УДК 512.54

В. И. Сенашов (Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, Красноярск, Россия)

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГРУПП ШУНКОВА*

The structure of the family of finite subgroups of the form $L_g = \langle a, a^g \rangle$ in periodic Shunkov's group is studied. As a colorraries of the result obtained, two characterizations of periodic Shunkov's groups follow.

Вивчається будова сім'ї скінченних груп вигляду $L_g = \langle a, a^g \rangle$ в періодичній групі Шункова. Як наслідок із отриманого результату випливають дві характеризації періодичних груп Шункова.

С. Н. Черников в статье [1] ввел и начал изучать класс слойно конечных групп. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* — это конечные расширения слойно конечных групп.

В настоящей работе мы изучаем бесконечные периодические группы с условием почти слойной конечности нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп. Среди таких групп можно назвать группы Новикова – Адяна [2] и группы Ольшанского [3]. Рассматривается классический вопрос: как свойства системы подгрупп влияют на свойства всей группы? Найдены условия, при которых почти слойная конечность распространяется на периодическую группу G с нормализаторов нетривиальных конечных подгрупп группы G.

В статье исследуется также класс сопряженно бипримитивно конечных групп, введенных В. П. Шунковым. В 1997 г. за такими группами закрепилось новое название: группы Шункова. Это название используется в работах А. В. Рожкова, В. И. Сенашова, А. И. Созутова, А. К. Шлепкина, L. Hammoudi и др. Ранее автором рассматривались группы Шункова при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп [4, 5] и при некоторых других дополнительных ограничениях [6 – 8]. В основной теореме этой статьи изучается строение конечных подгрупп вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ в периодических группах Шункова, и в качестве следствий получены две характеризации периодических групп Шункова.

Нам будут необходимы следующие определения и обозначения.

Группой Шункова (*сопряженно бипримитивно конечной группой*) называется группа G, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.

Группа называется *черниковской*, если она либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

Будем обозначать через $F(L)$ нормальную подгруппу наибольшего порядка группы L, являющуюся прямым произведением простых неабелевых групп.

Разрешимый радикал — максимальная нормальная разрешимая подгруппа.

Нильпотентный радикал — максимальная нормальная нильпотентная подгруппа.

Инволюция — элемент второго порядка.

Почти регулярный элемент — элемент с конечным централизатором.

*Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00576).

Почти нильпотентная группа — конечное расширение нильпотентной группы.

Локально диэдральная 2*-группа* — полупрямое произведение квазициклической 2-группы и группы порядка 2, образующий которой инвертирует все элементы квазициклической 2-группы.

$O_{p'}(G)$ — максимальная периодическая нормальная подгруппа группы G, не содержащая p-элементов; $R(H)$ — максимальная нормальная слойно конечная подгруппа группы H; $\pi(G)$ — множество простых делителей порядков элементов группы G; $\pi(c)$ — множество простых делителей числа c.

В следующей теореме изучается строение семейства конечных подгрупп вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ в периодической группе Шункова при условии почти слойной конечности нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп. Отметим, что при условиях теоремы силовская 2-подгруппа является черниковской.

Теорема. *Пусть G — периодическая группа Шункова, причем $2 \in \pi(G)$, в которой нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен, S — ее силовская* 2*-подгруппа, i — центральная инволюция из S (в случае, когда S бесконечна, i берется из полной части группы S), H — максимальная почти слойно конечная подгруппа, содержащая $C_G(i)$. Тогда либо группа G почти слойно конечна, либо справедливы следующие утверждения*:

если H — нечерниковская группа, то найдется элемент a простого порядка из H такой, что среди групп $L_g = \langle a, a^g \rangle$, $g \in G \setminus H$, бесконечно много полупростых с подгруппой $F(L_g)$, изоморфной $PSL_2(q)$, q — нечетное больше 3;

если H — черниковская группа, то в G найдутся нечерниковская подгруппа B и элемент b простого порядка из B такие, что среди групп $L_g = \langle b, b^g \rangle$, $g \in G \setminus B$, бесконечно много полупростых с подгруппой $F(L_g)$, изоморфной $PSL_2(q)$, q — нечетное больше 3.

