УДК 517.5

В. П. Моторный (Днепропетр. нац. ун-т),
О. В. Моторная (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

The comparison theorems of the Kolmogorov type for some nonsymmetric classes of functions are proved.

Доведено теореми порівняння типу Колмогорова для деяких несиметричних класів функцій.

Обозначим через W_p^r, $r \in N$, $p \geq 1$, класс функций f, заданных на отрезке $[-1, 1]$, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна, а $\left\| f^{(r)} \right\|_p \leq 1$. Как обычно, в случае $p = \infty$ полагаем, что $\left| f^{(r)}(x) \right| \leq 1$ почти всюду на отрезке $[-1, 1]$. Через $W_n^{0,\pm}$, $n = 0, 1, \ldots$, $r \in N$, обозначим класс функций f, заданных на отрезке $[-1, 1]$, таких, что $\max\{\pm f(t), 0\} \leq 1$ почти всюду на отрезке $[-1, 1]$, и ортогональных любому многочлену степени не выше n.

В силу соотношений двойственности [1, с. 46] для наилучших односторонних приближений

$$E_n^{\mp}(f)_1 = \sup_{h \in W_n^{0,\pm}} \int_{-1}^{1} f(t)\, h(t)\, dt, \tag{1}$$

где $E_n^{-}(f)_1$ (соответственно $E_n^{+}(f)_1$) — наилучшее снизу (соответственно сверху) приближение функции $f \in L_1$ алгебраическими многочленами в пространстве L_1. Для любого $r \in N$ положим

$$W_n^{r,\pm} = \left\{ h_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{1} (t-u)_+^{r-1}\, h(u)\, du,\ h \in W_n^{0,\pm} \right\},$$

где

$$(x-a)_+^{r-1} = \begin{cases} (x-a)^{r-1}, & x \geq a, \\ 0, & x < a, \end{cases}$$

— усеченная степень.

Границы значений функций из классов $W_n^{r,\pm}$ в фиксированной точке $a \in$ $\in (-1, 1)$ получим из равенств

$$\sup_{h \in W_n^{r,-}} h(a) = \frac{1}{(r-1)!} \begin{cases} E_n^{+}\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r = 2k, \\ E_n^{-}\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r = 2k+1, \end{cases} \tag{2}$$

$$\inf_{h \in W_n^{r,-}} h(a) = \frac{-1}{(r-1)!} \begin{cases} E_n^{-}\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r = 2k, \\ E_n^{+}\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r = 2k+1, \end{cases} \tag{3}$$

$$\sup_{h\in W_n^{r,+}} h(a) = \frac{1}{(r-1)!}\begin{cases} E_n^-\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r=2k, \\ E_n^+\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r=2k+1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\inf_{h\in W_n^{r,+}} h(a) = \frac{-1}{(r-1)!}\begin{cases} E_n^+\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r=2k, \\ E_n^-\left((x-a)_+^{r-1}\right)_1, & r=2k+1. \end{cases} \tag{5}$$

В работе [2] установлены неравенства

$$E_n^{\mp}\left(\frac{(x-a)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)_1 \le \frac{\sup_t (\mp D_r(t))\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} + C_r\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{(r-2)_+}}{n^{r+1}}, \tag{6}$$

где $D_r(t) = 2B_r(t)$, а $B_r(t)$ — функция Бернулли:

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt-\pi r/2)}{k^r}.$$

Считая r фиксированным, обозначаем $C_r^* = \max\limits_{1\le k\le r+1} C_k$ и полагаем

$$C_{r,a} = 1 + \frac{2C_r^*}{n\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-(r-2)_+}}. \tag{7}$$

Тогда из равенств (2), (3) и неравенства (6) для любой функции $h\in W_n^{r,-}$ следуют оценки для значений функции h в точке $a\in(-1,1)$:

$$C_{r,a}\frac{\min_t D_r(t)\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} \le h(a) \le C_{r,a}\frac{\max_t D_r(t)\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r}. \tag{8}$$

