УДК 519.21

Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО РІВНОМІРНУ ЗБІЖНІСТЬ ВЕЙВЛЕТ-РОЗКЛАДІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. II

Conditions are established under which wavelet expansions of random processes from the Orlicz spaces of random variables converge uniformly with probability one on a bounded interval.

Найдены условия, при которых вейвлет-разложения случайных процессов из пространств Орлича случайных величин сходятся равномерно с вероятностью единица на ограниченном интервале.

Вступ. Ця стаття є продовженням роботи [1], тому нумерацію пунктів і формул в ній продовжено.

У п'ятому пункті результати першої частини про поведінку випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин застосовано до процесів із просторів Орліча експоненціального типу.

В шостому пункті доведено теорему про рівномірну збіжність вейвлет-розкладів.

У сьомому пункті наведено умови, за яких вейвлет-розклади випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин збігаються рівномірно на обмеженому інтервалі з імовірністю одиниця. Окремо розглянуто вейвлет-розклади випадкових процесів з $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, та просторів Орліча експоненціального типу.

5. Випадкові процеси із просторів Орліча експоненціального типу.

Означення 5.1 [2]. *Простір Орліча* $L_U(\Omega)$ *називається простором Орліча експоненціального типу, якщо він породжується функцією вигляду* $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$, *де* $\psi(x)$ — *деяка* C-*функція. Згідно з* [2], *простори Орліча експоненціального типу позначатимемо* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$, *а норму в цьому просторі* — $\|\cdot\|_{E_\psi}$.

Теорема 5.1 [2]. *Нехай* $\psi = \{\psi(x),\ x \in R\}$ — *довільна* C-*функція та* $\xi \in \mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$. *Тоді для всіх* $x > 0$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\{|\xi| \geq x\} \leq 2\exp\left\{-\psi\left(\frac{x}{\|\xi\|_{E_\psi}}\right)\right\}.$$

Якщо для деяких $C > 0$, $D > 0$ *та всіх* $x > 0$ *виконується*

$$\mathrm{P}\{|\xi| > x\} \leq C\exp\left\{-\psi\left(\frac{x}{D}\right)\right\},$$

то $\xi \in \mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$ *та* $\|\xi\|_{E_\psi} \leq (1 + C)D$.

Теорема 5.2. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in T\}$, $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, — *сепарабельний випадковий процес із простору* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$. *Нехай існує така функція* $\sigma = \{\sigma(h), 0 \leq h \leq b - a\}$, *що* $\sigma(h)$ *є неперервною, монотонно зростає,* $\sigma(0) = 0$, *та*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h \\ t,s\in[a,b]}} \|X(t) - X(s)\|_{E_\psi} \leq \sigma(h).$$

Нехай для деякого $0 < \varepsilon < b - a$ *збігається інтеграл*

$$\int_0^{\varepsilon} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du \;<\; \infty.$$

Тоді випадкова величина $\sup\limits_{t,s \in [a,b]} |X(t)|$ *належить простору* $\mathrm{Exp}_{\psi}(\Omega)$ *і для будь-якої точки* $t_0 \in [a, b]$ *та будь-якого*

$$0 < \theta < \min\left(1, \sigma\left(\frac{b-a}{2(\exp\{\psi(2)\} - 1)}\right)\frac{1}{w_0}\right)$$

*має місце рівніст*ь

$$\left\| \sup_{t \in [a,b]} |X(t)| \right\|_{E_\psi} \;\le\; \|X(t_0)\|_{E_\psi} \;+$$

$$+\;\exp\{\psi(2)\}\,\frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{w_0\theta} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du \;=\; D_\psi(t_0), \tag{5.1}$$

де $w_0 = \sigma\left(\sup\limits_{t \in [a,b]} |t_0 - t|\right) \le \sigma(b-a)$.

Випадковий процес $X(t)$ *є вибірково неперервним з імовірністю одиниця. Для всіх* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t \in [a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \;\le\; 2\exp\left\{-\psi\left(\frac{x}{D_\psi(t_0)}\right)\right\}. \tag{5.2}$$

Доведення. Нерівність (5.1) та твердження про неперервність процесу випливають відповідно з наслідків 2.1 та 2.2, оскільки функція $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$ задовольняє умову g з $Z_0 = 2$, $K = 1$, $A = 1$ (див. [2]), тобто

$$C_U \;=\; \exp\{\psi(2)\}, \qquad U^{(-1)}(z) \;=\; \psi^{(-1)}(\ln(z+1)), \quad z > 0.$$

Обмеження на θ випливають з обмежень на θ з наслідку 2.1. Нерівність (5.2) випливає з (5.1) та теореми 5.1.

