nu_k^{(j)}\}$ функции $s_j(\sqrt{\lambda}, a)$ (см. [19], гл. 3, § 4) следуют неравенства

$$(-1)^k s_j'(\nu_k^{(j)}, a) > 0, \quad j = 1, 2. \tag{2.50}$$

Отсюда, в частности, имеем неравенства

$$(-1)^k \left(s_j'(\nu_k^{(j)}, a) + \frac{1}{s_j'(\nu_k^{(j)}, a)} \right) \ge 2, \quad j = 1, 2. \tag{2.51}$$

Кроме того, выполняются неравенства (см. (2.50) и [19], гл. 3, § 1)

$$(-1)^k \left.\frac{\partial s_j(\lambda, a)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = \nu_k^{(j)}} > 0, \quad j = 1, 2. \tag{2.52}$$

При условии 1 имеет место неравенство $s_2(\nu_{2n-1}^{(1)}, a) \ne 0$. Тогда, используя (2.51) для $\nu_k^{(j)} = \nu_{2k-1}^{(1)}$ в (2.49), получаем первое неравенство из (2.43). Аналогичным образом доказываются и остальные неравенства из (2.43), (2.44).

Пусть теперь $\nu_{2k-1}^{(1)} = \nu_{2p-1}^{(2)} = \nu$. Тогда $s_1(\nu, a) = s_2(\nu, a) = 0$ и из (2.17) следует равенство $\phi(\nu) = 0$. При этом

$$\phi'(\nu) - 4\left.\frac{\partial s_1(\lambda, a)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\nu} - 4\left.\frac{\partial s_2(\lambda, a)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\nu} =$$

$$= -\left.\frac{\partial s_1(\lambda, a)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\nu}\left(2 + s_2'(\nu, a) + \frac{1}{s_2'(\nu, a)}\right) - \left.\frac{\partial s_2(\lambda, a)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\nu}\left(2 + s_1'(\nu, a) + \frac{1}{s_1'(\nu, a)}\right),$$

и неравенство (2.45) следует из неравенств (2.51), (2.52), примененных для нечетного значения индекса k. Аналогично устанавливаются неравенства (2.46) – (2.48).

Лемма доказана.

Отметим, что последовательности $s_2'(\nu_k^{(1)}, a)$ и $s_1'(\nu_k^{(2)}, a)$ на основании (2.7), (2.16) имеют свойства

$$\begin{aligned} s_2'(\nu_k^{(1)}, a) &= \cos \nu_k^{(1)} a + \frac{A_2 \sin \nu_k^{(1)} a}{\nu_k^{(1)}} + \frac{b_k^{(1)}}{\nu_k^{(1)}}, \quad \{b_k^{(1)}\} \in l_2,\\ s_1'(\nu_k^{(2)}, a) &= \cos \nu_k^{(2)} a + \frac{A_1 \sin \nu_k^{(2)} a}{\nu_k^{(2)}} + \frac{b_k^{(2)}}{\nu_k^{(2)}}, \quad \{b_k^{(2)}\} \in l_2,\end{aligned} \tag{2.53}$$

и

$$\{k(s_2'(\nu_k^{(1)}, a) - (-1)^k)\}_{k=1}^{\infty} \in l_2, \qquad \{k(s_1'(\nu_k^{(2)}, a) - (-1)^k)\}_{k=1}^{\infty} \in l_2. \tag{2.54}$$

Далее понадобится следующее определение [21] (§ 1), сформулированное в удобном для нас виде.

Определение 2.2. *Вещественная мероморфная функция* $\omega(\lambda)$ *называ-*

ется функцией Неванлинны (*невырожденной* R *-функцией*), *если она отображает открытую верхнюю* (*нижнюю*) *полуплоскость в себя*: $\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\omega(\lambda) > 0$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Теорема 2.3. *Пусть потенциалы* $q_j \in L_2(0,a)$ *удовлетворяют условию* (1.7). *Тогда вещественная мероморфная функция*

$$F(\lambda) = \frac{\phi(\sqrt{\lambda})}{s_1(\sqrt{\lambda})\, s_2(\sqrt{\lambda})} \tag{2.55}$$

является функцией Неванлинны.