Соответственно, из равенств (4), (5) и неравенства (6) для любой функции $h\in W_n^{r,+}$ следуют оценки для значений функции h в точке $a\in(-1,1)$:

$$C_{r,a}\frac{\min_t(-D_r(t))\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} \le h(a) \le C_{r,a}\frac{\max_t(-D_r(t))\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r}. \tag{9}$$

Для $\lambda>0$ рассмотрим функции $\phi_{\lambda,r}(t) = \lambda^{-r}D_r(\lambda t)$ и $\psi_{\lambda,r}(t) = -\lambda^{-r}D_r(\lambda t)$. Очевидно, что r-я производная (там, где она существует) функции $\phi_{\lambda,r}(t)$ равна -1, а функции $\psi_{\lambda,r}(t)$ равна 1. Через $W_{(-\infty,\infty)}^{r,-}$ (соответственно $W_{(-\infty,\infty)}^{r,+}$) обозначим класс функций, заданных на всей действительной оси, $(r-1)$-я производная которых локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(t)\ge -1$ (соответственно $f^{(r)}(t)\le 1$) почти всюду. Известна следующая теорема Хермандера [3].

Теорема 1. *Пусть* $h\in W_{(-\infty,\infty)}^{r,-}$, $r=2,3,\ldots$, *и для некоторого* $\lambda>0$ $\min\phi_{\lambda,r}(t) < h(t) < \max\phi_{\lambda,r}(t)$. *Если в некоторых точках* $x, y\in R$ $h(x) = \phi_{\lambda,r}(y)$, *то* $h'(x)\le\phi'_{\lambda,r}(y)$, *если* $\phi'_{\lambda,r}(y)>0$, *и* $h'(x)\ge\phi'_{\lambda,r}(y)$, *если* $\phi'_{\lambda,r}(y)<0$.

Соответствующее утверждение имеет место для функций из класса $W^{r,+}_{(-\infty,\infty)}$. В этом случае вместо функций $\phi_{\lambda,r}(t)$ следует использовать функции $\psi_{\lambda,r}(t)$. Функции $\phi_{\lambda,r}(t)$ и $\psi_{\lambda,r}(t)$ принято называть функциями сравнения.

Если $n \ge r-1$, то в силу ортогональности многочленов степени n функции $h(t)$ из классов $W_n^{r,\pm}$ удовлетворяют условиям $h^{(k)}(-1) = h^k(1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$, благодаря которым, доопределяя каждую функцию $h(t)$ из класса $W_n^{r,\pm}$ нулем вне отрезка $[-1,1]$, можно считать, что $W_n^{r,\pm} \subset W^{r,\pm}_{(-\infty,\infty)}$ для $r \ge 1$. Из неравенства (8) (соответственно (9)) следует, что для любой функции $h(t) \in W_n^{r,-}$ (соответственно $h(t) \in W_n^{r,+}$) имеют место неравенства

$$\min \phi_{n,r}(t) \;<\; C_{r,0}^{-1} h(t) \;<\; \max \phi_{n,r}(t)$$

(соответственно

$$\min \psi_{n,r}(t) \;<\; C_{r,0}^{-1} h(t) \;<\; \max \psi_{n,r}(t)).$$

Поэтому теорема сравнения имеет место для любой пары $C_{r,0}^{-1} h \in W_n^{r,-}$ и $\phi_{n,r}(t)$ (соответственно $C_{r,0}^{-1} h \in W_n^{r,+}$ и $\psi_{n,r}(t)$).

Очевидно, что теорема 1 даст грубую оценку, если мы будем оценивать производную функции $h(t)$ из класса $W_n^{r,\pm}$ в точках, удаленных от точки 0. В связи с необходимостью иметь аналог теоремы Хермандера, позволяющий достаточно хорошо оценивать производную функции $h(t)$ из класса $W_n^{r,\pm}$ для всех $x \in (-1, 1)$, введем следующее определение.

