УДК 519.21

Ю. С. Мішура, О. М. Соловейко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЦІНИ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ОПЦІОНУ НА РИНКУ, НА ЯКОМУ СТРИБОК ЦІНИ АКЦІЇ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИЙ НА ДЕЯКОМУ ІНТЕРВАЛІ

We consider a model of the market such that a jump of share price is uniformly distributed on some symmetric interval and establish the rate of convergence of fair prices of European options by using the theorem on asymptotic decompositions of distribution function for the sum of independent identically distributed random variables. We show that, in the prelimit model, there exists a martingale measure on the market such that the rate of convergence of prices of European options to the Black – Scholes price is of order $1/n^{1/2}$.

Рассмотрена модель рынка, на котором скачок цены акции равномерно распределен на некотором симметричном интервале, и найдена скорость сходимости справедливых цен европейских опционов с применением теоремы об асимптотических разложениях функции распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Показано, что существует мартингальная мера на рынке в допредельной модели такая, что скорость сходимости цен европейских опционов к цене Блэка – Шоулса имеет порядок $1/n^{1/2}$.

1. Вступ. Реальна модель фінансового ринку є дискретною, але набагато простіше робити обчислення для граничної — неперервної моделі. Тому задача збіжності дискретної моделі ринку до неперервної є дуже важливою. Збіжність цін опціонів із дискретним часом до цін опціонів із неперервним часом досліджувалась авторами у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 5]).

Цікавим і важливим є питання швидкості збіжності цін цінних паперів. У роботі [6] досліджено збіжність цін європейських і американських опціонів у біноміальній моделі з випадковими моментами стрибків цін акцій і застосовано метод екстраполяції для знаходження швидкості збіжності, яку при цьому можна покращити, наприклад для американських опціонів з $1/n^{1/2}$ до $1/n^{2/3}$. У роботі [7] знайдено швидкість збіжності цін опціонів із дискретним часом, залежних від шляху, до цін відповідних опціонів із неперервним часом. Зокрема, для бар'єрних опціонів, „ретроспективних" опціонів та опціонів „з поверненням" встановлено швидкість збіжності порядку $1/n^{1/2}$. У роботі [8] знайдено швидкість збіжності для цін деривативів із деякого класу. В залежності від властивостей неперервності ціни опціону як функції ціни акції швидкість може бути $1/n$ або $1/n^{1/2}$. У роботі [9] розглянуто загальний клас біноміальних моделей із додатковим параметром λ. Показано, що в цьому випадку біноміальна ціна європейського опціону купівлі збігається до ціни Блека – Шоулса з швидкістю $1/n$.

У даній статті ми розглядаємо іншу модель ринку, яка, на нашу думку, має практичну природу. Знаходимо швидкість збіжності справедливих цін європейських опціонів для моделі фінансового ринку, на якому стрибок ціни акції рівномірно розподілений на деякому інтервалі, застосовуючи теорему про асимптотичні розклади функції розподілу суми незалежних однаково розподілених випадкових величин. Справа в тому, що в багатьох випадках ми можемо лише передбачити інтервал, в який попаде стрибок ціни акції, а не конкретні значення цього стрибка. Тому з метою спрощення ми і вважаємо, що відносно об'єктивної міри стрибок розподілений рівномірно на деякому відомому інтервалі. Дограничний ринок є неповним, хоча граничний ринок є повним. В статті ми обираємо одну мартингальну міру на неповному ринку і знаходимо, що швидкість збіжності відповідної справедливої ціни європейського опціону купівлі та продажу відносно цієї міри до ціни Блека – Шоулса дорівнює $1/n^{1/2}$.

2. Оцінки параметрів розподілу в дограничній моделі. Розглянемо модель фінансового ринку в схемі серій, в якій весь часовий інтервал $[0, T]$ в N-й серії розбито на кроки $T/N,\ 2T/N, \ldots, NT/N,\ N \geq 1$.

Нехай на цьому ринку функціонують один безризиковий актив $B^{(N)}$ з ціною $B_k^{(N)} := (1+r_N)^k,\ k = 0, \ldots, N,\ N \geq 1,\ r_N > -1$, причому

$$\lim_{N\to\infty} (1+r_N)^N = e^{rT}, \tag{1}$$

де r — скінченна стала, і один додатний ризиковий актив $S^{(N)}$, для якого випадкова величина $R_k^{(N)} := \dfrac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}},\ k = 1, \ldots, N$, в k-й період рівномірно розподілена на інтервалі $[\alpha_N, \beta_N]$ при

$$\begin{gathered} -1 < \alpha_N \leq r_N \leq \beta_N, \quad k = \overline{1, N}, \\ \lim_{N\to\infty} \alpha_N = \lim_{N\to\infty} \beta_N = 0, \\ R_k^{(N)},\ k = \overline{1, N}, \text{ — незалежні випадкові величини.} \end{gathered} \tag{2}$$

Розглянемо випадок, коли параметри мають спеціальний вигляд. Назвемо модель ринку симетричною, якщо $r_N = rT/N$ і α_N, β_N такі, що $1+\alpha_N = e^{-\sigma\sqrt{3T/N}}$, $1+\beta_N = e^{\sigma\sqrt{3T/N}}$ для деякого $\sigma > 0$. При цьому виконуються умови (1), (2), тому що

$$\lim_{N\to\infty} (1+r_N)^N = \lim_{N\to\infty} \left(1+\frac{rT}{N}\right)^N = e^{rT},$$

та оскільки $\sqrt{N} r_N \to 0$, $\sqrt{N}\alpha_N \to -\sigma\sqrt{3T}$, $\sqrt{N}\beta_N \to \sigma\sqrt{3T}$, $N \to \infty$, то для великих N отримуємо $-1 < \alpha_N < r_N < \beta_N$, і, крім того, $\lim \alpha_N = \lim \beta_N = 0$.