В качестве следствий из полученного результата приведем две характеризации периодических групп Шункова.

***Следствие* 1.** *Пусть G — периодическая группа Шункова без элементов третьего порядка. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен, то группа G также почти слойно конечна.*

Доказательство. Следствие 1 при наличии в группе инволюций вытекает из теоремы данной статьи и известного факта, что группа $PSL_2(q)$ содержит элемент третьего порядка. Если в группе нет инволюций, то утверждение вытекает из теоремы 2 [6].

***Следствие* 2.** *Пусть G — периодическая группа Шункова без подгрупп вида $PSL_2(q)$. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен, то группа G также почти слойно конечна.*

Доказательство. Следствие 2 также вытекает из теоремы данной статьи и из теоремы 2 [6].

Если в формулировках следствий не требовать, чтобы группа была группой Шункова, то они теряют силу вследствие известного примера p-группы А. Ю. Ольшанского.

Предположим, что G — периодическая не почти слойно конечная группа Шункова и нормализатор любой ее нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен.

Через S обозначим некоторую силовскую 2-подгруппу из G, через i — центральную инволюцию из S (в [7] показано, что группа S является черниковской), причем если S бесконечна, то выбираем центральную инволюцию i из полной части группы S (по свойствам черниковских примарных групп в них пересечение центра и полной части нетривиально), H – максимальная почти слойно конечная подгруппа группы G, содержащая $C_G(i)$ (такая максимальная подгруппа найдется согласно лемме Цорна и теореме 1 [6]).

В силу теоремы 1 [7] будем считать, не нарушая общности рассуждений, что H не является сильно вложенной подгруппой в группу G. Отсюда по лемме 6 [7] следует, что H имеет почти регулярную инволюцию. Зафиксируем за этой инволюцией обозначение j. В силу леммы 12 [7], не нарушая общности рассуждений, можем считать, что инволюция j выбрана из подгруппы S.

Пусть K — подгруппа из H, порожденная всеми инволюциями с бесконечными централизаторами в H. Слойно конечный радикал группы H будем обозначать $R(H)$. По лемме 8 [8] K является абелевой подгруппой порядка не большего четырех.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *В группе G централизаторы инволюций почти разрешимы.*

Доказательство. Пусть t — произвольная инволюция из G. Включим ее централизатор $T = C_G(t)$, являющийся почти слойно конечным по условию теоремы, в максимальную почти слойно конечную подгруппу M из G. Если все инволюции из M имеют бесконечные централизаторы в M, то согласно леммам 4, 5 [7] M сильно вложена в G. Но эта ситуация невозможна в силу теоремы 1 [7].

Тогда в M есть почти регулярная инволюция, и отсюда по теореме Шункова [9] группа M почти разрешима.

Лемма доказана.

Пусть L — полупростая конечная группа, т. е. конечная группа, не имеющая разрешимой нормальной подгруппы. Следуя [10], обозначаем через $F(L)$ нормальную подгруппу наибольшего порядка из L, являющуюся прямым произведением простых неабелевых групп.

Лемма 2. *Подгруппа $F(L)$ любой нетривиальной полупростой конечной подгруппы L группы G является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Как следует из определения подгруппы $F(L)$, для полупростой группы L справедливо разложение $F(L) = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$, где V_k, $k = 1, \ldots, n$, — неабелева простая группа. По теореме Файта – Томпсона подгруппы V_k имеют инволюции. Используя теорему Брауэра – Судзуки [11, 12], заключаем, что каждая такая инволюция содержится в элементарной абелевой подгруппе из соответствующей простой группы. Тогда по лемме 9 из [7] $F(L) = V_1$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Группа G содержит конечное число классов сопряженных инволюций.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно и в группе G существует бесконечное множество классов сопряженных инволюций с представителями

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots,$$

взятыми по одному из каждого класса. Из сопряженно бипримитивной конечности группы G и попарной несопряженности указанных инволюций по свойствам групп диэдра следует наличие в группах вида $\langle i_j, i_1\rangle$ центральных инволюций i_{j1}.