Определение 1. *Пусть* $h \in W_n^{r,-}$, $x \in (-1, 0)$. *Дифференцируемая функция* f *называется функцией сравнения для* h *в точке* x, *если* $\min_t f(t) \le h(t) \le \max_t f(t)$, $t \in (-1, x]$, $f(x) = h(x)$ *и* $\operatorname{sign} f'(x) = \operatorname{sign} h'(x)$.

Введем следующие обозначения: $\lambda(x) = n \big/ \sqrt{1-x^2}$, $\nu(x) = \pi\sqrt{1-x^2}/n$. Заметим, что $2\nu(x)$ есть период функций $\phi_{\lambda(x),r}(t)$ и $\psi_{\lambda(x),r}(t)$. Нетрудно доказать (см. [4], лемму 1), что для любого $x \in (-1+\pi/n, -\pi/n)$ существует $x^* \in (x, x, +\pi/n)$ такое, что

$$x^* \;=\; x \;+\; \nu(x^*), \tag{10}$$

и при этом большому значению x соответствует большее x^*.

Лемма 1. *Пусть* $h \in W_n^{k,-}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $x \in (-1+\pi/n, -\pi/n)$. *В случаях* $k = 4m+1$, $h(x) < 0$; $k = 4m$, $h'(x) > 0$; $k = 4m-1$, $h(x) > 0$; $k = 4m-2$, $h'(x) < 0$ *функцией сравнения для* h *будет функция*

$$f_{r,k,1}(t) \;=\; C_{r,\bar{x}}\, \phi_{\lambda(\bar{x}),k}(t-\bar{x}),$$

а в случаях $k = 4m+1$, $h(x) > 0$; $k = 4m$, $h'(x) < 0$; $k = 4m-1$, $h(x) < 0$; $k = 4m-2$, $h'(x) > 0$ — *функция*

$$f_{r,k,2}(t) \;=\; C_{r,\bar{x}}\, \phi_{\lambda(\bar{x}),k}(\nu(\bar{x}) + t - \bar{x}),$$

где в каждом из случаев $\bar{x}$ *выбрано так, что* $0 < \bar{x} - x < \lambda(\bar{x})$, *а величина* $C_{r,\bar{x}}$ *определена равенством* (7).

Доказательство. Рассмотрим основные случаи. Пусть $k = 4m+1$, $h(x) < 0$ и $y \in [x, x^*]$. Тогда функция $C_{r,y}\, \phi_{\lambda(y),k}(t)$ выпукла вниз на отрезке $[\nu(y),$

$2\nu(y)]$ и в силу неравенств (8)

$$0 > h(x) > \min_t C_{r,y}\,\phi_{\lambda(y),k}(t).$$

Поэтому существует единственное число $\alpha(y)$ такое, что $0 < \alpha(y) < \nu(y)$ и в точке $2\nu(y) - \alpha(y)$ функция $C_{r,y}\,\phi_{\lambda(y),k}(t)$ принимает значение $h(x)$, а знак производной совпадает со знаком производной $h(x)$. Очевидно, что функция $\alpha(y)$ непрерывна на отрезке $\left[x, x^*\right]$. На этом отрезке зададим еще функцию $g(y) = x + \alpha(y) - y$. Поскольку $g(x) = \alpha(x) > 0$, а $g(x^*) = x + \alpha(x^*) - x^* = -\nu(x^*) + \alpha(x^*) < 0$, существует точка $\bar{x} \in \left[x, x^*\right]$ такая, что $g(\bar{x}) = 0$, следовательно, $\bar{x} = x + \alpha(\bar{x})$.