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$g_j(\lambda) = 2 - c_j(\sqrt{\lambda}, a) - s_j'(\sqrt{\lambda}, a), \quad j = 1, 2, \tag{2.56}$$

так что $\phi(\sqrt{\lambda}) = g_1(\lambda)s_2(\sqrt{\lambda}, a) + g_2(\lambda)s_1(\sqrt{\lambda}, a)$. Корни функции $g_j(\lambda)$ совпадают с собственными значениями периодической задачи Штурма – Лиувилля

$$y_j''(x) + (\lambda^2 - q_j(x))\, y_j(x) = 0, \quad x \in (0, a), \quad y_j(0) = y_j(a), \quad y_j'(0) = y_j'(a),$$

и, значит (см. [19], гл. 3, § 4), при $j = 1, 2$ выполняется условие чередования корней функции $g_j(\sqrt{\lambda})$ с корнями $\nu_k^{(j)2}$ функции $s_j(\sqrt{\lambda}, a)$, для которых значения $\pm\nu_k^{(j)}$ составляют спектр краевой задачи (1.4), причем наименьший корень функции $g_j(\sqrt{\lambda})$ строго меньше, чем $\nu_1^{(j)2}$. Таким образом, если обозначить через $\tau_k^{(j)}$ корни функции $g_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, то с учетом условия положительности потенциалов q_j имеем неравенства

$$0 < \tau_1^{(j)} < \nu_1^{(j)2} \leq \tau_2^{(j)} \leq \nu_2^{(j)2} \leq \ldots . \tag{2.57}$$

Далее, так как четная целая функция $s_j(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа (см. (2.6)), по теореме Адамара (см. [22], § 1.10) функция $s_j(\sqrt{\lambda})$ допускает представление в виде канонического произведения

$$s_j(\sqrt{\lambda}) = C_j \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\nu_k^{(j)2}}\right), \quad \nu_k^{(j)2} > 0, \tag{2.58}$$

с некоторой постоянной C_j, $j = 1, 2$. Аналогичным образом для функций $g_j(\lambda)$ справедливы представления

$$g_j(\lambda) = \tilde{C}_j \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\tau_k^{(j)}}\right), \quad \tau_k > 0. \tag{2.59}$$

При этом, согласно (2.6), (2.8) и (2.56), для $j = 1, 2$ справедливы соотношения $\lim_{\lambda\to-\infty} s_j(\sqrt{\lambda}) = +\infty$, $\lim_{\lambda\to-\infty} g_j(\sqrt{\lambda}) = -\infty$ и, значит (см. (2.57), (2.58)), выполняются неравенства $C_j > 0$, $\tilde{C}_j < 0$, $j = 1, 2$. Тогда на основании (2.57) – (2.59) получаем (см. доказательство теоремы 1 гл. 7.1 из [22]), что вещественные мероморфные функции

$$-\frac{s_j(\sqrt{\lambda}, a)}{g_j(\sqrt{\lambda})} = -\frac{C_j}{\tilde{C}_j}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\nu_k^{(j)2}}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\tau_k^{(j)}}\right)^{-1}, \quad j = 1, 2,$$

являются функциями Неванлинны:

$$\operatorname{Im}\frac{s_j(\sqrt{\lambda}, a)}{g_j(\sqrt{\lambda})} < 0, \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{2.60}$$

В свою очередь, из (2.60) следует, что

$$\operatorname{Im}\frac{\phi(\sqrt{\lambda})}{s_1(\sqrt{\lambda})\,s_2(\sqrt{\lambda})} = \operatorname{Im}\left(\frac{g_1(\sqrt{\lambda})}{s_1(\sqrt{\lambda},a)} + \frac{g_2(\sqrt{\lambda})}{s_2(\sqrt{\lambda},a)}\right) > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

и, значит, функция $F(\lambda)$ из (2.55) является функцией Неванлинны.

Теорема доказана.

***Следствие* 2.4.** *Имеет место чередование*

$$\zeta_1^2 \le \xi_1^2 \le \zeta_2^2 \le \xi_2^2 \le \ldots . \tag{2.61}$$

Доказательство. Для доказательства (2.61) можно считать, не уменьшая общности, что $\zeta_k^2 > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда, так как $\lim_{\lambda\to-\infty}\phi(\sqrt{\lambda}) = -\infty$, аналогично (2.58), (2.59) имеет представление

$$\phi(\sqrt{\lambda}) = C\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_k^2}\right), \qquad \zeta_k^2 > 0, \quad C < 0.$$

Значит, согласно теореме 2.3 мероморфная вещественная функция

$$\frac{C}{C_1 C_2}\,\frac{s_1(\sqrt{\lambda})\,s_2(\sqrt{\lambda})}{\phi(\sqrt{\lambda})} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\xi_k^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_k^{(j)2}}\right)^{-1}$$

является функцией Неванлинны и по теореме 1 [22] (гл. 7.1) получаем (2.61).