Рассмотрим максимальную почти слойно конечную подгруппу из G, содержащую $C_G(i_1)$. В ней, очевидно, будут содержаться инволюции

$$i_{12}, i_{13}, \ldots, i_{1n}, \ldots,$$

среди которых согласно лемме 10 [7] лишь конечное число несопряженных. Будем считать, что мы сразу выбрали представителей классов сопряженных инволюций так, что все инволюции i_k, $k = 1, 2, \ldots$, сопряжены между собой, т. е.

$$i_{12} = i_{13}^{g_3} = i_{14}^{g_4} = \ldots = i_{1n}^{g_n} = \ldots.$$

Рассмотрим максимальную почти слойно конечную подгруппу из G, содержащую $C_G(i_{12})$. В ней будут содержаться инволюции $i_3^{g_3}$, $i_4^{g_4}, \ldots, i_n^{g_n}, \ \ldots$ как перестановочные с инволюцией i_{12}. Но опять среди этих инволюций лишь конечное число несопряженных. Пришли к противоречию с предположением.

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех конечных подгрупп группы G вида $L_g = \langle a, a^g\rangle$, где элемент a простого порядка p выбираем из H, если H — нечерниковская группа, и $a \in B$ — нечерниковской почти слойно конечной подгруппе, которая найдется в G по теореме 3.1 [10] и условиям теоремы, если группа H — черниковская ($g \in G \setminus H$ в первом случае и $g \in G \setminus B$ во втором). Группу B можем считать максимальной почти слойно конечной подгруппой в группе G в силу леммы 3 [7].

Вследствие бесконечности множества вариантов выбора порядка элемента a и строения почти слойно конечной группы выберем его порядок таким достаточно большим, что он не делит индекс $\left|H \colon R(H)\right|$, где $R(H)$ — слойно конечный радикал группы H в первом случае, и не делит индекс $\left|B \colon R(B)\right|$, где $R(B)$ — слойно конечный радикал группы B во втором случае. Это можно сделать вследствие строения нечерниковской почти слойно конечной группы. Во втором случае будем также предполагать, что $p \notin \pi(H)$ (это можно сделать с учетом черниковости группы H) и не делит индекс $\left|B \colon L(B)\right|$, где $L(B)$ — нильпотентный радикал группы B (B — почти нильпотентная группа по лемме 17 [7]).

Согласно лемме 11 [7] множество несопряженных элементарных абелевых подгрупп из почти слойно конечной группы с конечными централизаторами в ней конечно. Поэтому в дополнение к выбору числа p можем считать, что оно не принадлежит множеству $\cup\pi(C_B(K))$, где K пробегает все элементарные абелевы подгруппы из B, имеющие в B конечные централизаторы в случае черниковской группы H; в случае нечерниковской H число $p \notin \pi(C_H(K))$ для элементарных абелевых подгрупп K из H с конечными централизаторами в H.

Лемма 4. *В множестве $\mathfrak{M}$ бесконечно много подгрупп имеют тривиальный разрешимый радикал.*

Доказательство. Пусть сначала H — нечерниковская группа. Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g\rangle$, $g \notin H$. Предположим, что лемма неверна и разрешимый радикал в группах L_g нетривиален для всех подгрупп L_g, за исключением не более чем конечного числа подгрупп. Дальнейшие рассуждения в доказательстве леммы касаются только подгрупп L_g с нетривиальным разрешимым радикалом. Вследствие сопряженно бипримитивной конечности группы G подгруппы L_g конечны. Обозначим через P силовскую p-подгруппу из L_g, содержащую элемент a. Поскольку P, будучи конечной p-группой, имеет нетривиальный центр, выбираем элемент b простого порядка из $Z(P)$. Вследствие выбора элемента a централизатор $C_H(b)$ бесконечен. Тогда по лемме 5 [7] $C_G(b) \leq H$. Следовательно, P содержится в H.