Ціновий процес для ризикового активу має вигляд

$$S_k^{(N)} = S_{k-1}^{(N)}(1+R_k^{(N)}) = S_0^{(N)} \prod_{i=1}^{k} (1+R_i^{(N)}), \qquad k = \overline{1, N},$$

де початкове значення $S_0^{(N)} = S_0 > 0$ — задана стала.

Ризиковий актив $S_k^{(N)}$ розглядається на ймовірнісному просторі $(\Omega_N, F^{(N)}, P_N^*)$, де $\Omega_N = \Omega^N$, Ω — вимірний простір. За фільтрацію беремо $F_k^{(N)} := \sigma(S_0^{(N)}, \ldots, S_k^{(N)})$, $k = 1, \ldots, N$. Ймовірнісна міра P_N^* — це мартингальна міра для кожного N, тобто дисконтована ціна $X_k^{(N)} := \dfrac{S_k^{(N)}}{(1+r_N)^k}$, $k = 0, \ldots, N$, є P_N^*-мартингалом відносно фільтрації $F_k^{(N)}$.

Знайдемо мартингальну міру з наступних умов (далі під E_N^* і D_N^* будемо розуміти відповідно математичне сподівання і дисперсію, взяті відносно міри P_N^*):

1) $E_N^*(X_k^N \,|\, F_k^{(N-1)}) = X_k^{N-1}$,

2) $P_N^*(\Omega_N) = 1$,

3) $P_N^*(x) \geq 0$ для всіх $x \geq 0$.

Перші дві умови рівносильні таким:

$$\mathrm{E}\left(R_k^N \frac{dP_N^*}{dP_N} \right) = r_N, \qquad \mathrm{E}\left(\frac{dP_N^*}{dP_N} \right) = 1. \tag{3}$$

(Очевидно, існує не єдина функція $\phi_N^*(x)$, для якої виконуються рівності (3). Отже, такий фінансовий ринок буде безарбітражним, але неповним.)

Будемо шукати щільність розподілу похідної Радона – Нікодима у вигляді

$$\phi_N^*(x) = \frac{c_N x + d_N}{\beta_N - \alpha_N}, \qquad x \in (\alpha_N, \beta_N). \tag{4}$$

Водночас це означає, що щільність розподілу похідної Радона – Нікодима відносно рівномірного розподілу дорівнює $c_N x + d_N$, $x \in (\alpha_N, \beta_N)$.

Розв'язавши рівняння (3), для функції вигляду (4) отримаємо

$$c_N = \frac{12 r_N - 6(\alpha_N + \beta_N)}{(\beta_N - \alpha_N)^2}, \qquad d_N = 4 - \frac{6 r_N(\alpha_N + \beta_N) - 12\alpha_N\beta_N}{(\beta_N - \alpha_N)^2}.$$

При цьому $c_N \leq 4r/\sigma^2$, $d_N \leq 25$ при $N \geq 3\sigma^2 T/\ln^2 2$ і $c_N \to (r - 3\sigma^2)/\sigma^2$, $d_N \to 1$ при $N \to \infty$. Для виконання умови $\phi_N^*(x) \geq 0$ для всіх достатньо великих N потрібно, щоб виконувалась нерівність

$$3\sigma^2 \leq r. \tag{5}$$

Далі вважаємо її виконаною.

Доведемо деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Для симетричної моделі має місце рівність*

$$\sigma_N^2 := D_N^*(R_k^{(N)}) = \frac{\sigma^2 T}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right). \tag{6}$$

Доведення. Оскільки випадкова величина $R_k^{(N)}$ відносно міри P_N^* розподілена на $[\alpha_N, \beta_N]$ з щільністю розподілу похідної Радона – Нікодима $\phi_N^*(x) = \dfrac{c_N x + d_N}{\beta_N - \alpha_N}$, то

$$\sigma_N^2 = D_N^*(R_k^{(N)}) = \int_{\alpha_N}^{\beta_N} (x - r_N)^2 \phi_N^*(x)\, dx =$$

$$= \frac{\sigma^2 T}{N} + \frac{\sqrt{3}\sigma^3 T^{3/2}}{N^{3/2}} + o\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

Зауважимо, що

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_N^2 N = \sigma^2 T.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Для симетричної моделі мають місце рівності*

$$E_N^*[\ln S_N^{(N)}] = rT - \sigma^2 T/2 + \delta_1^N, \qquad D_N^*[\ln S_N^{(N)}] = \sigma^2 T + \delta_2^N,$$