Положим

$$f_{r,k,1}(t) = C_{r,\bar{x}}\,\phi_{\lambda(\bar{x}),k}(t - \bar{x}).$$

В силу неравенств (8)

$$\min_t f_{r,k,1}(t) \le h(t) \le \max_t f_{r,k,1}(t) \quad \forall t \in (-1, x), \quad f_{r,k,1}(x) = h(x),$$

и знак производной $f_{r,k,1}(t)$ в точке x совпадает с $\operatorname{sign} h'(x)$.

Рассмотрим случай $k = 4m + 1$, $h(x) > 0$. Используя выпуклость вверх функции $C_{r,y}\,\phi_{\lambda(y),k}(t)$ на отрезке $[0, \nu(y)]$ и неравенства (8), для каждого y из отрезка $\left[x, x^*\right]$ определяем единственное число $\alpha(y)$ такое, что $0 < \alpha(y) < \nu(y)$ и в точке $\nu(y) - \alpha(y)$ функция $C_{r,y}\,\phi_{\lambda(y),k}(t)$ принимает значение $h(x)$, а знак производной совпадает со знаком производной $h'(x)$. Как и в предыдущем случае, определяем число $\bar{x}$ и полагаем

$$f_{r,k,2}(t) = C_{r,\bar{x}}\,\phi_{\lambda(\bar{x}),k}(\nu(\bar{x}) + t - \bar{x}). \tag{11}$$

Очевидно, что для функции $f_{r,k,2}(t)$ выполняются условия 1 – 3, определяющие функцию сравнения для функции $h(t)$ в точке x.

Теперь рассмотрим случай $k = 4m$, $h'(x) < 0$. Пусть $y \in \left[x, x^*\right]$. Поскольку в силу неравенств (8) число $h(x)$ находится между наименьшим и наибольшим значениями функции $C_{r,y}\,\phi_{\lambda(y),k}(t)$ и на отрезке $[0, \nu(y)]$ эта функция убывает, существует единственное число $\alpha(y)$ такое, что $0 < \alpha(y) < \nu(y)$ и $C_{r,y}\,\phi_{\lambda(y),k}(\nu(y) - \alpha(y)) = h(x)$. Далее, как и выше, определяем число $\bar{x}$ и задаем функцию сравнения $f_{r,k,2}(t)$ равенством (11). Остальные случаи аналогичны.

Лемма доказана.

***Замечание* 1.** Функции сравнения $f_{r,k,1}(t)$ и $f_{r,k,2}(t)$ определены так, что производная функции сравнения для $h(t)$ в точке x является функцией сравнения для $h'(t)$ в точке $x_1 \in (\bar{x} - \nu(\bar{x}), \bar{x})$, если только $h'(x_1) = f'_{r,k,1}(x_1)$ (соответственно $h'(x_1) = f'_{r,k,2}(x_1)$) и $\operatorname{sign} h''(x_1) = \operatorname{sign} f''_{r,k,1}(x_1)$ (соответственно $\operatorname{sign} h''(x_1) = \operatorname{sign} f''_{r,k,2}(x_1)$).

Действительно, пусть $k = 4m + 1$, $h(x) < 0$, функция $f_{r,k,1}(t)$ является функцией сравнения для $h(t)$ в точке x и $h'(x_1) = f'_{r,k,1}(x_1)$, а также $\operatorname{sign} h''(x_1) = \operatorname{sign} f''_{r,k,1}(x_1)$, где $x_1 \in (\bar{x} - \nu(\bar{x}), \bar{x})$. Но $\operatorname{sign} f''_{r,k,1}(x_1) = 1$, так как функция $f_{r,k,1}(t)$ выпукла вверх на интервале $(\bar{x} - \nu(\bar{x}), \bar{x})$. Следовательно, для $h'(t)$ необходимо брать функцию сравнения $f_{r,4m,1}(t)$, которая, очевидно, совпадает с $f'_{r,4m+1,1}(t)$. В случае $k = 4m - 1$, $h(x) > 0$ рассуждения аналогичны.