Теорема 5.3. *Нехай* $X = \{X(t),\, t \in T\}$, $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, *— сепарабельний випадковий процес із простору* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$. *Нехай для деякого* $\delta < 1$, $C > 0$ *виконується нерівність*

$$\sup_{\substack{|t-s| \le h \\ t,s \in [a,b]}} \|X(t) - X(s)\|_{E_\psi} \;\le\; C\left(\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{h}\right)\right)\right)^{-\frac{1}{\delta}}. \tag{5.3}$$

Тоді випадкова величина $\sup\limits_{t,s \in [a,b]} |X(t)|$ *належить простору* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$ *і для будь-якої точки* $t_0 \in [a, b]$ *та*

$$0 < \theta < \min\left(1, \left(\frac{\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \left(\sup\limits_{t \in [a,b]} |t_0 - t|\right)^{-1}\right)\right)}{\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \dfrac{2(\exp\{\psi(2)\} - 1)}{b-a}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)$$

має місце нерівність

$$\left\| \sup_{t\in[a,b]} |X(t)| \right\|_{E_\psi} \le D_{\psi,\delta}(t_0),$$

де

$$D_{\psi,\delta}(t_0) = \|X(t)\|_{E_\psi} + \exp\{\psi(2)\} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1-\theta} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\max\left(1, \frac{b-a}{2}\right)\right)\right) w_0 + C^\delta \frac{1}{1-\theta} \theta^{-\delta} \frac{1}{1-\delta} w_0^{1-\delta} \right),$$

$$w_0 = C\left(\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \left(\sup_{t\in[a,b]} |t_0 - t| \right)^{-1}\right)\right)\right)^{-\frac{1}{\delta}}.$$

Випадковий процес $X(t)$ *є вибірково неперервним з імовірністю одиниця. Для всіх* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{a\le t\le b} |X(t)| > \varepsilon \right\} \le 2\exp\left\{ -\psi\left(\frac{\varepsilon}{D_{\psi,\delta}(t_0)} \right)\right\}.$$

Доведення. Легко бачити, що $\sigma^{(-1)}(u) = \left(\exp\left\{ \psi\left(\left(\frac{C}{u} \right)^\delta \right)\right\} - 1 \right)^{-1}$. Отже,

$$\psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right)\right) =$$

$$= \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2}\left(\exp\left\{ \psi\left(\left(\frac{C}{u} \right)^\delta \right)\right\} - 1 \right) + 1 \right)\right) \le$$

$$\le \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\max\left(1, \frac{b-a}{2}\right) \exp\left\{ \psi\left(\left(\frac{C}{u} \right)^\delta \right)\right\}\right)\right) =$$

$$= \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\max\left(1, \frac{b-a}{2}\right)\right) + \psi\left(\left(\frac{C}{u} \right)^\delta \right)\right) \le$$

$$\le \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\max\left(1, \frac{b-a}{2}\right)\right)\right) + \left(\frac{C}{u} \right)^\delta. \tag{5.4}$$

Остання нерівність в (5.4) випливає з того, що [2] при $x > 0$, $y > 0$ $\psi^{(-1)}(x + y) \le \le \psi^{(-1)}(x) + \psi^{(-1)}(y)$. Таким чином,

$$\int_0^{w_0\theta} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right)\right) du \le \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\max\left(1, \frac{b-a}{2}\right)\right)\right) w_0\theta +$$

$$+ \int_0^{w_0\theta} u^{-\delta}\, du\, C^\delta = \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\max\left(1, \frac{b-a}{2}\right)\right)\right) w_0\theta + C^\delta \frac{1}{1-\delta} w_0^{1-\delta} \theta^{1-\delta}.$$

Отже, з (5.1) випливає, що $\left\| \sup_{t\in[a,b]} |X(t)| \right\|_{E_\psi} \le D_{\psi,\delta}(t_0)$.

Всі інші твердження є наслідками теореми 5.2.