Следствие доказано.

3. Обратная задача. Рассмотрим задачу восстановления потенциалов $q_1(x)$ и $q_2(x)$ краевой задачи (1.1) – (1.3). В качестве исходных данных рассматриваются вещественные последовательности $\{\pm\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\pm\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\pm\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$, где первая последовательность совпадает с собственными значениями спектральной задачи (1.1) – (1.3), а остальные две определяют собственные значения задач Дирихле (1.4) при $j = 1$ и $j = 2$.

Теорема 3.1. *Пусть заданы три последовательности положительных чисел* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\nu_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2$, *для которых выполняются следующие условия*:

1) *правильно занумерованные, монотонно возрастающие и не пересекающиеся между собой последовательности* $\{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ *допускают представления*

$$\nu_k^{(j)} = \frac{\pi k}{a} + \frac{A_j}{\pi k} + \frac{\beta_k^{(j)}}{k}, \qquad \{\beta_k^{(j)}\}\in l_2, \quad j = 1, 2, \tag{3.1}$$

где A_j *— вещественные постоянные*;

2) *последовательность* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *представима в виде объединения*

$$\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\rho_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty} \cup \{\rho_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\rho_k^{(3)}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\rho_k^{(4)}\}_{k=1}^{\infty}$$

четырех правильно занумерованных монотонно возрастающих подпоследовательностей, удовлетворяющих равенствам (2.20), (2.21) *с последовательностями* $\{\beta_k^{(j)}\}\in l_2$, $j = 1, 2, 3, 4$;

3) *последовательность* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и правильно занумерованная последовательность* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ *перемежаются*:

$$0 < \zeta_1 < \xi_1 < \zeta_2 < \xi_2 < \ldots ; \tag{3.2}$$

4) *при* $k = 1, 2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$\frac{\upsilon(\nu_{2k-1}^{(1)})}{s_2(\nu_{2k-1}^{(1)})} > 4, \qquad \frac{\upsilon(\nu_{2k-1}^{(2)})}{s_1(\nu_{2k-1}^{(2)})} > 4, \tag{3.3}$$

где функции

$$s_j(\lambda) = a\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{\pi^2 k^2}(\nu_k^{(j)2} - \lambda^2)\right), \quad j = 1, 2,$$

$$\upsilon(\lambda) = 16(\lambda^2 - (\rho_0^{(1)})^2)\prod_{j=1}^{4} P_j(\lambda) \tag{3.4}$$

и

$$P_j(\lambda) = \frac{a}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2\pi k}\right)^2(\rho_k^{(j)2} - \lambda^2), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$P_4(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2\pi(k - 1/2)}\right)^2(\rho_k^{(4)2} - \lambda^2); \tag{3.5}$$

5) *для последовательностей*

$$\upsilon_{1,k} := \frac{\upsilon(\nu_k^{(1)})}{s_2(\nu_k^{(1)})}, \qquad \upsilon_{2,k} := \frac{\upsilon(\nu_k^{(2)})}{s_1(\nu_k^{(2)})}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

справедливы включения

$$\left\{k^2\left(\upsilon_{j,k} - 2(1-(-1)^k)\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \in l_1, \quad j = 1, 2. \tag{3.6}$$

Тогда существует такая пара вещественных функций $q_1(x)$ *и* $q_2(x)$ *из* $L_2(0, a)$, *что спектральная задача* (1.1) – (1.3) *имеет собственными значениями числа* $\pm\zeta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *а собственные значения задач Дирихле* (1.4) *совпадают с числами* $\pm\nu_k^{(1)}$ *и* $\pm\nu_k^{(2)}$ *соответственно.*

***Замечание* 3.1.** Нетрудно показать, что эквивалентная формулировка условия (3.6) состоит в том, что выполняются включения

$$\left\{k\left(X_{j,k} - (-1)^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \in l_2, \qquad j = 1, 2,$$

где $X_{j,k}$ является произвольно выбранным корнем квадратного уравнения

$$X_{j,k}^2 + (\upsilon_{j,k} - 2)X_{j,k} + 1 = 0, \quad j = 1, 2. \tag{3.7}$$

При этом имеют место неравенства

$$\upsilon_{j,2n-1} - 2 > 2, \qquad \upsilon_{j,2n} < 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \tag{3.8}$$

и корни квадратных уравнений (3.7) являются отрицательными при нечетных значениях индекса k и положительными при четных k:

$$(-1)^k X_{j,k} > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2. \tag{3.9}$$

Для нечетных k неравенства (3.8) вытекают из условий (3.3), а для четных значений k неравенства (3.8) следуют из определений (3.4), (3.5) и условия перемежаемости (3.2).