Предположим, что P не является циклической подгруппой. Обозначим элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 из P, содержащую элемент a, через R. Рассмотрим подгруппу $O_{p'}(L_g)\lambda R$ ($O_{p'}(L_g) \neq 1$ по предположению). Согласно теореме Брауэра [13]

$$O_{p'}(L_g) \leq \big\langle C_G(r) | r \in R^{\#} \big\rangle.$$

Как отмечалось выше, элементы r из $R^{\#}$ имеют бесконечные централизаторы в H и в силу леммы 5 [7] содержатся в H вместе с $O_{p'}(L_g)$.

Проводя аналогичные рассуждения относительно подгруппы H^g вместо H и элемента a^g вместо a, видим, что $O_{p'}(L_g) < H^g$. При этом p выбран настолько большим, что в централизаторах элементов порядка p из H нет элементов с конечными централизаторами в H; для сопряженной подгруппы H^g это также справедливо.

Таким образом, $O_{p'}(L_g) < H \cap H^g$. Если $\pi(O_{p'}(L_g))$ не содержится в множестве $\pi\big(|H \colon R(H)|\big)$, то слойно конечные радикалы $R(H)$ и $R(H^g)$ подгрупп H и H^g пересекаются нетривиально и по лемме 4 [7] $H = H^g$. Вследствие максимальности подгруппы H получили противоречие с выбором элемента g.

Значит, множество $\pi(O_{p'}(L_g))$ включено в $\pi\big(|H \colon R(H)|\big)$, а поскольку последнее множество конечно, то и для $\pi(O_{p'}(L_g))$ имеется только конечное множество вариантов при различных способах выбора элемента a. Тогда, учитывая строение почти слойно конечной группы H и бесконечность множества вариантов выбора порядков элемента a, получаем бесконечность нормализатора $N_H(O_{p'}(L_g))$ для данного элемента g. Значит, $N_G(O_{p'}(L_g))$ содержится в H по лемме 4 [7] вместе с L_g. Противоречие с выбором подгруппы L_g означает, что силовские p-подгруппы в L_g циклические.

Пусть теперь H — черниковская группа. Поскольку B — почти нильпотентная группа по лемме 17 [7], она имеет вид $B = L(B) \cdot K$, где $L(B)$ — нильпотентный радикал группы B, K — ее конечная подгруппа.

Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, $g \in G \setminus B$, и предположим, что разрешимый радикал в L_g нетривиален для бесконечного множества таких подгрупп. Повторяя проведенные выше рассуждения для подгруппы B вместо H, получаем включение $O_{p'}(L_g) \leq B$. Подгруппа R содержится в B, так как $R \leq C_G(a)$. Таким образом, имеем $O_{p'}(L_g)\lambda R \leq B$.

Вследствие выбора p подгруппа R содержится в нильпотентном радикале $L(B)$ подгруппы B. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $O_{p'}(L_g)$. По лемме Фраттини Q выберем таким образом, чтобы она нормализовалась подгруппой R. Если $Q < L(B)$, то, очевидно, $Q \times R$. Если же q — делитель индекса $|B \colon L(B)|$, то, по определению нильпотентного радикала, R также нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем $Q \times R$. Поскольку это рассуждение правильно для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, заключаем, что $O_{p'}(L_g) < C_G(a)$. Отсюда с учетом выбора элемента a следует, что все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в B бесконечные централизаторы, по лемме 5 [7] целиком содержащиеся в B. Фиксируем произвольный элемент $c \neq 1$ из $O_{p'}(L_g)$. Как показано выше, $a \in C_G(c) \leq B$. Проводя аналогичные рассуждения относительно подгруппы B^g вместо B и элемента a^g вместо a, видим, что $a^g \in C_G(c)$, $c \in O_{p'}(L_g)$. Таким образом, $a^g \in B$. Вследствие выбора числа p элемент a^g принадлежит пересечению слойно конечных радикалов подгрупп B и B^g, а это означает в силу леммы 4 [7], что $B = B^g$ для элемента g из $G \setminus B$. Противоречие с выбором подгруппы B означает, что силовские p-подгруппы в L_g являются циклическими.