***Приклад* 5.1.** Нехай $\psi(x) = L|x|^\alpha$, $1 \le \alpha$, де $L > 0$ — деяка константа. Нехай $b - a \geq 2$. Тоді умова (5.3) набирає вигляду: нехай існують константи $\delta < 1$ та $D > 0$ такі, що

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h \\ t,s\in[a,b]}} \| X(t) - X(s) \|_{E_\psi} \leq \frac{D}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)\right)^{1/\alpha\delta}}.$$

Тоді

$$D_{\psi,\delta} = \| X(t_0) \|_{E_\psi} + \exp\left\{L|2|^\alpha\right\}\frac{1}{1-\theta}\left(\left(\frac{\ln\frac{b-a}{2}}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}} w_0 + \frac{D^\delta}{L^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{1-\delta} w_0^{1-\delta}\theta^{-\delta}\right),$$

де

$$0 < \theta < \min\left(1, \frac{\left(\ln\left(1+\sup_{t\in[a,b]}|t_0 - t|\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{\delta\alpha}}}{\left(\ln\left(1+\frac{2\left(\exp\left\{L\cdot 2^\alpha\right\}-1\right)}{b-a}\right)\right)^{\frac{1}{\delta\alpha}}}\right),$$

$$w_0 = D\left(\ln\left(1+\frac{1}{\sup_{t\in[a,b]}|t - t_0|}\right)\right)^{-\frac{1}{\delta\alpha}}.$$

Теорема 5.4. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ *— сепарабельний випадковий процес із простору* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$. *Припустимо, що виконуються наступні умови*:

B_k *— інтервали* $\left[a_k, a_{k+1}\right]$ *такі, що* $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty$, $a_{k+1} - a_k > 2$, $k \in Z$, $\bigcup_{k\in Z} B_k = R$;

на кожному з інтервалів B_k *існують такі функції* $\sigma_k = \{\sigma_k(h),\ 0 \leq h \leq a_{k+1} - a_k\}$, *що* $\sigma_k(h)$ *— неперервні монотонно зростаючі функції*, $\sigma_k(0) = 0$, *та* $\sup_{\substack{|t-s|\leq h \\ t,s\in B_k}} \| X(t) - X(s) \|_{E_\psi} \leq \sigma_k(h)$;

для деякого $\varepsilon > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^\varepsilon \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du < \infty;$$

$c = \{c(t),\ t \in R\}$ *— деяка неперервна функція, така, що* $c(t) > 0$, $r_k = \left(\inf_{t\in B_k} c(t)\right)^{-1}$, t_{0k} *— деяка точка з інтервалу* B_k;

θ_k *— довільні числа такі, що*

$$0 < \theta_k < \min\left(1, \sigma\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\left(\exp\{\psi(2)\}-1\right)}\right)\frac{1}{w_{0k}}\right), \text{ де } w_{0k} = \sigma_k\left(\sup_{t\in\left[a_k, a_{k+1}\right]}\left|t_{0k} - t\right|\right);$$

$$D_\psi(t_{0k}) = \left\| X(t_{0k}) \right\|_{E_\psi} + \exp\{\psi(2)\} \frac{1}{\theta_k(1-\theta_k)} \int_0^{w_{0k}\theta_k} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du,$$

$$w_{0k} = \sigma_k\left(\sup_{t \in [a_k, a_{k+1}]} |t_0 - t| \right);$$

для деякого $s > 2\max_{k \in Z} r_k D_\psi(t_{0k})$ *збігається ряд*

$$\sum_{k \in Z} \exp\left\{ -\psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} \right) \right\}. \tag{5.5}$$

Тоді для всіх $\varepsilon > 2s$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{t \in R} \frac{X(t)}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le 2\exp\left\{ -\psi\left(\frac{\varepsilon}{s} \right) \right\} \sum_{k \in Z} \exp\left\{ -\psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} \right) \right\} \tag{5.6}$$

та існує випадкова величина $\xi > 0$, $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *така, що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$ *для всіх* $t \in R$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 3.1, маємо

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{t \in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le \sum_{k \in Z} \mathrm{P}\left\{ \sup_{t \in B_k} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le \sum_{k \in Z} \mathrm{P}\left\{ \sup_{t \in B_k} |X(t)| > \frac{\varepsilon}{r_k} \right\}. \tag{5.7}$$

З теореми 5.2 випливає, що

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{t \in B_k} |X(t)| > \frac{\varepsilon}{r_k} \right\} \le 2\exp\left\{ -\psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} \right) \right\}, \tag{5.8}$$

де θ_k задовольняють нерівності з формулювання теореми. Оскільки при всіх $x > 2$, $y > 2$ $xy \ge x + y$, з того, що [2] $\psi(|x|+|y|) \ge \psi(x) + \psi(y)$, для $\dfrac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} > 2$ та $\dfrac{\varepsilon}{s} > 2$ маємо