***Доказательство теоремы* 3.1.** Отметим, что функции $\lambda P_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, и $P_4(\lambda)$ являются функциями типа синуса экспоненциального типа $\le a/2$, причем справедливы представления

$$\lambda P_j(\lambda) = \sin\lambda b - \frac{A_j}{2\lambda}\cos\lambda b + \frac{\tilde{f}_j(\lambda)}{\lambda}, \quad j = 1, 2, 3,$$
$$P_4(\lambda) = \cos\lambda b + \frac{A_3}{2\lambda}\sin\lambda b + \frac{\tilde{f}_4(\lambda)}{\lambda}, \quad b = \frac{a}{2}, \tag{3.10}$$

где постоянная $A_3 = (A_1 + A_2)/2$ и функции $\tilde{f}_j \in \mathcal{L}^{a/2}$. Эти утверждения вытекают из условия 2 (см. (2.20), (2.21)), определений (3.5), следствия 1 и леммы 5 из [23] (см. замечание 1). Аналогично (см. также лемму 3.4.2 в [19]), функции $s_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, являются функциями типа синуса экспоненциального типа $\le a$ и допускают представления

$$s_j(\lambda) = \frac{\sin\lambda a}{\lambda} - \frac{A_j\cos\lambda a}{\lambda^2} + \frac{f_j(\lambda)}{\lambda^2}, \quad j = 1, 2, \quad f_j(\lambda) \in \mathcal{L}^a.$$

Из каждой пары корней квадратных уравнений (3.7) произвольным образом выберем по одному элементу и обозначим их через $X_{1,k}$, $X_{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Введем при $j = 1, 2$ в рассмотрение последовательности

$$b_k^{(j)} = \nu_k^{(j)}\left(X_{j,k} - \cos\nu_k^{(j)}a - \frac{A_j\sin\nu_k^{(j)}a}{\nu_k^{(j)}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.11}$$

В силу условий (3.1) и (3.6) (см. замечание 3.1) справедливы включения $\{b_k^{(j)}\} \in l_2$, $j = 1, 2$. С другой стороны, так как функция $\lambda s_j(\lambda) \in \mathcal{L}^a$ является функцией типа синуса, интерполяционный ряд Лагранжа

$$\psi_j(\lambda) = 2\lambda s_j(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k^{(j)}}{s_j'(\nu_k^{(j)})(\lambda^2 - \nu_k^{(j)2})}, \tag{3.12}$$

построенный по последовательности $\{\pm b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, определяет функцию $\psi_j \in \mathcal{L}^a$ (см. [24], теорема А). По этой функции определим четную целую функцию

$$c_j(\lambda) = \cos\lambda a + \frac{A_j\sin\lambda a}{\lambda} + \frac{\psi_j(\lambda)}{\lambda}, \quad j = 1, 2, \tag{3.13}$$

и обозначим ее корни через $\pm\mu_k^{(j)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Согласно лемме 3.4.2 из [19], примененной к интервалу $(0, a)$, справедливо равенство

$$\mu_k^{(j)} = \frac{\pi(k - 1/2)}{a} + \frac{A_j}{\pi k} + \frac{\beta_k^{(j)}}{k}, \quad k \ge 1, \quad \{\beta_k^{(j)}\} \in l_2. \tag{3.14}$$

Докажем, что последовательность $\{(\mu_k^{(j)})^2\}$ является вещественной и строго перемежается с последовательностью $\{(\nu_k^{(j)})^2\}$:

$$(\mu_1^{(j)})^2 < (\nu_1^{(j)})^2 < (\mu_2^{(j)})^2 < \ldots, \tag{3.15}$$

при этом, для определенности, ограничимся значением индекса $j = 1$. Рассмотрим значения функции $c_1(\lambda)$ в точках $\nu_k^{(1)}$. Непосредственно из определения (3.12) следуют равенства $\psi_1(\nu_k^{(1)}) = b_k^{(1)}$ и, значит (см. определение (3.11)), $c_1(\nu_k^{(1)}) = X_{1,k}$, откуда с учетом (3.9) получаем неравенства

$$(-1)^k c_1(\nu_k^{(1)}) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.16}$$