де $\delta_i^N \leq \dfrac{c}{\sqrt{N}}$, $i = 1, 2$, c — *стала.*

Доведення. Знайдемо параметри розподілу $S_N^{(N)}$. Для цього застосуємо формулу Тейлора до $S_N^{(N)} = \prod_{k=1}^N (1 + R_k^{(N)})$. За формулою Тейлора $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \rho(x)x^2$, де $\rho(x)$ таке, що $|\rho(x)| \le \delta(\alpha, \beta)$ для $-1 < \alpha \le x \le \beta$ і $\delta(\alpha, \beta) \to 0$, α, $\beta \to 0$. Точніше, якщо $-1/2 < \alpha < x < \beta < 1/2$, то $\delta(\alpha, \beta) = \dfrac{|x|}{3(1+\theta x)^3} \le \dfrac{8}{3}|\alpha| \vee |\beta|$. Тому

$$\ln S_N^{(N)} = \sum_{k=1}^N \left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2 \right) + \Delta_N,$$

де Δ_N задовольняє нерівність

$$|\Delta_N| \le \delta(\alpha_N, \beta_N) \sum_{k=1}^N (R_k^{(N)})^2, \tag{7}$$

а

$$\delta(\alpha_N, \beta_N) \le \frac{8}{3}|\alpha_N| \vee |\beta_N| \le \frac{8}{3}\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} \right) \vee \left(\sigma \sqrt{\frac{T}{N}} \right) \le \frac{16}{3}\sigma\sqrt{\frac{T}{N}},$$

якщо

$$N > \frac{T\sigma^2}{(\ln 2)^2}. \tag{8}$$

Оскільки P_N^* — мартингальна міра, то

$$E_N^*[R_k^{(N)}] = r_N = \frac{rT}{N}.$$

Для знаходження параметрів розподілу $S_N^{(N)}$ застосуємо лему 1 та оцінки (7):

$$E_N^*[\ln S_N^{(N)}] = Nr_N - \frac{1}{2}(\sigma_N^2 N + N r_N^2) + \delta_1^N = rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \delta_1^N,$$

де з урахуванням (6)

$$\left|\delta_1^N\right| := E_N^*|\Delta_N| \le \delta(\alpha_N, \beta_N) \sum_{k=1}^N (D_N^*(R_k^{(N)}) + r_N^2) \le \frac{c_1}{\sqrt{N}}$$

з $c_1 = \dfrac{16}{3}\sigma^3 T^{3/2} + 1$ для великих N.

Далі, позначимо $u_k^{(N)} = R_k^{(N)} - (R_k^{(N)})^2/2$. Тоді

$$D_N^* u_k^{(N)} = D_N^*(R_k^{(N)}) - E_N^*(R_k^{(N)})^3 - \frac{1}{4}E_N^*(R_k^{(N)})^4 + E_N^* R_k^{(N)} E_N^*(R_k^{(N)})^2 -$$

$$- \frac{1}{4}(E_N^*(R_k^{(N)})^2)^2 \le \frac{\sigma^2 T}{N} + \frac{\sqrt{3}\sigma^3 T^{3/2}}{N^{3/2}} + o\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)$$

і

$$\lim_{n\to\infty} D_N^* u_k^{(N)} N = \sigma^2 T.$$

Крім того,

$$D_N^*[\ln S_N^{(N)}] = \sum_{k=1}^N D_N^* u_k^{(N)} + \frac{32}{3}\sigma\sqrt{\frac{3T}{N}} \operatorname{Cov}_N^*\left(\sum_{k=1}^N (R_k^{(N)})^2, \sum_{k=1}^N u_k^{(N)} \right) +$$

$$+\left(\frac{16}{3}\sigma\sqrt{\frac{3T}{N}}\right)^2 D_N^*\left(\sum_{k=1}^{N} R_k^{(N)}\right)^2 \le \sigma^2 T + \delta_2^N.$$

Тут $\delta_2^N \le \frac{c_2}{\sqrt{N}}$, $c_2 = \sqrt{3}\sigma^3 T^{3/2}+1$, і виконується (8).

Отже, $\ln S_N^{(N)}$ має розподіл з параметрами $rT - \sigma^2 T/2 + \delta_1^N$ та $\sigma^2 T + \delta_2^N$, де $\left|\delta_i^N\right| \le \frac{c}{\sqrt{N}}$, $c = \max\{c_1, c_2\}$.

Лему доведено.

Теорема 1. *При виконанні умов* (1), (2), (5) *та* (8), *коли мартингальна міра задається через щільність розподілу похідної Радона – Нікодима, що має вигляд* (3), (4), *розподіл* $S_N^{(N)}$ *відносно* P_N^* *слабко збігається до логнормального розподілу з параметрами* $\ln S_0 + rT - \sigma^2 T/2$ *і* $\sigma\sqrt{T}$, *тобто до розподілу* $S_T := S_0 \exp(\sigma W_T + (r-\sigma^2/2)T)$.

Доведення. Застосуємо центральну граничну теорему у наступному вигляді [10, с. 324]. Нехай для кожного фіксованого натурального N незалежні випадкові величини $\left\{Y_k^N,\ N \ge 1,\ 1 \le k \le N\right\}$ на (Ω_N, F_N, P_N) задовольняють умови:

1) існує стала γ_N така, що $\gamma_N \to 0$ і $\left|Y_k^N\right| \le \gamma_N$, P_N-м.н.,

2) $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}[Y_k^N] \to m$,

3) $\sum_{k=1}^{N} D[Y_k^N] \to \sigma^2$.

Тоді розподіл $Z_N := \sum_{k=1}^N Y_k^N$, $N \ge 1$, слабко збігається до нормального розподілу з середнім m та дисперсією σ^2.