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{r_k D_\psi(t_{0k})} \right) = \psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} \frac{\varepsilon}{s} \right) \ge \psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} + \frac{\varepsilon}{s} \right) \ge$$

$$\le \psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} \right) + \psi\left(\frac{\varepsilon}{s} \right).$$

Отже, для тих же ε та s

$$\exp\left\{ -\psi\left(\frac{\varepsilon}{r_k D_\psi(t_{0k})} \right) \right\} \le \exp\left\{ -\psi\left(\frac{\varepsilon}{s} \right) \right\} \exp\left\{ -\psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})} \right) \right\}, \tag{5.9}$$

тобто з (5.7) — (5.9) випливає (5.6) та твердження теореми.

Зауваження 5.1. Оскільки нерівність $xy \ge x + y$, $x > 0$, $y > 0$, має місце при $x > 1$ та $y > \dfrac{x}{x-1}$, то з доведення теореми 5.3 випливає, що її твердження має місце при $\dfrac{s}{\sup_{k \in Z} r_k D_\psi(t_{0k})} > x > 1$ та $\dfrac{\varepsilon}{s} > \dfrac{x}{x-1}$.

***Зауваження* 5.2.** Згідно з зауваженням 2.3 w_{0k} у виразі для $D_\psi(t_{0k})$ можна замінити на $2\sup_{t\in[a_k,b_k]}\|X(t)\|_{E_\psi}$.

Теорема 5.5. *Нехай* $X=\{X(t),\ t\in R\}$ — *сепарабельний випадковий процес із простору* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$. *Припустимо, що виконуються наступні умови*:

B_k — *інтервали* $[a_k, a_{k+1}]$ *такі, що* $-\infty < a_k < a_{k+1} < \infty$, $a_{k+1}-a_k > 2$, $k\in Z$, $\bigcup_{k\in Z} B_k = R$;

на кожному з інтервалів B_k *виконується нерівність*

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h\\ t,s\in B_k}}\|X(t)-X(s)\|_{E_\psi} \le C_k\left(\psi^{(-1)}\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{h}\right)\right)\right)\right)^{-\frac{1}{\delta}}, \quad C_k>0, \quad \delta<1; \tag{5.10}$$

$c=\{c(t),\ t\in R\}$ — *деяка неперервна функція така, що* $c(t)>0$, $r_k = \left(\inf_{t\in B_k} c(t)\right)^{-1}$, t_{0k} — *деяка точка з інтервалу* B_k;

θ_k — *довільні числа такі, що*

$$0 < \theta_k < \min\left(1, \left(\frac{\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1+\sup_{t\in[a_{k+1}-a_k]}|t_{0k}-t|\right)^{-1}\right)}{\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1+\frac{2(\exp\{\psi(2)\}-1)}{a_{k+1}-a_k}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right);$$

$$D_{\psi,\delta}(t_{0k}) = \|X(t_{0k})\|_{E_\psi} + \exp\{\psi(2)\}\frac{1}{1-\theta_k}\left(\psi^{(-1)}\left(\ln\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)w_{0k} + {}\right.$$
$$\left. + C_k^\delta\frac{1}{1-\delta}w_{0k}^{1-\delta}\theta_k^{-\delta}\right);$$

для деякого $s > 2\max_{k\in Z} r_k D_{\psi\delta}(t_{0k})$ *збігається ряд*

$$\sum_{k\in Z}\exp\left\{-\psi\left(\frac{s}{r_k D_{\psi\delta}(t_{0k})}\right)\right\}. \tag{5.11}$$

Тоді для всіх $\varepsilon > 2s$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in R}\frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\psi\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right\}\sum_{k\in Z}\exp\left\{-\psi\left(\frac{s}{r_k D_{\psi\delta}(t_{0k})}\right)\right\} \tag{5.12}$$

та існує випадкова величина $\xi>0$, $\mathrm{P}\{\xi<\infty\}=1$, *така, що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$ *для всіх* $t\in R$.

Теорема випливає з теорем 5.4 та 5.3. Зауваження 5.1 стосується також і цієї теореми.