Тогда утверждение (3.15) вытекает из (3.16), (3.14) и условия (3.1). При этом если $c_1(0) > 0$, то $\mu_1^{(1)} > 0$, а если $c_1(0) = 0$, то $\mu_1^{(1)} = 0$ и $\mu_1^{(1)}$ является чисто мнимым числом при условии $c_1(0) < 0$.

Из (3.15) и асимптотических формул (3.1), (3.14) следует, что последовательности $\{\nu_k^{(j)^2}\}$ и $\{\mu_k^{(j)^2}\}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.4.1 из [19], примененной на случай интервала $(0, a)$, и, следовательно, для фиксированного значения $j = 1, 2$ существует единственная вещественная функция $q_j(x) \in L_2(0, a)$ такая, что $\{\pm\nu_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ является спектром задачи Дирихле (1.4), а $\{\pm\mu_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ образует спектр задачи Дирихле – Неймана (1.5). При этом алгоритм восстановления такого потенциала $q_j(x)$ состоит в следующем [19] (гл. 3, § 4). Вводится в рассмотрение ядро

$$F_j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1 - S_j(\lambda))e^{-i\lambda x}d\lambda,$$

где функция $S_j(\lambda) = e_j(\lambda)/e_j(-\lambda)$, $e_j(\lambda) = (c_j(\lambda) + i\lambda s_j(\lambda))e^{2i\lambda a}$, и по единственному решению интегрального уравнения Марченко

$$K_j(x,t) + \int_x^{\infty} K_j(x,z)F_j(z+t)dz + F_j(x+t) = 0, \quad t > x,$$

определяется потенциал $q_j(x) = -2d/dx\,K(x,x) \in L_2(0,a)$.

Докажем, что найденные потенциалы q_1, q_2 являются искомыми, т. е. спектр задачи (1.1) – (1.3), порожденной этой парой, совпадает с заданным множеством $\{\pm\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть $s_j(\lambda, x)$, $c_j(\lambda, x)$, $j = 1, 2$, — решения уравнений (1.1) с найденными потенциалами $q_j(x)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$s_j(\lambda,0) = s_j'(\lambda,0) - 1 = 0, \qquad c_j(\lambda,0) - 1 = c_j'(\lambda,0) = 0. \tag{3.17}$$

Тогда для функций $s_j(\lambda)$, $c_j(\lambda)$ (см. (3.4), (3.13)) справедливы равенства

$$s_j(\lambda) = s_j(\lambda, a), \quad c_j(\lambda) = s_j'(\lambda, a), \quad c_j(\nu_k^{(j)}, a) = \frac{1}{s_j'(\nu_k^{(j)}, a)} = \frac{1}{c_j(\nu_k^{(j)})}, \tag{3.18}$$

и, в частности, содержащиеся в представлениях (2.6), (2.7) (примененных к решениям уравнений (1.1)) величины $A_j(a, a)$ удовлетворяют равенствам

$$A_j(a,a) = A_j, \quad j = 1, 2. \tag{3.19}$$

Рассмотрим при $j = 1, 2$ последовательности

$$g_k^{(j)} = \nu_k^{(j)}\left(\frac{1}{c_j(\nu_k^{(j)})} - \cos\nu_k^{(j)}a - \frac{A_j\sin\nu_k^{(j)}a}{\nu_k^{(j)}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.20}$$

На основании условия (3.1) имеем асимптотические соотношения

$$\cos\nu_k^{(j)}a + \frac{A_j\sin\nu_k^{(j)}a}{\nu_k^{(1)}} = (-1)^k + O(1/k^2), \quad k \to \infty, \quad j = 1, 2. \tag{3.21}$$

С учетом (3.21) и (3.12), (3.13) получаем включения $\{g_k^{(j)}\} \in l_2$, $j = 1, 2$. Таким образом, ряды

$$\tilde{\psi}_j(\lambda) = 2\lambda s_j(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^{(j)}}{s_j'(\nu_k^{(j)})(\lambda - \nu_k^{(j)})} \quad j = 1, 2,$$