Завершим доказательство леммы. Пусть сначала H — нечерниковская подгруппа группы G. В силу доказанного выше считаем, не нарушая общности рассуждений, что найдется элемент $a \in H$ порядка p такой, что силовская p-подгруппа в L_g будет циклической.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ нашелся элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом w из нильпотентного радикала N_g группы $L_g = \langle a, a^g \rangle$.

По выбору порядка p элемента a элемент b имеет бесконечный централизатор в H, значит, по лемме 5 [7] он целиком содержится в H вместе с элементом w. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap H$ нетривиально, так как содержит элемент w. Рассмотрим максимальную нормальную элементарную абелеву q-подгруппу A_g из D_g. Если a действует регулярно на A_g, то вследствие строения группы регулярных автоморфизмов q-группы, отсутствия в G бесконечных элементарных абелевых подгрупп, сопряженности примарных силовских погрупп в группе G и конечности индекса слойно конечного радикала в почти слойно конечной группе добиваемся за счет выбора p, чтобы число q было настолько большим, что оно не делит индекс $|H\colon R(H)|$. Тогда $A_g < R(H)$. По свойствам слойно конечных групп и лемме 5 [7] $C_G(A_g) \leq H$.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом из A_g. Тогда либо он централизует всю A_g и вследствие выбора числа p снова имеем $C_G(A_g) \leq H$, либо A_g расщепляется: $A_g = B_g \times C_g$, где $C_g < C_G(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Тогда, как и выше, получаем ограничение на порядок q: q не делит индекс $|H\colon R(H)|$.

Окончательно имеем независимо от действия a на A_g включение $C_G(A_g) \leq H$, что влечет по лемме 4 [7] $N_G(A_g) \leq H$. Тогда $N_G(D_g) \leq H$.

Если $N_g \neq D_g$, то вследствие нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и согласно доказанному содержится в H. Пришли к противоречию с построением D_g.

Если же $N_g = D_g$, то вследствие нормальности N_g в L_g и включения $N_G(D_g) \leq$ $\leq H$ получаем $L_g < H$ вопреки выбору группы L_g.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_{L_g}(a)$ действует регулярно на N_g. Тогда согласно доказанному выше и лемме 4.27 [14] L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a). По теореме Созутова – Шункова

[15] G имеет нетривиальную нормальную локально конечную подгруппу вопреки предположению.

Случай черниковской подгруппы H рассматривается так же с заменой в рассуждениях подгруппы H на подгруппу B.

Лемма доказана.

В силу леммы 4 будем считать, не нарушая общности рассуждений, что в бесконечном подмножестве $\mathfrak{N}$ подгрупп множества $\mathfrak{M}$ разрешимый радикал единичен.

В леммах 5, 6 будем предполагать, что некоторая силовская 2-подгруппа в группе G конечна.

Лемма 5. *Порядки фактор-групп $C_G(t)/O_{2'}(C_G(t))$, где t — произвольная инволюция из G, ограничены в совокупности.*

Доказательство. В силу леммы 3 группа G содержит конечное число классов сопряженных инволюций. Тогда, зафиксировав в каждом классе некоторую инволюцию t, достаточно для нее доказать конечность фактор-группы $C_G(t)/O_{2'}(C_G(t))$. Последнее утверждение следует из конечности силовской 2-подгруппы в G, леммы 9 [8] и почти слойной конечности группы $C_G(t)$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Можно считать, не нарушая общности рассуждений, что порядок p элемента a выбран таким достаточно большим, что для подгрупп множества $\mathfrak{N}$ выполняется первая альтернатива теоремы Брауэра* [16]: *в конечной группе U с силовской 2-подгруппой V для любой пары инволюций w, t из V и любого элемента d из V существуют такие элементы x, y, z, что $x^{-1}wx, y^{-1}ty, z^{-1}dz \in \in V$ и $z^{-1}dz = x^{-1}wxy^{-1}ty$.*

Доказательство. Поскольку мы можем увеличивать как угодно порядок p элемента a, подберем его таким достаточно большим, что для подгрупп множества $\mathfrak{N}$ не будет выполняться вторая альтернатива теоремы Брауэра [16]: в конечной группе U с силовской 2-подгруппой $V \neq 1$ существует функция

$$f\Big(|V|, \big|C_U(w)/O_{2'}(C_U(w))\big|, \ \big|C_U(t)/O_{2'}(C_U(t))\big|\Big)$$

такая, что $|U| \leq \max(f)$ (для любых инволюций w, t из V). Из леммы 5 следует, что такой функции не существует, а это означает справедливость леммы.

