УДК 517.5

Б. В. Винницкий

О полноте системы $\{f(\lambda_n z)\}$

Пусть f — целая функция с тейлоровскими коэффициентами f_n, A_R — пространство функций, аналитических в круге $|z| < R$ с обычной топологией, $A'_R[f]$ — сопряженное к A_R пространство, реализованное как пространство целых функций g, для которых $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g_n/f_n|} < R$ (его можно так реализовать, если все $f_n \neq 0$, что далее всегда будет выполняться). Пусть, далее, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество различных комплексных чисел λ_n таких, что $0 \leqslant |\lambda_n| \nearrow \infty$. Скажем, что $f \in \pi_R$, если существует множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такое, что система $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в A_R. Пусть $f \in \pi_R$. Будем говорить, что $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[\pi_R]$, если система $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в A_R. Очевидно, система $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в A_R тогда и только тогда, когда $f \in \pi_R$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[\pi_R]$. Непосредственно из известного критерия полноты [1, с. 276] вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы $f \in \pi_R$, $0 < R \leqslant \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все $f_n \neq 0$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in \pi_R$, $0 < R \leqslant \infty$. Для того чтобы $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[\pi_R]$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ было множеством единственности для $A'_R[f]$, т. е. чтобы из соотношений $g \in A'_R[f]$ и $g(\lambda_n) = 0$ вытекало $g = 0$ $\forall n \geqslant 1$.*

Далее для простоты будем считать $\lambda_n \neq 0$ $\forall n \geqslant 1$. Пусть $n(t) = \sum\limits_{|\lambda_n| \leqslant t} 1$, $N(r) = \int\limits_0^r n(t)\, d\ln t$, а $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Ввиду бедности свойств полных систем, в общей ситуации нельзя, вероятно, получить более обозримого описания $\Lambda_f[\pi_R]$, чем это сделано в теореме 2. Как следует из критерия полноты и неравенства Иенсена, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[\pi_R]$, если для всякого $R_1 \in (0; R)$ существует последовательность $r_n \uparrow \infty$ такая, что $N(r_n) \geqslant \ln M_f(R_1 r_n)$ (см. [2]). Укажем достаточные условия для того, чтобы $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[\pi_R]$ в терминах f_n.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \pi_R$, $0 < R \leqslant \infty$. *Тогда* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[\pi_R]$, *если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k|} \leqslant 1/R. \tag{1}$$

Пусть $U_\gamma[\Lambda]$ — класс целых функций g, для которых

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k|} < \gamma.$$

Для доказательства теоремы 3 будет нужна лемма.

Лемма. *Если* $g \in U_1[\Lambda]$ *и* $g(\lambda_n) = 0 \quad \forall n \geqslant 1$, *то* $g = 0$.

Доказательство. Пусть φ — целая функция, тейлоровские коэффициенты φ_n которой определены так: $\varphi_n = \left|\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right|^{-1}$, $\varphi_0 \overset{\text{df}}{=} 1$, а $\mu_f(r) = \max_{n\geqslant 0}\{|f_n| r^n\}$ и $\varkappa_n(\varphi) = |\varphi_{n-1}/\varphi_n|$. Поскольку $\varkappa_n(\varphi) = |\lambda_n| \nearrow \infty$, то [3, с. 13]

$$\ln \mu_\varphi(r) = \sum_{\varkappa_n(\varphi)\leqslant r} \ln(r/\varkappa_n(\varphi)) = \sum_{|\lambda_n|\leqslant r} \ln(r/|\lambda_n|). \tag{2}$$

Известно [4, с. 28], что

$$N(r) = \sum_{|\lambda_n|\leqslant r} \ln(r/|\lambda_n)|. \tag{3}$$

Предположим, что существует $g \in U_1[\Lambda]$ такая, что $g(\lambda_n) = 0 \ \forall n \geqslant 1$ и $\forall g \neq 0$. Тогда из (2), (3) и неравенства Иенсена [4, с. 50] получаем

$$\ln \mu_\varphi(r) = N(r) \leqslant \ln M_g + \text{const}. \tag{4}$$

Поскольку $g \in U_1[\Lambda]$, то для некоторого $\gamma_1 \in (0; 1)$ при $n \geqslant n_0$ выполняется $|g_n| \leqslant |\varphi_n| \gamma_1^n$, т. е. $M_g(r) \leqslant K\mu_4((1+\varepsilon)r)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно, а $K = K(\varepsilon) < \infty$ — постоянная. Получаем противоречие с (4). Лемма доказана.

Предположим, что (1) выполняется, а система $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ не полна в A_R. Тогда найдется (см. теорему 2) целая функция $g \in A_R'[f|$ такая, что $g \neq 0$ и $g(\lambda_n) = 0 \quad \forall n \geqslant 1$. Таким образом, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k|} \leqslant \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g_n/f_n|}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k|} < 1$, что противоречит лемме.

Следствие. *Пусть целая функция f удовлетворяет условию*

$$0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_n \ldots, \qquad \varkappa \overset{\text{df}}{=} |f_{n-1}/f_n|. \tag{5}$$

Тогда $\{f(\varkappa_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ *полна в* A_1. *Если, кроме того,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \varkappa_{n-1}/\varkappa_n < 1. \tag{5'}$$

то эта система не полна в A_R *ни при каком* $R > 1$.