определяют функции из пространства $\mathcal{L}^a$. Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{c}_j(\lambda) = \cos\lambda a + \frac{A_j \sin\lambda a}{\lambda} + \frac{\tilde{\psi}_j(\lambda)}{\lambda}, \quad j = 1, 2. \tag{3.22}$$

Тогда из определений (3.12), (3.13), (3.20) получаем

$$\frac{1}{c_j(\nu_k^{(j)})} = \cos\nu_k^{(j)} a + \frac{A_j \sin\nu_k^{(j)} a}{\nu_k^{(j)}} + \frac{g_k^{(j)}}{\nu_k^{(j)}} = \tilde{c}_j(\nu_k^{(j)}),$$

откуда (см. (3.18)) имеем равенства $c_j(\nu_k^{(j)}, a) = \tilde{c}_j(\nu_k^{(j)})$, $k = 1, 2, \ldots$. Значит, функция $\hat{\psi}_j(\lambda) = c_j(\lambda, a) - \tilde{c}_j(\lambda)$ обращается в нуль в точках $\{\pm\nu_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$. С другой стороны, согласно (2.8), (3.22) функция $\hat{\psi}_j(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^a$. Отсюда следует, что $\hat{\psi}_j(\lambda) \equiv 0$ (см. теорему A из [24]), т. е.

$$c_j(\lambda, a) = \tilde{c}_j(\lambda), \quad j = 1, 2. \tag{3.23}$$

Используя (3.18), (3.23), для функции $\phi(\lambda)$, определенной согласно выражению (2.17), получаем равенство

$$\phi(\lambda) = (2 - \tilde{c}_1(\lambda) - c_1(\lambda)) s_2(\lambda) + (2 - \tilde{c}_2(\lambda) - c_2(\lambda)) s_1(\lambda). \tag{3.24}$$

Тогда в силу (3.18) имеем

$$\phi(\nu_k^{(1)}) = \left(2 - \tilde{c}_1(\nu_k^{(1)}) - c_1(\nu_k^{(1)})\right) s_2(\nu_k^{(1)}) = \left(2 - c_1(\nu_k^{(1)})^{-1} - c_1(\nu_k^{(1)})\right) s_2(\nu_k^{(1)}). \tag{3.25}$$

Далее, используя равенство (см. (3.11), (3.12))

$$c_1(\nu_k^{(1)}) = \cos\nu_k^{(1)} a + \frac{A_1 \sin\nu_k^{(1)} a}{\nu_k^{(1)}} + \frac{b_k}{\nu_k^{(1)}},$$

(3.7), а также равенства $c_1(\nu_k^{(1)}) = X_{1,k}$, получаем

$$\frac{\upsilon(\nu_k^{(1)})}{s_2(\nu_k^{(1)})} = 2 - X_{1,k} - X_{1,k}^{-1} = 2 - c_1(\nu_k^{(1)}) - c_1^{-1}(\nu_k^{(1)}). \tag{3.26}$$

Подставляя (3.26) в (3.25), имеем $\phi(\nu_k^{(1)}) = \upsilon(\nu_k^{(1)})$. Аналогично доказывается справедливость равенств $\phi(\nu_k^{(2)}) = \upsilon(\nu_k^{(2)})$. Таким образом, функция $\lambda^2(\phi(\lambda) - \upsilon(\lambda))$ обращается в нуль в корнях функции $\lambda^2 s_1(\lambda) s_2(\lambda)$, которая является функцией типа синуса и имеет экспоненциальный тип $\leq 2a$.

Подставляя (3.10) в (3.4), легко получаем

$$\lambda^2 \upsilon(\lambda) - 16\lambda \sin^3\lambda b \cos\lambda b + 8A_3 \sin^2\lambda b\,(3\cos^2\lambda b - \sin^2\lambda b) \in \mathcal{L}^{2a},$$

и, сравнивая это включение с (2.19), заключаем, что $\lambda^2(\phi(\lambda) - \upsilon(\lambda)) \in \mathcal{L}^{2a}$, а значит, $\phi(\lambda) = \upsilon(\lambda)$. Это означает, что построенные потенциалы $q_j(x)$ порождают задачу (1.1) – (1.3), спектр которой совпадает с исходным множеством $\{\zeta_k\}_{-\infty}^{\infty}$.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.2.** Найденная пара $q_1(x)$ и $q_2(x)$ не является единственной из-за произвола в выборе чисел $b_k^{(j)}$ из пар корней квадратных уравнений (3.7) (см. (3.11)). Этот факт аналогичен ситуации, возникающей при решении задачи восстановления потенциала уравнения Штурма – Лиувилля по спектрам периодической и антипериодической задач [19] (гл. 3, § 4).