Лемма доказана.

Перейдем к ***доказательству теоремы.*** Если силовская 2-подгруппа S бесконечна, то она является локально диэдральной 2-группой [7]. Тогда силовские 2-подгруппы в подгруппах $F(L_g)$ групп L_g множества $\mathfrak{N}$ являются группами диэдра и сами подгруппы $F(L_g)$ групп множества $\mathfrak{N}$ изоморфны либо $PSL_2(q)$, $q > 3$ — нечетное, либо A_7 [17]. Случай группы A_7 исключаем за счет выбора достаточно большого порядка элемента a и получаем утверждение теоремы в случае бесконечной подгруппы S.

Если силовская 2-подгруппа S конечна, то по теореме из [8] либо пересечение S со слойно конечным радикалом централизатора центральной инволюции из S является циклическим или обобщенной группой кватернионов, либо группа S может быть одного из следующих типов: группой диэдра; полудиэдральной группой; 2-группой Судзуки порядка 64; абелевой группой типа $(2^m, 2^m)$, $m > 1$; $S = \langle b \rangle \wr \langle t \rangle$, где $b^{2^m} = t^2 = 1$, $m \geq 2$. Предположим, что пересечение S со слойно конечным радикалом центральной инволюции из S — циклическая группа или обобщенная группа кватернионов. Поскольку по лемме 6 для групп множества $\mathfrak{N}$ выполняется первая альтернатива теоремы Брауэра, по свойствам групп диэдра силовские 2-подгруппы в подгруппах $F(L_g)$ групп L_g множества $\mathfrak{N}$ либо четверные группы Клейна, либо содержат инволюции, сопряженные с i. В первом случае, как и при рассмотрении бесконечной силовской 2-подгруппы, получаем утверждение теоремы, а во втором случае, как показано при доказательстве теоремы из [8], S может быть одного из следующих типов: группой диэдра; полудиэдральной группой; 2-группой Судзуки порядка 64; абелевой группой типа $(2^m, 2^m)$, $m > 1$; $S = \langle b \rangle \wr \langle t \rangle$, где $b^{2^m} = t^2 = 1$, $m \geq 2$. Таким образом, теорему достаточно доказать для следующих случаев:

1) S — полудиэдральная группа;
2) S — 2-группа Судзуки порядка 64;
3) S — абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, $m > 1$;
4) $S = (b) \wr (t)$, где $b^{2^m} = t^2 = 1$, $m \geq 2$, $H = C_G(i)$.

Предположим, что S — абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, $m > 1$. В силу лемм 2, 4 и теоремы Уолтера [17, с. 485] подгруппы $F(L_g)$ групп L_g из $\mathfrak{N}$ изоморфны $L_2(q)$, $q > 3, q = 3, 5(\bmod 8)$ или $q = 2^m$; группе $J(11)$ или являются группами типа Ри. Случаи группы $J(11)$ и групп типа Ри исключаются вследствие того, что в них силовская 2-подгруппа является элементарной абелевой восьмого порядка, а это невозможно в силу леммы 9 [7]. Теперь, поскольку выбор порядка элемента a произволен и неограничен, увеличивая его, мы увеличиваем порядок полупростой группы L_g. С ростом порядка группы L_g увеличивается порядок ее простой компоненты, изоморфной $L_2(q)$. Рассмотрим вариант $q = 2^m$: с ростом числа p в такой группе увеличивается порядок силовской 2-подгруппы, а так как S конечна, получаем противоречие и невозможность такой ситуации. Значит, в третьем случае получаем справедливость утверждения теоремы.