Зауважимо, що оскільки при $c\ge 1$, $x>0$ $\psi^{(-1)}(cx)\le c\psi^{(-1)}(x)$ та при $c\ge 1$ $\ln\left(1+\frac{c}{a_{k+1}-a_k}\right)\le c\ln\left(1+\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\right)$, то нерівність (5.12) виконується для всіх таких θ_k, що

$$0 < \theta_k < \min\left(1, \left((2(\exp\{\psi(2)\} - 1))^{-\frac{1}{\delta}}\right)\right),$$

$$w_{0k} = C_k\left(\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sup\limits_{t\in[a_k, a_{k+1}]}|t_{0k} - t|}\right)\right)\right)^{-\frac{1}{\delta}}.$$

***Приклад* 5.2.** Нехай в теоремі 5.5 $\psi(x) = L|x|^{\alpha}$, $1 \le \alpha$, де $L > 0$ — деяка константа, $a_{k+1} - a_k > 2$. Нехай існують такі константи $D_k > 0$ та $\delta < 1$, що виконуються нерівності

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h\\ t,s\in B_k}} \| X(t) - X(s)\|_{E_\psi} \le \frac{D_k}{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{h}\right)\right)^{1/\delta\alpha}}. \tag{5.13}$$

Тоді, згідно з прикладом 5.1 (якщо $t_{0k} = a_k$),

$$D_{\psi\delta}(a_k) = \| X(a_k)\|_{E_\psi} +$$

$$+ \exp\{L\cdot 2^{\alpha}\}\frac{1}{1-\theta_k}\left(\left(\frac{\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)}{L}\right)^{1/\alpha} w_{0k} + \frac{D_k^{\delta}}{L^{1/\alpha}}\frac{1}{(1-\delta)} w_{0k}^{1-\delta}\theta_k^{-\delta}\right), \tag{5.14}$$

де $w_{0k} = D_k\left(\ln\left(1 + \frac{1}{a_{k+1} - a_k}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha\delta}}$.

Оскільки при $0 < x < \frac{1}{2}$ $\ln(1+x) \ge x 2\ln\frac{3}{2}$, то якщо покласти в (5.14) $\theta_k = \theta$, де θ — будь-яке число, таке, що

$$0 < \theta < \min\left(1, \left(\left(2\left(\exp\{L2^{\alpha}\} - 1\right)\right)^{-\frac{1}{\delta}}\right)\right), \tag{5.15}$$

то з (5.14) отримаємо нерівність

$$D_{\psi\delta}(a_k) \le \| X(a_k)\|_{E_\psi} + \exp\{L\cdot 2^{\alpha}\}\frac{1}{1-\theta} L^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\ln\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \times$$

$$\times D_k\left(\ln\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}-a_k}\right)\right)^{-\frac{1}{\delta\alpha}} + \frac{D_k^{\delta}}{L^{1/\alpha}}\frac{1}{(1-\delta)}\theta^{-\delta} D_k^{1-\delta}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}-a_k}\right)\right)^{-\frac{1-\delta}{\delta\alpha}} =$$

$$= \| X(a_k)\|_{E_\psi} + \exp\{L\cdot 2^{\alpha}\}\frac{1}{1-\theta}\frac{D_k}{L^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)\right)^{1/\alpha}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}-a_k}\right)\right)^{-\frac{1}{\delta\alpha}} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta^{\delta}(1-\delta)}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}-a_k}\right)\right)^{-\frac{1-\delta}{\delta\alpha}}\right) \le \| X(a_k)\|_{E_\psi} + \exp\{L\cdot 2^{\alpha}\}\frac{1}{1-\theta}\frac{D_k}{L^{1/\alpha}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\left(2\ln\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}}}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}(a_{k+1}-a_k)^{\frac{1}{\alpha\delta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1-\delta)\theta^{\delta}\left(2\ln\frac{3}{2}\right)^{\frac{1-\delta}{\alpha\delta}}}(a_{k+1}-a_k)^{\frac{1-\delta}{\alpha\delta}}\right). \tag{5.16}$$

Нехай тепер $D_k = D > 0$, $c(t)$ — монотонно зростаюча при $t > 0$ парна функція, $t_{0k} = a_k$, $r_k = \dfrac{1}{c(a_k)}$. Для цього прикладу умова (5.11) набирає вигляду: для деякого $s > 2\max\limits_{k\in Z} r_k D_{\psi\delta}(t_{0k})$ збігається ряд

$$\sum_{k\in Z}\exp\left\{-L\left(\frac{s}{r_k D_{\psi\delta}(t_{0k})}\right)^{\alpha}\right\} < \infty. \tag{5.17}$$

Легко перевірити, що умова (5.17) буде виконуватись, якщо при досить великих $|k|$ виконується умова

$$\left(r_k D_{\psi\delta}(a_k)\right) < \frac{C}{(\ln|k|)^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{5.18}$$