Аналогичным образом доказывается более общее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть заданы три последовательности положительных чисел* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\nu_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2$, *для которых выполняются условия* 1, 2 *теоремы* 3.1, *а вместо условий* 3 – 5 *выполняются условия*:

$3'$) *правильно занумерованные последовательности* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *перемежаются в нестрогом смысле*: $0 < \zeta_1 \le \xi_1 \le \zeta_2 \le \ldots$;

$4'$) *пусть функции* $\upsilon(\lambda)$, $s_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, *определены согласно* (3.4); *если* $\nu_{2k-1}^{(1)} \notin \{\nu_p^{(2)}\}_{p=1}^{\infty}$ $\left(\nu_{2k-1}^{(2)} \notin \{\nu_p^{(1)}\}_{p=1}^{\infty}\right)$, *то выполняется первое* (*второе*) *из неравенств* (3.3); *при* $\nu_{2k-1}^{(1)} = \nu_{2p-1}^{(2)} = \nu$ *имеет место неравенство*

$$\frac{\upsilon'(\nu)}{s_1'(\nu) + s_2'(\nu)} \ge 4,$$

при $\nu_{2k-1}^{(1)} = \nu_{2p}^{(2)} = \nu$ $\left(\nu_{2k}^{(1)} = \nu_{2p-1}^{(2)} = \nu\right)$ — *неравенство*

$$\frac{\upsilon'(\nu)}{s_2'(\nu)} \ge 4 \qquad \left(\frac{\upsilon'(\nu)}{s_1'(\nu)} \ge 4\right);$$

$5'$) *справедливы включения* (3.6), *где* $\{\upsilon_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2$, *имеют вид*

$$\upsilon_{1,k} = \frac{\upsilon(\nu_k^{(1)})}{s_2(\nu_k^{(1)})}, \quad \nu_k^{(1)} \notin \{\nu_p^{(2)}\}_{p=1}^{\infty}, \quad \upsilon_{2,k} = \frac{\upsilon(\nu_k^{(2)})}{s_1(\nu_k^{(2)})}, \quad \nu_k^{(2)} \notin \{\nu_p^{(1)}\}_{p=1}^{\infty},$$

$$\upsilon_{1,2k-1} = \upsilon_{2,2p-1} = \frac{\upsilon'(\nu)}{s_1'(\nu) + s_2'(\nu)} \quad \textit{при} \quad \nu_{2k-1}^{(1)} = \nu_{2p-1}^{(2)} = \nu,$$

$$\upsilon_{1,2k} = \upsilon_{2,2p} = \frac{\upsilon'(\nu)}{s_1'(\nu) + s_2'(\nu)} \quad \textit{при} \quad \nu_{2k}^{(1)} = \nu_{2p}^{(2)} = \nu,$$

$$\upsilon_{1,2k-1} = \frac{\upsilon'(\nu)}{s_2'(\nu)}, \quad \upsilon_{2,2p} = 0 \quad \textit{при} \quad \nu_{2k-1}^{(1)} = \nu_{2p}^{(2)} = \nu,$$

$$\upsilon_{1,2k} = 0, \quad \upsilon_{2,2p-1} = \frac{\upsilon'(\nu)}{s_1'(\nu)} \quad \textit{при} \quad \nu_{2k}^{(1)} = \nu_{2p-1}^{(2)} = \nu.$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 3.1.

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 3.1 с тем отличием, что здесь коэффициенты $\upsilon_{j,k}$ квадратных уравнений (3.7) определяются выражениями из условия $5'$. Если $A_1 \ne A_2$, то согласно (3.1) последовательности $\{\upsilon_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2$, определенные в условии 5 теоремы 3.1 и условии $5'$ теоремы 3.2, могут отличаться между собой лишь конечным числом элементов.

