УДК 517.5

Ю. Т. Борщ

Значения некоторых интегралов

В данной статье впервые вычислены два несобственных интеграла Подынтегральная функция в интеграле 4.116.3 из [3, с. 530] (см. также интеграл 2.5.47.8 в [4, с. 470]) при $x=0$ имеет вид $O(1/x^2)$. Поэтому указанный интеграл вычислен неправильно в [3] (см., например, [5, с. 588]). С учетом вышеуказанного находим, что он равен

$$\int_0^\infty x^{-1} \operatorname{cth} \beta x \cos axdx = \infty. \tag{1}$$

При этом параметр a может принимать любое значение, лежащее на всей действительной числовой оси, т. е. $-\infty < a < \infty$.

Интеграл 4.117.5 в [3, с. 530]; 2.5.51.19 в [4, с. 474] приведен с ошибкой. Этот вывод подтверждается простым качественным анализом. Действительно, в формуле 4.117.5 [3] правая часть при $a \to 0$ равна нулю. В то же время левая часть в указанной формуле имеет порядок $\ln\infty$ при $a\to 0$, так как подынтегральная функция при $x\to\infty$ имеет оценку $O(1/x)$. Правильное значение интеграла 4.117.5 из [3] дано в [2, с. 39]:

$$\int_0^\infty x(1+x^2)^{-1} \operatorname{th}(\pi x/2) \cos axdx = -ae^{-a} - \operatorname{ch} a \ln(1-e^{-2a}), \qquad t>0. \tag{2}$$

Уточним результат работы [2].

Рассмотрим функцию

$$\gamma(t) = e^{-t}/\pi + (2/\pi)\sum_{n=1}^\infty e^{-t(2n+1)}/n - (1/\pi)\sum_{n=1}^\infty e^{-t(2n+1)}/n(n+1) -$$
$$- (2/\pi)\int_0^\infty \tau(1+\tau^2)^{-1} \operatorname{th}(\pi\tau/2)\cos\tau t d\tau. \tag{3}$$

С учетом формул 3.273.2 и 3.944.12 из [3, с. 420 и 504], 5.1.26.1 и 5.2.5.2 из [4, с. 688 и 700].

$$e^{-ta} = (2/\pi)\int_0^\infty a(a^2+\tau^2)^{-1}\cos\tau t d\tau, \qquad t>0; \tag{4}$$

$$te^{-t} = (2/\pi)\int_0^\infty (1-\tau^2)(1+\tau^2)^{-2}\cos\tau t d\tau, \qquad t>0; \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^\infty 1/(\tau^2+(2n+1)^2) = \pi \operatorname{th}(\pi\tau/2)/4\tau - 1/(1+\tau^2); \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^\infty 1/n(n+1)(\tau^2+(2n+1)^2) = (5+\tau^2)(1+\tau^2)^{-2} -$$
$$- \pi \operatorname{th}(\pi\tau/2)\tau^{-1}(1+\tau^2)^{-1} \tag{7}$$

функция $\gamma(t)$ примет вид

$$\gamma(t) = 2te^{-t}/\pi. \tag{8}$$

Подчеркнем, что при выводе из (3) формулы (8) были переставлены (см. [5, с. 440]) операции $\int\limits_0^\infty$, $\sum\limits_{n=1}^\infty$, так как в формулах (4)— (7) интегралы и ряды сходятся равномерно при $t > 0$. Отметим также, что формула (5) получена из формулы 3.944.12 [3, с. 504] с использованием взаимных формул интегрального преобразования Фурье.

С учетом рядов 1.448.2 из [3, с. 55], 5.2.5.2 из [4, с. 700]

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t(2n+1)}/n = -e^{-t}\ln(1-e^{-2t}), \qquad t > 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t(2n+1)}/n(n+1) = e^{-t} + 2\operatorname{sh} t\ln(1-e^{-2t}), \qquad 0 \leqslant t < \infty,$$

из формул (3), (8) получаем (2), что подтверждает результат [2].

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\theta) = -1/\pi + (1/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos 2n\theta/n(n+1) - (2/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos 2n\theta/n +$$
$$+ (2\sin\theta/\pi)\int_0^\infty \tau(1+\tau^2)^{-1}\operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{sh}^{-1}(\pi\tau/2)\,d\tau, \qquad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2. \tag{9}$$

С учетом разложения на отрезке $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ выражения

$$\operatorname{sh}\tau\theta\sin\theta = (2\tau\operatorname{ch}\tau/\pi)\left\{(1+\tau^2)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\tau^2+(2n+1)^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(-1)^n}{\tau^2+(2n-1)^2}\right]\cos 2n\theta\right\} \tag{10}$$

и интегралов (см. 3.241.5 и 3.264.2 из [3, с. 307 и 314])

$$\int_0^\infty \tau^2(\tau^2+1)^{-2}\,d\tau = \pi/4; \quad \int_0^\infty \tau^2(\tau^2+1)^{-1}[\tau^2+(2n-1)^2]^{-1}\,d\tau = \pi/4n;$$

$$\int_0^\infty \tau^2(\tau^2+1)^{-1}[\tau^2+(2n+1)^2]^{-1}\,d\tau = \pi/4(n+1)$$

после преобразования имеем

$$\varphi(\theta) = 0, \qquad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \tag{11}$$

При этом, так как ряд (10) равномерно сходится, перестановка операций интегрирования и суммирования, использованная при выводе (11), законна (см. [5, с. 440]).

С учетом рядов (см. [3, с. 52; 4, с. 729])

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos 2n\theta/n = -\ln(2\cos\theta);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos 2n\theta/n(n+1) = 1 - \theta\sin 2\theta - 2\cos^2\theta\ln(2\cos\theta)$$

из (9), (11) получаем

$$\int_0^\infty \tau(\tau^2+1)^{-1}\operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{sh}^{-1}(\pi\tau/2)\,d\tau = \theta\cos\theta - \sin\theta\ln(2\cos\theta),$$
$$-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2. \tag{12}$$

Интегралы (1), (12) вычислены, наверное, впервые, так как в очень полных справочниках [1, 3, 4] они либо не даны, либо приведены с существенными ошибками.

Пользуясь случаем, укажем, что значения одного и того же интеграла 4.117.6 в [3, с. 530] и 2.5.51.20 в [4, с. 475] не совпадают. По-видимому, точное значение указанного интеграла дано в работе [3].

1. *Абрамович М.*, *Стиган И.* Справочник по специальным функциям : С формулами, графиками и математическими таблицами.— М.: Наука, 1979.— 830 с.
2. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований : В 2-х т.— М.: Наука, 1969.— Т. 1. 343 с.
3. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.
4. *Прудников А. П.*, *Брычков Ю. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и ряды.— М.: Наука, 1981.— 798 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3-х т.— М.: Физматгиз, 1962.— Т. 2. 807 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Поступила 08.02.82,
после доработки — 19.03.84