де $C > 0$ — деяка константа. Ряд (5.17) буде збігатися при s таких, що $\dfrac{Ls^{\alpha}}{c^{\alpha}} >$ > 1. Для того щоб виконувалась умова (5.18), досить, щоб при великих k виконувались умови

$$\left(\|X(a_k)\|_{E_\psi} r_k\right) \le \frac{C}{(\ln|k|)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{та} \quad r_k\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}(a_{k+1}-a_k)^{\frac{1}{\delta\alpha}} < \frac{C}{(\ln|k|)^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{5.19}$$

Якщо при досить великому $|k|$ покласти $a_k = e^{|k|}$, то легко пересвідчитись, що друга умова в (5.19) виконується, якщо при досить великих $|t|$ функція $c(t)$ має вигляд

$$c(t) = (\ln\ln|t|)^{\frac{1}{\alpha}}(\ln|t|)^{\frac{1}{\alpha}}|t|^{\frac{1}{\alpha\delta}}. \tag{5.20}$$

Отже, має місце, наприклад, така теорема.

Теорема 5.6. *Нехай* $X = \{X(t),\ t\in R\}$ — *сепарабельний випадковий процес із простору* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$, $\psi(x) = L|x|^{\alpha}$, $\alpha \ge 1$. *Нехай для* $X(t)$ *виконується умова* (5.13) *при* $D_k = D$, $c(t)$ *задано в* (5.20), $\|X(t)\|_{E_\psi} \le |t|^{\frac{1}{\alpha\delta}}|\ln|t||^{\frac{1}{\alpha}} \times$ $\times (\ln\ln|t|)^{\frac{1}{\alpha}}$, $|t| > e^2$. *Тоді існує така випадкова величина* $\xi > 0$, $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$ *для всіх* $t \in R$.

***Приклад* 5.3.** Нехай $Z_\beta = \left\{Z_\beta(t),\ t\in R, 0<\beta<1\right\}$ — WSSSI-процес із простору $S\,\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$ (див. означення 2.9 та 2.7). Це означає зокрема, що існує константа $D > 0$ така, що для всіх $t, s \in R$

$$\left\| Z_\beta(t) \right\|_{E_\psi} \le D\left(E\left(Z_\beta(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le D|t|^\beta, \tag{5.21}$$

$$\left\| Z_\beta(t) - Z_\beta(s) \right\|_{E_\psi} \le D\left(E\left(Z_\beta(t) - Z_\beta(s)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{t} \le D|t-s|^\beta. \tag{5.22}$$

Застосуємо теорему 5.4 до цього процесу.

Нехай $t_{0k} = a_k$, $\theta_k = \theta$, де θ — число, для якого виконується нерівність (5.15). Тоді $\sigma_k(h) = Dh^\beta$, $\sigma_k^{(-1)}(u) = \left(\frac{u}{D}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $w_{0k} \le D(a_{k+1} - a_k)^\beta$, $\left\| Z_\beta(a_k) \right\|_{E_\psi} \le D(a_k)^\beta$. Легко бачити, що

$$\int_0^{w_{0k}\theta} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)\right)du \le \int_0^{w_{0k}} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\left(\frac{u}{D}\right)^{\frac{1}{\beta}}} + 1\right)\right)du =$$

$$= \int_0^{w_{0k}\left(D(a_{k+1}-a_k)^\beta\right)^{-1}} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{1}{2\nu^{\frac{1}{\beta}}} + 1\right)\right)d\nu\, D(a_{k+1}-a_k)^\beta \le D(a_{k+1}-a_k)^\beta I_\beta,$$

де

$$I_\beta = \int_0^1 \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{1}{2\nu^{1/\beta}} + 1\right)\right)d\nu.$$

Останній інтеграл збігається, оскільки при досить великих x $\psi^{(-1)}(x) \le Cx$, $C > 0$ [2], а при $x \ge 0$ $\ln(1+x) \le \frac{1}{\alpha}x^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$.