Пусть имеет место первый случай. Подгруппы полудиэдральной группы, которые могут быть силовскими подгруппами в простых неабелевых группах, либо полудиэдральные, либо элементарные абелевы подгруппы четвертого порядка. Если хотя бы одна такая подгруппа является полудиэдральной, то по лемме 6 и лемме 9 [8] получаем, что она содержит в качестве подгруппы группу диэдра порядка, не меньшего восьми. Но это невозможно, значит, во всех подгруппах $F(L_g)$ групп L_g множества $\mathfrak{N}$ силовские подгруппы являются элементарными абелевыми подгруппами, и в этом случае, как мы показали выше, утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим теперь второй случай. Интересующие нас силовские подгруппы в подгруппах $F(L_g)$ групп L_g из множества $\mathfrak{N}$ либо являются 2-группами Судзуки порядка 64, либо элементарными абелевыми подгруппами четвертого и восьмого порядков, либо содержат элемент четвертого порядка, который не является произведением никаких инволюций из этой подгруппы. Последний случай строения силовской 2-подгруппы в подгруппах $F(L_g)$ групп L_g множества $\mathfrak{N}$ невозможен по лемме 6. Элементарную абелеву 2-подгруппу 8-го порядка подгруппы $F(L_g)$ групп L_g из $\mathfrak{N}$ не содержат в силу леммы 9 [7] и леммы 8 [8]. Тем самым остался случай элементарной абелевой подгруппы 4-го порядка и, как и выше, мы показали справедливость утверждения теоремы в этом случае.

Четвертый случай допускает возможность для силовских 2-подгрупп из подгрупп $F(L_g)$ групп L_g множества $\mathfrak{N}$ либо содержать центральный элемент четвертого порядка, либо быть группой диэдра. Первый случай невозможен в силу леммы 6. Во втором случае подгруппы $F(L_g)$ групп L_g множества $\mathfrak{N}$ изоморфны либо $PSL_2(q)$, $q > 3$ — нечетное, либо A_7 [17]. Снова, как и выше, исключаем подгруппу A_7 за счет выбора достаточно большого порядка элемента a и получаем утверждение теоремы для четвертого случая.

Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных специальных p-групп // Докл. АН СССР. – 1945. – С. 71 – 74.
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989. – 300 с.
4. *Сенашов В. И.* Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 1002 – 1008.
5. *Сенашов В. И.* Достаточные условия почти слойной конечности группы // Там же. – 1999. – **51**, № 4. – С. 472 – 485.
6. *Сенашов В. И., Шунков В. П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. – 2003. – **15**, № 3 – С. 91 – 104.
7. *Сенашов В. И.* Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Там же. – 2002. – **14**, № 4. – С. 133 – 152.
8. *Сенашов В. И.* О силовских подгруппах периодических групп Шункова // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 1548 – 1556.
9. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. – 1972. – **11**, № 4. – С. 470 – 493.
10. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. – Новосибирск: Наука, 1992. – 133 с.
11. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co., 1973. – 147 p.
12. *Hartley B.* Finite groups of automrphisms of locally soluble groups // J. Algebra. – 1979. – **57**, № 1. – P. 242 – 257.
13. *Brauer R., Suzuki M.* On finite groups with an abelian Sylow subgroups // Can. J. Math. – 1962. – **14**. – P. 436 – 450.
14. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.
15. *Созутов А. И., Шунков В. П.* О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами // Алгебра и логика. – 1977. – **16**, № 6. – Ч. 1. – С. 711 – 735; 1979. – **18**, № 2. – Ч. 2. – С. 206 – 223.
16. *Brauer R.* Some applications of theory of block of characters of finite groups II // J. Algebra. – 1964. – **1**. – P. 307 – 334.
17. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper and Row, 1968. – 527 p.
18. *Brauer R., Feit W.* An analogue of Jordan's theorem in characteristic p // Ann. Math. – 1966. – **84**, № 1. – P. 119 – 131.

Получено 12.07.06,
после доработки — 14.08.07