У випадку, що розглядається, граничний розподіл для $\ln S_N^{(N)} = \sum_{k=1}^N \ln(1+R_k^{(N)})$ буде нормальним згідно зі сформульованою вище центральною граничною теоремою та лемою 2, а розподіл $S_N^{(N)}$ буде логнормальним з відповідними параметрами.

Теорему доведено.

Зауважимо, що для параметрів розподілу $S_N^{(N)}$ існують сталі $c_3, c_4 > 0$ такі, що виконуються нерівності

$$\left|E_N^*[\ln S_N^{(N)}] - E_N^*[\ln S]\right| \le \frac{c_3}{\sqrt{N}} \quad \text{і} \quad \left|D_N^*[\ln S_N^{(N)}] - D_N^*[\ln S]\right| \le \frac{c_4}{\sqrt{N}}.$$

3. Оцінка швидкості збіжності. Перейдемо тепер до відшукання швидкості збіжності справедливих цін європейських опціонів на нашому ринку. Застосуємо теорему про асимптотичні розклади функції розподілу суми незалежних однаково розподілених випадкових величин [11, с. 195].

Розглянемо послідовність незалежних випадкових величин $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$, що мають однакову функцію розподілу $V(x)$. Нехай

$$\mathrm{E}X_1 = 0,$$

$$\mathrm{E}X_1^2 = \sigma^2 > 0,$$

$$v(t) = \mathrm{E}e^{itX_1},$$

$$F_n(x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_j < x\right).$$

Теорема 2 [11, с. 196 – 207]. *Якщо* $\mathrm{E}|X_1|^k < \infty$ *для деякого цілого* $k \geq 3$, *то для всіх* x *і* n

$$\left|F_n(x) - \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}}\right| \leq$$

$$\leq c(k)\left\{\sigma^{-k}n^{-(k-2)/2}(1+|x|)^{-k}\int\limits_{|y|\geq\sigma\sqrt{n}(1+|x|)}|y|^k dV(y) + \right.$$

$$+ \sigma^{-k-1}n^{-(k-1)/2}(1+|x|)^{-k-1}\int\limits_{|y|\leq\sigma\sqrt{n}(1+|x|)}|y|^{k+1}dV(y) +$$

$$\left. + \left(\sup_{|t|\geq\delta}|v(t)| + \frac{1}{2n}\right)^n n^{k(k+1)/2}(1+|x|)^{-k-1}\right\},$$

де $\delta = \dfrac{\sigma^2}{12\mathrm{E}|X_1|^3}$ *і* $c(k)$ — *додатна стала, що залежить тільки від* k. *Функції* $Q_\nu(x)$ *визначено таким чином*:

$$Q_\nu(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\sum H_{\nu+2s-1}(x)\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}\left(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}}\right)^{k_m},$$

сума обчислюється за всіма цілими невід'ємними розв'язками $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ *рівняння* $k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu = \nu$, *а* $s = k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$, $H_{\nu+s-1}(x)$ — *поліноми Чебишова – Ерміта,* γ_{m+2} — *кумулянт порядку* $m+2$ *випадкової величини* X_m.

Ми застосуємо наслідок з наведеної теореми.

Теорема 3 [11, с. 208]. *Якщо*

$$\lim_{|t|\to\infty}\sup|v(t)| < 1 \tag{9}$$

і $\mathrm{E}|X_1|^k < \infty$ *для деякого цілого* $k \geq 3$, *то*

$$(1+|x|)^k\left|F_n(x) - \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}}\right| = o\left(\frac{1}{n^{(k-2)/2}}\right)$$

рівномірно відносно x, $-\infty < x < \infty$.

Теорема 4. *В моделі ринку, на якому стрибок ціни акції є випадковою величиною, що відносно об'єктивної міри* P *рівномірно розподілена на симетричному інтервалі, існує мартингальна міра така, що швидкість збіжності справедливих цін опціонів купівлі й продажу відносно цієї міри до справедливої ціни в граничній моделі дорівнює* $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$.

Доведення. З формули Блека – Шоулса випливає, що справедлива ціна дисконтованого європейського опціону продажу C^{Put} має вигляд

$$\Pi(C^{\mathrm{Put}}) = \frac{E_{P^*}(E - S_T)^+}{e^{rT}},$$

де P^* — мартингальна міра, E — страйкова ціна опціону, S_T — ціна акції в момент часу T.

Запишемо справедливу ціну такого опціону в дограничній і граничній моделях і оцінимо різницю.

В граничній моделі

$$\Pi(C^{\mathrm{Put}}) = \frac{E_{P^*}(E - S_T)^+}{e^{rT}} = \frac{1}{e^{rT}} \int_0^\infty (E - x)^+ \, dF^*(x) =$$

$$= \frac{1}{e^{rT}} \int_0^E (E - x) \, dF^*(x) = \frac{1}{e^{rT}} \int_0^E F^*(x) \, dx, \tag{10}$$

де $F^*(x)$ — функція розподілу випадкової величини S_T,

$$F^*(x) = P^*\{S_T < x\} = P^*\{\ln S_T < \ln x\} =$$

$$= P^*\left\{ \frac{\ln S_T - E_N^*(\ln S_T)}{\sqrt{D_N^*(\ln S_T)}} < \frac{\ln x - E_N^*(\ln S_T)}{\sqrt{D_N^*(\ln S_T)}} \right\} =$$

$$= P^*\left\{ \frac{\ln S_T - rT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\ln x - rT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \right\} = \Phi\left(\frac{\ln x - rT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \right),$$

$\Phi(x)$ — функція розподілу $N(0, 1)$.