Рассмотрим случай $k = 4m$, $h'(x) > 0$. В силу определения функцией сравнения для $h(t)$ в точке x является $f_{r,k,1}(t)$. Предположим, что $h'(x_1) = f'_{r,k,1}(x_1)$, а $\operatorname{sign} h''(x_1) = \operatorname{sign} f''_{r,k,1}(x_1)$, где $x_1 \in (\bar{x} - \nu(\bar{x}), \bar{x})$. Поскольку $f'_{r,k,1}(t) > 0$ на интервале $(\bar{x} - \nu(\bar{x}), \bar{x})$, то $h'(x_1) > 0$. Следовательно, для $h'(t)$ в точке x_1 необходимо брать функцию сравнения $f_{r,4m-1,1}(t)$, а она совпадает с $f'_{r,4m,1}(t)$. Тот же результат получаем в случае $k = 4m - 2$, $h'(x) < 0$, а также в случаях, когда функцией сравнения является функция $f_{r,k,2}(t)$.

***Замечание* 2.** Если $x \in [\pi/n, 1 - \pi/n]$, то построение функций сравнения аналогично. В этом случае число x^* определяется равенством $x^* = x - \nu(x^*)$, а число $\bar{x}$ удовлетворяет неравенству $0 < x - \bar{x} < \nu(\bar{x})$. Таким же образом определяются (и доказывается их существование) функции сравнения для функций из класса $W_n^{r,+}$.

Определение 2. *Пусть* $h(t)$ *и* $f(t)$ — *дифференцируемые функции на интервале* $(-1, 1)$, *в некоторой точке* $x \in (-1, 1)$ $h(x) = f(x)$ *и производные в этой точке имеют одинаковый знак. Будем говорить, что* $h(t)$ *изменяется в точке* x *быстрее функции* $f(t)$, *если* $\operatorname{sign}(h(t) - f(t)) = \operatorname{sign}(f'(x)(t - x))$ *для всех* t *из некоторой окрестности точки* x.

Очевидно, что если $|h'(x)| > |f'(x)|$, то $h(t)$ изменяется в точке x быстрее функции $f(t)$. Но $h(t)$ может изменяться в точке x быстрее, если $|h'(x)| = |f'(x)|$. Если же $h(t)$ не изменяется быстрее в точке x, то $|h'(x)| \le |f'(x)|$.

Теорема 2. *Пусть* $h \in W_n^{k,-}$, $k = 1, 2, \dots, r$. *Если* $\omega(t)$ *является функцией сравнения для* $h(t)$ *в точке* x, *т. е.* $\omega(t)$ *есть* $f_{r,k,1}(t)$ *или* $f_{r,k,2}(t)$, *то* $h(t)$ *не изменяется быстрее* $\omega(t)$ *в точке* x *и, следовательно,* $|h'(x)| \le |\omega'(x)|$. *При этом в случае* $k = 1$ *следует сравнивать значения производных только в точках, в которых производная отрицательная.*