Для получения из теоремы 3 первой части следствия достаточно заметить, что $|f_n| = |f_0| / \prod_{k=1}^{n} \varkappa_k, \quad n \geqslant 1$. Вторая часть следствия вытекает, например, из теоремы 2, теоремы об f-типе [5] и установленной в [6] оценки $M_g(r) \leqslant O(1) M_f(r)$ для целой функции

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\varkappa_k). \tag{6}$$

Отметим, что если условие (5′) не выполняется, то система $\{f(\varkappa_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ может быть полной и в пространствах A_R, $R > 1$. Так, если $f(z) = e^z$, то $\varkappa_n = n$, между тем известно, что $\{e^{nz}\}_{n=1}^{\infty}$ полна в A_π (см. [1]).

Учитывая отмеченное выше свойство функции (6), лемму можем сформулировать так.

Теорема 4. *Множество $U_1[\Lambda]$ является классом единственности интерполяционной задачи Ньютона. Множество $U_\gamma[\Lambda]$ не является, вообще говоря, классом единственности ни при каком $\gamma > 1$.*

В связи с этим приведем следующее утверждение, дополняющее известный результат Келдыша — Ибрагимова [4, с. 248].

Теорема 5. *Множество $U_{1/2}[\Lambda]$ является классом сходимости интерполяционной задачи Ньютона. Множество $U_\gamma[\Lambda]$ ни при каком $\gamma > 1/2$ не является, вообще говоря, классом сходимости.*

Доказательство. Нам нужно показать, что каждая функция $F \in U_{1/2}[\Lambda]$ разлагается в сходящийся в топологии A_∞ ряд Ньютона

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(z), \tag{7}$$

где $\alpha_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|t|=r_n^* > \lambda_{|n+1|}} F(t)\,dt/P_{n+1}(t)$, а $P_n(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k)$. Для остатка $R_n(z)$ ряда (7) справедлива формула [4, с. 248]

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r_n > \max\{|\lambda_n|; |z|\}} P_n(z)\,F(t)\,dt/P_n(t)(t - z). \tag{8}$$

Очевидно, существует $K = K(\varepsilon, r) < \infty$ такое, что при всех $n \geqslant 1$

$$M_{P_n}(r) \leqslant K(1+\varepsilon)^n \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k|. \tag{9}$$

По теореме об f-типе [5] при некотором q_1, $0 < q_1 < 1/2$, имеем $M_F(R) \leqslant K_1 \mu_\varphi(q_1 r)$, где $K_1 < \infty$ не зависит от R. Поэтому, в силу (2),

$$M_F(|\lambda_n|/q_1) \leqslant K_1 \mu_\varphi(|\lambda_n|) = K_1 |\lambda_n|^n / \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k|. \tag{10}$$

Далее,

$$\min_{|t|=|\lambda_n|/q_1} |P_n(t)| \geqslant (|\lambda_n|(1 - q_1)/q_1)^n. \tag{11}$$

Поэтому, взяв в (8) $r_n = |\lambda_n|/q_1$, из (9) — (11) получаем $M_{R_n}(r) \leqslant K_2 (q_1(1 + \varepsilon)/(1 - q_1))^n$, где $K_2 < \infty$ не зависит от n. Так как $q_1/(1 - q_1) < 1$, а $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $M_{R_n}(r) \to 0$ при $n \to \infty$ и любом фиксированном $r \in [0; \infty)$. Первая часть теоремы 5 доказана. Для доказательства второй части достаточно показать, что $\forall \gamma > 1/2$ существует последовательность (λ_n) и функция $F \in U_\gamma[\Lambda]$ такие, что ряд (7) расходится. Пусть $1/2 < \theta < \gamma$, $1/2 < \theta_1 < \sqrt{\theta/2}$, $\nu_k = 2^{k^2}$, $\eta_k = (\theta/\theta_1)^k$ и $\lambda_n = \eta_{k+1}$ при $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k < n \leqslant \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k+1}$. Тогда, как показано в [4, с. 251], существует целая функция F, для которой при некоторых $q > 1$ и $K < \infty$ выполняется

$$M_F(\eta_{k+1}/\theta) \leqslant K q^{(k+1)^2 \nu_{k-1}}, \quad k \geqslant 1, \tag{12}$$

а ряд (7) расходится. Для этой функции F из (12) и неравенств Коши получаем $|F_n|(\lambda_n/\theta)^n \leqslant M_F(\lambda_n/\theta) = M_F(\eta_{k+1}/\theta) \leqslant K q^{(k+1)^2 \nu_{k-1}} \leqslant K q^{((k+1)^2 \nu_{k-1}/\nu k) n}$.

Следовательно, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|F_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k|} \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|F_n \lambda_n^n|} \leqslant \theta < \gamma$, т.е. $F \in U_\gamma[\Lambda]$.

Теорема 5 доказана.

Отметим, что в приведенном выше примере узлы интерполяции кратные (первая часть теоремы 5 справедлива и для таких λ_n). Немного изменив конструкцию из [4], можно получить аналогичный пример с простыми узлами.

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 532 с.
2. *Винницкий Б. В.* О представлении функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 3, с. 256—265.
3. *Полиа Г.*, *Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2.— М.: Наука, 1978.— 431 с.
4. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения.— М.: Наука, 1971.— 520 с.
5. *Винницкий Б. В.* Об условиях сходимости последовательностей в некоторых пространствах аналитических функций.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 6, с. 741—744.
6. *Винницкий Б. В.* О рядах по системе $\{f(\lambda_n z)\}$.— Мат. заметки, 1981, **29**, № 4, с. 503—516.

Дрогобыч. пед. ин-т

Поступила 12.04.83