Аналогічно, в дограничній моделі

$$\Pi(C_N^{\mathrm{Put}}) = \frac{1}{(1 + r_N)^N} \int_0^E F_N^*(x) \, dx = \frac{1}{(1 + rT/N)^N} \int_0^E F_N^*(x) \, dx, \tag{11}$$

де F_N^* — функція розподілу випадкової величини $S_N^{(N)}$.

Виконаємо в інтегралі (10) заміну

$$y = y(x) = \frac{\ln x - rT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Тоді

$$\frac{1}{e^{rT}} \int_0^E F^*(x) \, dx = \frac{1}{e^{rT}} \int_0^E \Phi(y(x)) \, dx =$$

$$= \frac{1}{e^{rT}} \int_{-\infty}^{y(E)} \Phi(y) e^{y\sigma\sqrt{T} + rT - \sigma^2 T/2} \, \sigma\sqrt{T} \, dy = k \int_{-\infty}^{y(E)} \Phi(y) f(y) \, dy.$$

Для спрощення запису ми ввели наступні позначення: $k := \dfrac{\sigma\sqrt{T}}{e^{\sigma^2 T/2}} > 0$, $a :=$ $:= y(E)$, $f(y) := e^{y\sigma\sqrt{T}}$.

Аналогічно, в інтегралі (11) виконаємо заміну

$$y = y_N(x) = \frac{\ln x - rT + \sigma^2 T/2 - \delta_1^N}{\sqrt{\sigma^2 T + \delta_2^N}}.$$

Тоді

$$\frac{1}{(1+r_N)^N}\int_0^E F_N^*(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\left(1+rT/N\right)^N}\int_0^E \tilde{F}_N^*\big(y_N(x)\big)\,dx \;=$$

$$=\; k_N\int_{-\infty}^{y(E)} \tilde{F}_N^*(y)\,f_N(y)\,dy,$$

де $\tilde{F}_N^*(y)$ — функція розподілу суми центрованих і нормованих незалежних однаково розподілених випадкових величин $\ln\big(1+R_k^{(N)}\big)$, $R_k^{(N)}$ описано вище,

$$k_N \;:=\; \frac{e^{rT+\delta_1^N}\sqrt{\sigma^2 T+\delta_2^N}}{e^{\sigma^2 T/2}\left(1+rT/N\right)^N} \;>\; 0, \qquad a_N \;:=\; y_N(E), \qquad f_N(y) \;:=\; e^{y\sqrt{\sigma^2 T+\delta_2^N}}.$$

Отже, потрібно оцінити

$$\left| k\int_{-\infty}^{a}\Phi(y)f(y)\,dy \;-\; k_N\int_{-\infty}^{a_N}\tilde{F}_N^*(y)f_N(y)\,dy \right| \;\le$$

$$\le\; |k-k_N|\int_{-\infty}^{a} f(y)\,dy \;+\; |k_N|\int_{-\infty}^{a}|f_N(y)-f(y)|\,dy \;+$$

$$+\; |k_N|\int_{a}^{a_N}|f_N(y)|\,dy \;+\; |k_N|\int_{-\infty}^{a}|f(y)|\left|\Phi(y)-\tilde{F}_N^*(y)\right|dy \;=:$$

$$=:\; I_1 \;+\; I_2 \;+\; I_3 \;+\; I_4.$$

Оцінимо кожен із цих доданків окремо. Маємо

$$I_1 \;=\; |k-k_N|\int_{-\infty}^{a} f(y)\,dy \;\le\; |k-k_N|\,I_5 \;\le\; \frac{I_5}{e^{\sigma^2 T/2}} \;\times$$

$$\times\left(\left|\sigma\sqrt{T}-\sqrt{\sigma^2 T+\delta_2^N}\right| + \sqrt{\sigma^2 T+\delta_2^N}\left|\left(1+\frac{rT}{N}\right)^N - e^{rT}\right| + \sqrt{\sigma^2 T+\delta_2^N}\,e^{rT}\left|1-e^{\delta_1^N}\right|\right) \;\le$$

$$\le\; \frac{c_3}{\sqrt{N}}$$

при $c_3 \;=\; I_5 c_1 e^{rT+c_1-\sigma^2 T/2}\,\sigma\sqrt{T}$, $I_5 \;=\; \int_{-\infty}^{a} e^{y\sigma\sqrt{T}}\,dy$ — збіжний інтеграл. Тут ми скористались нерівностями (8) та

$$\left|e^x - 1\right| \;\le\; xe^x. \tag{12}$$

Далі

$$I_2 \;=\; k_N\int_{-\infty}^{a}|f_N(y)-f(y)|\,dy \;=\; k_N\left|-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\,f(a) + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T+\delta_2^N}}\,f_N(a)\right| \;\le\; \frac{c_4}{\sqrt{N}},$$

де

$$c_4 \;=\; \frac{E c_2}{2\sigma^3 T^{3/2}}\sqrt{\sigma^2 T+\frac{3c_2\ln^2 2}{\sigma^2 T}}\;\left|\ln E - rT + \sigma^2 T/2 + 1\right|.$$

Аналогічно

$$I_3 = k_N \int_a^{a_N} |f_N(y)| dy \le \frac{c_5}{\sqrt{N}},$$

де

$$c_5 = \frac{E c_2}{2\sigma^2 T} \left| \ln E - rT + \sigma^2 T/2 \right| \exp\left\{ \left(\ln E - rT + \sigma^2 T/2 \right) \frac{c_2}{2\ln 2\sigma\sqrt{3T}} \right\}$$

(ми також використали (8) і (12)).