Отже, при будь-якому $0 < \alpha \le 1$ та досить малих ν

$$\psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{1}{2\nu^{1/\beta}} + 1\right)\right) \le C\ln\left(\frac{1}{2\nu^{1/\beta}} + 1\right) \le \frac{C}{\alpha}\frac{1}{2^\alpha}\nu^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Зрозуміло, що при $\alpha < \beta$ $I_\beta < \infty$, тому в цьому випадку з (5.21), (5.22) випливає, що $D_\psi(a_k) \le D|a_k|^\beta + d\,I_\beta\,D(a_{k+1} - a_k)^\beta$, де $d = \exp\{\psi(2)\}\frac{1}{\theta(1-\theta)}$. Легко бачити, що умова (5.15) виконується, якщо для досить великих $k > 0$ $\frac{D_\psi(a_k)}{c(a_k)} <$ $< \frac{s}{\psi^{(-1)}(b(\ln k))}$, $b > 1$, $s > 0$. Якщо покласти $a_k = e^{|k|}$, $k > 0$, то зрозуміло, що ця умова виконується для функції $c(t) = |t|^\beta\,\psi^{(-1)}((\ln\ln|t|), b)$, $|t| > e^2$, $b > 1$.

Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 5.7. *Нехай* $Z_\beta = \left\{Z_\beta(t),\ t \in R,\ 0 < \beta < 1\right\}$ — *сепарабельний*

WSSSI-процес із простору $\mathrm{Exp}_{\psi}(\Omega)$. *Тоді існує така випадкова величина* $\xi > 0$, $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *що з імовірністю одиниця* $\left|Z_{\beta}(t)\right| < \xi c_{b\beta}(t)$, *де* $c_{b\beta}(t) = |t|^{\beta}\, \psi^{(-1)}(b(\ln\ln|t|))$, $|t| > e^2$, $b > 1$.

***Приклад* 5.4.** Нехай $X = \{X(t),\ t \in R\}$ — сепарабельний квазістаціонарний процес із простору $\mathrm{Exp}_{\psi}(\Omega)$ (див. означення 2.10), $\|X(t)\|_{E_{\psi}} \le E_X$. Нехай існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h),\ h > 0\}$, що

$$\sup_{|t-s|\le h} \|X(t) - X(s)\| \le \sigma(h). \tag{5.23}$$

Припустимо, що збігається інтеграл

$$\int_0^{E_X} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du < \infty.$$

Застосуємо до цього процесу теорему 5.4. Нехай $B_k = \left[a_k, a_{k+1}\right]$ — такі інтервали, що $-\infty < a_k < a_{k+1} < \infty$, $a_{k+1} - a_k > 2$, $\bigcup_{k\in Z} B_k = R$; $c = \{c(t),\ t \in R\}$ — деяка неперервна функція така, що $c(t) > 0$, $r_k = \left(\inf_{t\in B_k} c(t)\right)^{(-1)}$. Врахувавши зауваження 5.2, покладемо $w_{0k} = 2E_X$. Тоді при θ таких, що

$$0 < \theta < \min\left(1, \sigma\left(\frac{1}{\exp\{\psi(2)\} - 1}\right)\right)$$

(ми врахували, що $a_{k+1} - a_k \ge 2$), маємо

$$D_{\psi}(a_k) \le E_X + \exp\{\psi(2)\} \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{2E_X\theta} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du. \tag{5.24}$$

Оскільки $\psi^{(-1)}(x + y) \le \psi^{(-1)}(x) + \psi^{(-1)}(y)$, то

$$\psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) \le \psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \frac{a_{k+1} - a_k}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}\right)\right) \le$$

$$\le \psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \frac{a_{k+1} - a_k}{2}\right)\right) + \psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}\right)\right).$$

Отже, з (5.24) отримуємо нерівність

$$D_{\psi}(a_k) \le E_X + \exp\{\psi(2)\} \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{2E_X\theta} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}\right)\right) du +$$

$$+ \exp\{\psi(2)\} \frac{1}{1-\theta} 2E_X\, \psi^{(-1)}\left(\ln\left(1 + \frac{a_{k+1} - a_k}{2}\right)\right) = \hat{D}_{\psi}(a_k).$$

Тепер для того, щоб виконувалась умова (5.5), досить, щоб при $s > 2\max_{k\in Z} r_k \hat{D}_{\psi}(a_k)$ збігався ряд

$$\sum_{k\in Z} \exp\left\{-\psi\left(\frac{s}{r_k \hat{D}_{\psi}(a_k)}\right)\right\} < \infty. \tag{5.25}$$

Зрозуміло, що умова (5.25) буде виконуватись, якщо для деякого $B > 0$ збігатиметься ряд

$$\sum_{k\in Z} \exp\left\{-\psi\left(\frac{s}{Br_k\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1+\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)\right)}\right)\right\} < \infty. \tag{5.26}$$

Легко перевірити, що умова (5.26) буде виконуватись, якщо для досить великих $|k|$ $r_k\psi^{(-1)}\left(\ln\left(1+\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)\right) \le C\frac{1}{\psi^{(-1)}(b(\ln|k|))}$, де $b > 1$, а $C > 0$ — деяка константа $\left(\text{наприклад, } C = \frac{s}{B}\right)$. Якщо для досить великих $k > 0$ покласти $a_k = e^k$ (для від'ємних k взяти симетричне розбиття, а $c(t)$ — парна функція), то легко пересвідчитись, що останні нерівності виконуються для функції, що при досить великих $|t|$ має вигляд

$$c(t) = C\psi^{(-1)}(\ln|t|)\,\psi^{(-1)}(b\ln\ln|t|), \quad b > 1. \tag{5.27}$$

Отже, має місце, наприклад, така теорема.