***Замечание* 3.3.** Условия теоремы 3.2, за исключением условия 2, являются не только достаточными, но и необходимыми для решения задачи о восстановлении вещественных потенциалов $q_j \in L_2(0, a)$, $j = 1, 2$, краевой задачи (1.1) – (1.3) с положительным спектром. А именно, согласно теореме 2.2, при $A_1 \ne A_2$ условие 2 является необходимым, а при $A_1 = A_2$ — близким к необходимому. При этом остальные условия теоремы 3.2 являются необходимыми. Так, условие 1 является необходимым в силу следствия 2.2, условие $3'$ — в силу следствия 2.4, условие $4'$ — в силу леммы 2.2. Необходимость условия $5'$ выводится на основании следствия 2.3 и формулы (2.17). Заметим, что из условия $3'$ следует, что при $\nu_{2k}^{(1)} = \nu_{2p}^{(2)} = \nu$ выполняется неравенство $\upsilon'(\nu) \le 0$.

1. *Герасименко Н. И., Павлов Б. С.* Задача рассеяния на некомпактном графе // Теор. и мат. физика. – 1988. – **74**. – С. 345 – 359.
2. *Gratus J., Lambert C. J., Robinson S. J., Tucker R. W.* Quantum mechanics on graphs // J. Phys. A. – 1994. – **27**. – P. 6881 – 6892.
3. *Exner P.* Weakly coupled states on branching graphs // Lett. Math. Phys. – 1996. – **38**. – P. 313 – 320.
4. *Exner P.* Magnetoresonances on a lasso graph // Found. Phys. – 1997. – **27**. – P. 171 – 190.
5. *Carlson R.* Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – **351**, № 10. – P. 4069 – 4088.
6. *Exner P., Seresova E.* Appendix resonances on a simple graph // J. Phys. A. – 1994. – **27**. – P. 8269 – 8278.
7. *Melnikov Yu. B., Pavlov B. S.* Two-body scattering on a graph and application to simple nano-electronic devices // J. Math. Phys. – 1995. – **36**. – P. 2813 – 2838.
8. *Melnikov Yu. B., Pavlov B. S.* Scattering on graphs and one-dimensional approximations to *N*-dimensional Schrödinger operators // Ibid. – 2001. – **42**. – P. 1202 – 1228.
9. *Kuchment P.* Quantum graphs I. Some basic structures // Wave in Random Media. – 2004. – **14**. – P. 107 – 128.
10. *von Below J.* Can one hear the shape of a network ? // Part. Different. Equat. Multistructures. Lect. Notes Pure Math. – 2001. – **219**. – P. 19 – 36.
11. *Gutkin B., Smilansky U.* Can one hear the shape of a graph ? // J. Phys. A. – 2001. – **34**, № 31. – P. 6061 – 6068.
12. *Kurasov P., Stenberg F.* On the inverse scattering problem on branching graphs // Ibid. – 2002. – **35**, № 1. – P. 101 – 121.
13. *Герасименко Н. И.* Обратная задача теории рассеяния на некомпактном графе // Теор. и мат. физика. – 1988. – **75**. – С. 187 – 200.
14. *Pivovarchik V.* Scattering in a loop-shaped waveguide // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2001. – **124**. – P. 527 – 543.
15. *Pivovarchik V.* Inverse problem for the Sturm – Liouville equation on a simple graph // SIAM J. Math. Anal. – 2000. – **32**, № 4. – P. 801 – 819.
16. *Harmer M. S.* Inverse scattering for the matrix Schrödinger operator and Schrödinger operator on graphs with general self-adjoint boundary conditions // ANZIAM J. – 2002. – **44**, № 1. – P. 161 – 168.
17. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния. – Харьков: Харьков. ун-т, 1960. – 268 с.
18. *Бондаренко Е. И., Рофе-Бекетов Ф. С.* Обратная задача рассеяния на полуоси для системы с треугольным матричным потенциалом // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2003. – **10**, № 3. – С. 412 – 424.
19. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
20. *Pivovarchik V.* An inverse Sturm – Liouville problem by three spectra // Integral Equat. and Operator Theory. – 1999. – **34**. – P. 234 – 243.
21. *Кац И. С., Крейн М. Г.* *R*-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя // Дополнение 1 к кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 750 с.
22. *Levin B. Ya.* Distribution of zeroes of entire functions. – Providence: Amer. Math. Soc., 1980. – 523 p.
23. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* О малых возмущениях множества корней функции типа синуса // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1979. – **43**, № 1. – С. 87 – 110.
24. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды компонент // Там же. – 1975. – **39**, № 3. – С. 657 – 702.

Получено 29.03.07