Нарешті

$$I_4 = k_N \int_{-\infty}^{a} f(y) \left| \Phi(y) - \tilde{F}_N^*(y) \right| dy \le$$

$$\le c_6 \int_{-\infty}^{a} \left| \Phi(y) - \tilde{F}_N^*(y) \right| dy,$$

де $c_6 = \mathrm{E} e^{c_1} \left(\sqrt{\sigma^2 T} + \frac{\sqrt{3} c_2 \ln 2}{\sigma \sqrt{T}} \right)$.

Розглянемо $\left| \Phi(y) - \tilde{F}_N^*(y) \right|$. Нагадаємо, що

$$\ln S_N^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + R_k^{(N)}\right) =: \sum_{k=1}^{N} \ln \xi_k^{(N)},$$

тоді

$$\tilde{F}_N^*(x) = F_N^* \left(\frac{\ln x - rT + \sigma^2 T/2 - \delta_1^N}{\sqrt{N}\sigma_N} \right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{N}\sigma_N} \sum_{j=1}^{N} X_j^N < \frac{\ln x - rT + \sigma^2 T/2 - \delta_1^N}{\sqrt{N}\sigma_N} \right),$$

де $X_j^N = \ln \xi_j^N - \mathrm{E} \ln \xi_j^N$.

Розподіл X_j^N задається так:

$$P_N^*(X_j^N < x) = P_N^*(e^{X_j - \mathrm{E}\ln\xi_j^N} - 1 < e^{x - \mathrm{E}\ln\xi_j^N} - 1).$$

Тоді

$$\mathrm{E} \ln\left(1 + R_k^N\right) = \frac{1}{\beta_N - \alpha_N} \int_{\alpha_N}^{\beta_N} \ln(1+x)(c_N x + d_N) dx =$$

$$= \frac{c_N}{2(\beta_N - \alpha_N)} \left[\ln(1+\beta_N)(1+\beta_N)^2 + \ln(1+\alpha_N)(1+\alpha_N)^2 \right] - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\beta_N + \alpha_N) +$$

$$+ (c_N - d_N) - \frac{c_N - d_N}{\beta_N - \alpha_N} \left[\ln(1+\beta_N)(1+\beta_N) + \ln(1+\alpha_N)(1+\alpha_N) \right] =: A_N,$$

а

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E} \ln\left(1 + R_k^N\right) = \frac{r}{2\sigma^2} - 2,$$

тому, принаймні, $\mathrm{E} \ln\left(1 + R_k^N\right) \le \frac{r}{2\sigma^2}$.

Розподіл X_j^N задається таким чином:

$$P_N^*(X_j^N < x) = \frac{1}{\beta_N - \alpha_N} \int\limits_{\alpha_N}^{e^{x+A_N}-1} (c_N t + d_N) dt =$$

$$= \frac{1}{\beta_N - \alpha_N} \left[\frac{c_N}{2} \left((e^{x+A_N} - 1)^2 - \alpha_N^2 \right) + d_N \left(e^{x+A_N} - 1 - \alpha_N \right) \right].$$

Оскільки

$$\mathrm{E} \left| X_1^N \right|^3 = \frac{1}{\beta_N - \alpha_N} \int\limits_{\alpha_N}^{\beta_N} x^3 \left[\frac{c_N}{2} \left((e^{x+A_N} - 1) - \alpha_N^2 \right) + d_N \left(e^{x+A_N} - 1 - \alpha_N \right) \right] dx < \infty,$$

то можна покласти $k = 3$. Крім того, (9) для неперервного рівномірного розподілу виконується.

Тоді за теоремою 3 для будь-яких y і N має місце нерівність

$$\left| F_N^*(y) - \Phi(y) \right| \le \frac{\left| Q_1^N(y) \right|}{\sqrt{N}} + \frac{o\left(1/\sqrt{N}\right)}{(1+|y|)^3}.$$

З вигляду $Q_\nu^N(y)$ маємо

$$Q_1^N(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} H_2(y) \frac{1}{1!} \left(\frac{\gamma_3^N}{3!\sigma_N^3} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} (y^2 - 1) \frac{\gamma_3^N}{6\sigma_N^3},$$

де γ_3 — кумулянт порядку 3 величини X_j^N, $H_2(y) = y^2 - 1$.