Доказательство в основном совпадает с доказательством теоремы 1 из [4]. В случае $k = 1$ $h'(x) \ge -1$, а во всех точках, где $h(x) = C_{r,\bar{x}}\,\phi_{\lambda(\bar{x}),1}(t)$, производная функции $C_{r,\bar{x}}\,\phi_{\lambda(\bar{x}),1}(t)$ равна $-C_{r,\bar{x}} < -1$. Поэтому в точке x $h(t)$ убывает не быстрее функции сравнения. Пусть $k = 2$. Предположим, что теорема не имеет места. Тогда найдутся функция $h \in W_n^{2,-}$ и точка x такие, что $h(x) = f_{r,2,1}(x)$, если $h'(x) < 0$, или $h(x) = f_{r,2,2}(x)$, если $h'(x) > 0$, и $h(t)$ изменяется быстрее функции сравнения в точке x. В первом случае разность $h(t) - f_{r,2,1}(t)$ в некоторой точке $y \in (x - \nu(\bar{x}), x)$ имеет максимум, а во втором случае разность $h(t) - f_{r,2,2}(t)$ имеет максимум в точке z интервала $(x, x + \nu(\bar{x}))$. Следовательно, $h'(y) - f'_{r,2,1}(y) = 0$ и $h''(y) - f''_{r,2,1}(y) \le 0$ или $h'(z) - f'_{r,2,2}(z) = 0$ и $h''(z) - f''_{r,2,2}(z) \le 0$. Последние неравенства невозможны, так как из определения класса $W_n^{2,-}$ следует, что для всех t, где производная существует, $h''(t) - \omega''(t) > 0$. Далее применим метод математической индукции. Предположим, что теорема имеет место для $k - 1$, и докажем, что она справедлива для k. Пусть сначала k — нечетное число, для определенности $k = 4m - 1$. Случай $k = 4m + 1$ аналогичен. Предположим, что теорема не имеет места. Тогда найдутся функция $h \in W_n^{4m-1,-}$ и точка x такие, что $h(x) = f_{r,k,1}(x)$, если $h(x) > 0$, или $h(x) = f_{r,k,2}(x)$, если $h(x) < 0$, и $h(t)$ изменяется быстрее соответствующей функции сравнения в точке x. Далее будем рассматривать случай $h(x) > 0$. В случае $h(x) < 0$ рассуждения аналогичны. Если $h'(x) > 0$, то в некоторой точке $y \in (x, \bar{x})$ разность $h(t) - f_{r,k,1}(t)$ имеет максимум, а если $h'(x) < 0$, то эта разность имеет максимум в некоторой точке $z \in (x - \nu(\bar{x}), x)$. Следовательно, $h'(y) - f'_{r,k,1}(y) = 0$ и $h''(y) - f''_{r,k,1}(y) \le 0$ или $h'(z) - f'_{r,k,1}(z) = 0$ и $h''(z) - f''_{r,k,1}(z) \le 0$. Если в последних неравенствах имеет место знак строгого неравенства, то сразу получаем противоречие с утверждением теоремы для $k = 4m - 2$. Если в этих неравенствах имеет место знак равенства, то разность $h'(t) - f'_{r,k,1}(t)$ в точке y или z меняет знак с плюса на минус, а это означает, что $h'(t)$ изменяется быстрее $f'_{r,k,1}(t)$ в точке y или z, что противоречит утверждению теоремы для $k = 4m - 2$.

Рассмотрим теперь случай $k = 4m$. Снова предполагаем, что существуют функция $h \in W_n^{4m,-}$ и точка x, для которых теорема неверна. Пусть для определенности $h'(x) > 0$ (случай $h'(x) < 0$ аналогичен). Предположим сначала, что $f''_{r,4m,1}(x) \le 0$. Тогда $f''_{r,4m,1}(t) \le 0$ и на интервале $(x, \bar{x})$ и в некоторой точке $y \in (x, \bar{x})$ разность $h(t) - f_{r,4m,1}(t)$ имеет максимум. Следовательно, $h'(y) = f'_{r,4m,1}(y)$ и разность $h'(t) - f'_{r,4m,1}(t)$ в точке y меняет знак с плюса на минус, т. е. $h'(t)$ изменяется быстрее в точке y, что противоречит утверждению теоремы для $k = 4m - 1$. Пусть теперь $f''_{r,4m,1}(x) > 0$. Тогда $f''_{r,4m,1}(t) > 0$, и на интервале $(\bar{x} - \nu(\bar{x}), x)$ и в некоторой точке $z \in (\bar{x} - \nu(\bar{x}), x)$ разность $h(t) - f_{r,4m,1}(t)$ имеет минимум. Следовательно, $h'(z) = f'_{r,4m,1}(z)$ и разность $h'(t) - f'_{r,4m,1}(t)$ в точке z меняет знак с минуса на плюс, т. е. $h'(t)$ изменяется быстрее $f'_{r,4m,1}(t)$ в точке z, что противоречит утверждению теоремы для $k = 4m - 1$.