Знайдемо твірну функцію моментів:

$$u_N(t) = \mathrm{E} e^{tX_1^N} =$$

$$= \frac{1}{\beta_N - \alpha_N} \int\limits_{\alpha_N}^{\beta_N} e^{tx} \left[\frac{c_N}{2} \left(\left(e^{2x+2A_N} - 2e^{x+A_N} + 1 \right) - \alpha_N^2 \right) + d_N \left(e^{x+A_N} - 1 - \alpha_N \right) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{\beta_N - \alpha_N} \left[\frac{c_N e^{2A_N}}{2(t+2)} \left(e^{(t+2)\beta_N} - e^{(t+2)\alpha_N} \right) + \frac{(d_N - 2) e^{A_N}}{t+1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(e^{(t+1)\beta_N} - e^{(t+1)\alpha_N} \right) + \frac{1 - c_N \alpha_N^2 + d_N \alpha_N + d_N}{t} \left(e^{t\beta_N} - e^{t\alpha_N} \right) \right],$$

тоді кумулянт можна знайти як $\gamma_3^N = (\ln u_N(t))_t'''|_{t=0}$. При диференціюванні виникає проблема з доданком, що містить множник $1/t$, оскільки при $t = 0$ отримаємо невизначеність. Скористаємось розкладом у ряд Тейлора функції e^x до п'ятого степеня. Взявши похідні в 0, отримаємо

$$\gamma_3^N = \left[\frac{c_N e^{2A_N}}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\beta_N^3 e^{2\beta_N} - \alpha_N^3 e^{2\alpha_N} \right) - \frac{3}{4} \left(\beta_N^2 e^{2\beta_N} - \alpha_N^2 e^{2\alpha_N} \right) + \right. \right.$$

$$+ \frac{6}{8} \left(\beta_N e^{2\beta_N} - \alpha_N e^{2\alpha_N} \right) - \frac{6}{16} \left(e^{2\beta_N} - e^{2\alpha_N} \right) \Big) + e^{A_N} (d_N - 2) \times$$

$$\times \left(\beta_N^3 e^{\beta_N} - \alpha_N^3 e^{\alpha_N} - 3\beta_N^2 e^{\beta_N} + 3\alpha_N^2 e^{\alpha_N} + 6\beta_N e^{\beta_N} - 6\alpha_N e^{\alpha_N} - 6e^{\beta_N} + 6e^{\alpha_N} \right) +$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left(1 + d_N \alpha_N + d_N - c_N \alpha_N^2 \right) \left(\beta_N^4 - \alpha_N^4 \right) \right] \left[\frac{c_N e^{2A_N}}{4} \left(e^{2\beta_N} - e^{2\alpha_N} \right) + \right.$$

$$\left. + e^{A_N} (d_N - 2) \left(e^{\beta_N} - e^{\alpha_N} \right) + \left(1 - c_N \alpha_N^2 + d_N \alpha_N + d_N \right) (\beta_N - \alpha_N) \right]^{-1} -$$

$$- 3\Bigg[\frac{c_N e^{2A_N}}{2}\bigg(\frac{1}{2}\Big(\beta_N^2 e^{2\beta_N} - \alpha_N^2 e^{2\alpha_N}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\beta_N e^{2\beta_N} - \alpha_N e^{2\alpha_N}\Big) + \frac{1}{4}\Big(e^{2\beta_N} - e^{2\alpha_N}\Big) +$$

$$+ e^{A_N}(d_N - 2)\Big(\beta_N^2 e^{\beta_N} - \alpha_N^2 e^{\alpha_N} - 2\beta_N e^{\beta_N} + 2\alpha_N e^{\alpha_N} + 2e^{\beta_N} - 2e^{\alpha_N}\Big)\bigg) +$$

$$+ \frac{1}{3}\Big(1 + d_N\alpha_N + d_N - c_N\alpha_N^2\Big)\Big(\beta_N^3 - \alpha_N^3\Big)\Bigg]\Bigg[\frac{c_N e^{2A_N}}{2}\bigg(\frac{1}{2}\Big(\beta_N e^{2\beta_N} - \alpha_N e^{2\alpha_N}\Big) -$$

$$- \frac{1}{4}\Big(e^{2\beta_N} - e^{2\alpha_N}\Big) + e^{A_N}(d_N - 2)\Big(\beta_N e^{\beta_N} - \alpha_N e^{\alpha_N} - e^{\beta_N} + e^{\alpha_N}\Big) + \Big(1 - c_N\alpha_N^2 +$$

$$+ d_N\alpha_N + d_N\Big) - \frac{1}{2}\Big(\beta_N^2 - \alpha_N^2\Big)\Bigg]\Bigg[\frac{c_N e^{2A_N}}{4}\Big(e^{2\beta_N} - e^{2\alpha_N}\Big) + e^{A_N}(d_N - 2)\Big(e^{\beta_N} - e^{\alpha_N}\Big) +$$

$$+ \Big(1 - c_N\alpha_N^2 + d_N\alpha_N + d_N\Big)(\beta_N - \alpha_N)\Bigg]^{-2} +$$

$$+ 2\Bigg[\frac{c_N e^{2A_N}}{2}\bigg(\frac{1}{2}\Big(\beta_N e^{2\beta_N} - \alpha_N e^{2\alpha_N}\Big) + \frac{1}{4}\Big(e^{2\beta_N} - e^{2\alpha_N}\Big)\bigg) + e^{A_N}(d_N - 2) \times$$

$$\times \Big(\beta_N e^{\beta_N} - \alpha_N e^{\alpha_N} - e^{\beta_N} + e^{\alpha_N}\Big) + \Big(1 + d_N\alpha_N + d_N - c_N\alpha_N^2\Big)(\beta_N - \alpha_N)\Bigg]^3 \times$$

$$\times \Bigg[\frac{c_N e^{2A_N}}{4}\Big(e^{2\beta_N} - e^{2\alpha_N}\Big) + e^{A_N}(d_N - 2)\Big(e^{\beta_N} - e^{\alpha_N}\Big) +$$

$$+ \Big(1 - c_N\alpha_N^2 + d_N + d_N\alpha_N\Big)(\beta_N - \alpha_N)\Bigg]^{-3}.$$