Теорема доказана.

Определение 3. *Пусть* $h \in W_n^{r,-}$ *и* $(a, b) \subset (-1 + \pi/n,\ \pi/n)$. *Функцией сравнения для* h *на интервале* (a, b) *будем называть любую функцию* $f(t)$, *заданную и дифференцируемую на действительной оси, такую, что если в некоторых точках* $x \in (a, b)$ *и* $y \in R^1$ $h(x) = f(y)$, *то* $|h'(x)| \le |f'(y)|$ *при условии, что знаки производных совпадают.*

Теорема 3. *Пусть* $h \in W_n^{r,-}$ *и* $(a, b) \subset (-1 + \pi/n,\ \pi/n)$. *Функцией сравнения для* h *на интервале* (a, b) *будет функция*

$$f(t) = C_{r,a}\, \phi_{\lambda(b^*),r}(t), \tag{12}$$

где $C_{r,a}$ *определяется равенством* (7), *а* b^* — *равенством* (10).

Доказательство. Пусть $h \in W_n^{r,-}$ и $x \in (a, b)$. Рассмотрим функцию сравнения $\omega(t)$ для $h(t)$ в точке x, т. е. $\omega(t)$ есть $f_{r,k,1}(t)$ или $f_{r,k,2}(t)$, и возьмем любое $y \in R^1$, для которого $h(x) = \omega(x) = f(y)$ и знаки производных в этих точках совпадают. Поскольку $C_{r,\bar{x}} < C_{r,a}$, применяя теорему 1 для функций $C_{r,a}^{-1}\,\omega(t)$ и $\phi_{\lambda(b^*),r}(t)$, получаем

$$\left| C_{r,a}^{-1}\,\omega'(x) \right| \le \left| \phi'_{\lambda(b^*),r}(y) \right|.$$

Следовательно, в силу теоремы 2

$$|h'(x)| \le |\omega'(x)| \le C_{r,a} \left| \phi'_{\lambda(b^*),k}(y) \right| = |f'(y)|.$$

Теорема 3 доказана.

***Замечания*. 3.** Из доказательства теоремы 3 следует, что функцией сравнения для $h(t)$ на интервале (a, b) будет также функция вида $f(t - t_0)$ для любого $t_0 \in R^1$, а $f'(t - t_0)$ будет функцией сравнения для $h'(t)$ на этом же интервале (a, b).

4. Если $b \in \left(-\pi/n,\ \pi/n\right)$, то в качестве функции сравнения для $h(t)$ на интервале (a, b) следует взять функцию $f(t) = C_{r,0}\,\phi_{n,r}(t)$, так как теорема Хермандера для функций $C_{r,0}^{-1}\,h(t)$ и $\phi_{n,r}(t)$ в этом случае эквивалентна теореме 3.

5. Если $f(t)$ является функцией сравнения для $h(t)$ на интервале (a, b), то функция $z(t) = f(dt)$, $d > 1$, будет функцией сравнения для $h(t)$ на интервале (a, b). При этом если в некоторых точках $x \in (a, b)$ и $y \in R^1$ $h(x) = z(y)$, то $|h'(x)| < |z'(y)|$ при условии, что знаки производных совпадают. Действительно, пусть $y_1 = dy$. Тогда $f(y_1) = f(dy) = z(y) = h(x)$ и в силу теоремы 3

$$|h'(x)| \leq |f'(y_1)| = |f'(dy)| < d|f'(dy)| = |z'(y)|.$$

1. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
2. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Об одностороннем приближении усеченных степеней алгебраическими многочленами в среднем // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2005. – **248**. – С. 185 – 193.
3. *Hermander L.* A new proof and a generalization of inequality of Bohr // Math. scand. – 1954. – № 2. – P. 33 – 45.
4. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Наилучшее приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1995. – **210**. – С. 171 – 188.

Получено 03.11.06