При $N \to \infty$

$$\gamma_3^N = \frac{\gamma_3}{\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \le \frac{c_7}{\sqrt{N}}, \qquad c_7 = \gamma_3 + 1,$$

де

$$\gamma_3 = 3\sigma\sqrt{T}\, e^{\frac{r}{2\sigma^3} - 2}\, \frac{\frac{r}{\sigma^3} e^{\frac{r}{2\sigma^2} - 2} - 2}{\frac{2r}{\sigma^3} e^{\frac{r}{\sigma^2} - 4} - e^{\frac{r}{2\sigma^2} - 2} + 2},$$

а

$$Q_1^N(y) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \left|y^2 - 1\right| \frac{c_7}{6\sigma^3 T^{3/2}}.$$

Отже,

$$I_4 = c_6 \int_{-\infty}^{a} \left|\tilde{F}_N^*(y) - \Phi(y)\right| dy \le c_6 \int_{-\infty}^{a} \left|\frac{Q_1^N(y)}{\sqrt{N}}\right| dy + c_6 \int_{-\infty}^{a} \frac{o\big(1/\sqrt{N}\big)}{(1 + |y|)^3} dy \le \frac{c_8}{\sqrt{N}},$$

де

$$c_8 = c_6\left(\frac{c_7}{6\sqrt{2\pi}\,\sigma^3 T^{3/2}} I_6 + o(1) I_7\right),$$

а інтеграли

$$I_6 = \int_{-\infty}^{a} e^{-y^2/2} \left| y^2 - 1 \right| dy \quad \text{та} \quad I_7 = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{(1+|y|)^3} dy$$

є збіжними. Тому

$$\left| \Pi(C^{\mathrm{Put}}) - \Pi(C_N^{\mathrm{Put}}) \right| \le \frac{c_9}{\sqrt{N}},$$

де $c_9 = \max\{c_3, c_4, c_5, c_8\}$.

Запишемо відношення паритету:

$$\Pi(C_N^{\mathrm{Call}}) = \Pi(C_N^{\mathrm{Put}}) + S_0 - \frac{E}{(1+r_N)^N},$$

$$\Pi(C^{\mathrm{Call}}) = \Pi(C^{\mathrm{Put}}) + S_0 - \frac{E}{e^{rT}}.$$

Маємо

$$\left| \Pi(C^{\mathrm{Call}}) - \Pi(C_N^{\mathrm{Call}}) \right| \le \left| \Pi(C^{\mathrm{Put}}) - \Pi(C_N^{\mathrm{Put}}) \right| + \frac{E \left| e^{rT} - (1+r_N)^N \right|}{e^{rT}(1+r_N)^N} \le$$

$$\le \frac{c_9}{\sqrt{N}} + \frac{E}{e^{rT}} \left| e^{rT} - \left(1 + \frac{rT}{N}\right)^N \right| \le \frac{c_{10}}{\sqrt{N}},$$

де $c_{10} = c_9 + rTE$.

4. Висновки. Ми розглянули симетричну модель ринку, на якому стрибок ціни акції рівномірно розподілений на симетричному інтервалі, і встановили, що на неповному ринку в дограничній моделі існує мартингальна міра така, що швидкість збіжності відповідної справедливої ціни європейського опціону до ціни Блека – Шоулса має порядок $\frac{1}{n^{1/2}}$.

1. *Runggaldier W. J., Schweizer M.* Convergence of option values under incompleteness // Semin. Stochast. Anal., Random Fields and Appl.: Proc. Semin. held at the Centro Stefano Franscini, Ascona, Switzerland, June 7–12, 1993. – Basel: Birkhäuser, 1995. – P. 365 – 384.
2. *Hubalek F., Schachermayer W.* When does convergence of asset price processes imply convergence of option prices // Math. Finance. – 1998. – **4.** – P. 385 – 403.
3. *Prigent J.-L.* Incomplete markets: convergence of option values under the minimal martingale measure // Adv. Appl. Probab. – 1999. – **4.** – P. 1058 – 1077.
4. *Lesne J.-P., Prigent J.-L., Scaillet O.* Convergence of discrete time option pricing models under stochastic interest rates // Finance and Stochastics. – 2000. – **1.** – P. 81 – 93.
5. *Cutland N. J., Kopp E., Willinger W.* From discrete to continuous financial models: new convergence results for option pricing // Math. Finance. – 1993. – **2.** – P. 101 – 123.
6. *Leisen D.* The random time binomial model // J. Econ. Dynam. Control. – 1999. – **9 – 10.** – P. 1355 – 1386.
7. *Broadie M., Glafferman P., Kou S. J.* Connecting discrete continuous pass-dependent options // Finance and Stochastics. – 1999. – **3.** – P. 55 – 82.
8. *Walsh John B.* The rate of convergence of the binomial tree scheme // Ibid. – 2003. – **7.** – P. 337 – 361.
9. *Lo-Bin Chang, Ken Palmer.* Smooth convergence in the binomial model // Ibid. – 2007. – **11.** – P. 91 – 105.
10. *Föllmer H., Schied A.* Stochastic finance: an introduction in discrete time. – 2nd rev. and extended ed. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2005. – 459 p.
11. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 414 с.

Одержано 12.10.06,
після доопрацювання — 06.07.07