Теорема 5.8. *Нехай* $X = \{X(t),\ t\in R\}$ *— сепарабельний квазістаціонарний процес із простору* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$, *для якого виконується умова* (5.23). *Тоді існує така випадкова величина* $\xi > 0$, $\mathrm{P}\{\xi<\infty\} = 1$, *що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$, *де* $c(t)$ *визначено в* (5.27).

6. Рівномірна збіжність вейвлет-зображень. Нехай $\varphi = \{\varphi(t),\ x\in R\}$ — функції з простору $L_2(R)$, $\hat\varphi(y) = \int_R e^{-iyx}\varphi(x)\,dx$ — перетворення Фур'є функції φ, $\varphi_{0k}(x) = \varphi(x-k)$. Нехай виконуються умови:

a_1) $\sum_{k\in Z}|\hat\varphi(y+2\pi k)|^2 = 1$ майже скрізь;

a_2) існує така періодична з періодом 2π функція $m_0(x)$, $m_0(x) \in$ $\in L_2([0;2\pi])$, що майже скрізь $\hat\varphi(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right)\hat\varphi\left(\frac{y}{2}\right)$;

a_3) $\hat\varphi(0)\ne 0$ та $\hat\varphi(y)$ є неперервною в нулі.

Тоді функція φ називається *f*-вейвлетом.

Нехай $\delta(x)$ — така функція, що її перетворення Фур'є має вигляд

$$\hat\delta(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\}\hat\varphi\left(\frac{y}{2}\right).$$

Функція $\delta(x)$ називається *m*-вейвлетом, що відповідає *f*-вейвлету φ. Нехай $\varphi_{jk}(x) = 2^{i/2}\varphi\left(2^i x - k\right)$, $\delta_{jk}(x) = 2^{i/2}\delta\left(2^i x - k\right)$, $j\in R$, $k\in R$.

Відомо (див., наприклад, [3 – 6]), що система функцій $\left\{\varphi_{0k},\ \delta_{jk}, j = 0, 1, 2, \ldots, k\in Z\right\}$ є ортонормованим базисом в $L_2(R)$. Будь-яку функцію $f\in L_2(R)$ можна зобразити у вигляді ряду, що збігається у середньому квадратичному:

$$f(x) = \sum_{k\in Z}\alpha_{0k}\,\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in Z}\beta_{jk}\,\delta_{jk}(x), \tag{6.1}$$

де $\alpha_{0k} = \int_R f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}\,dx$, $\beta_{jk} = \int_R f(x)\overline{\delta_{jk}(x)}\,dx$ та $\sum_{k\in Z}|\alpha_{0k}|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in Z}|\beta_{jk}|^2 < \infty$.

Зображення (6.1) називається вейвлет-зображенням.

Оскільки інтеграли, що визначають α_{0k} і β_{jk}, існують не лише для функцій з $L_2(R)$, можна отримати вейвлет-зображення для більш широкого класу функцій, ніж простір $L_2(R)$, які будуть збігатися в певних нормах.

Знайдемо умови, за яких зображення (6.1) будуть збігатися рівномірно на певному інтервалі $[\alpha, \beta]$.

Означення 6.1 [3, 6]**.** *Нехай* φ *— f-вейвлет. Для* φ *виконується умова S, якщо існує парна функція* $\Phi = \{\Phi(x),\ x \in R\}$ *така, що* $\Phi(0) < \infty$, $\Phi(x)$ *монотонно спадає при* $x \geq 0$, $\int_R \Phi(|x|)dx < \infty$ *та* $|\varphi(x)| \leq \Phi(|x|)$ *для* $x \in R$.

Далі нам буде потрібна така лема.

Лема 6.1. *Нехай для f-вейвлету* φ *виконується умова S з функцією* Φ *та* $\delta(x)$ *— m-вейвлет, що відповідає* φ. *Тоді при всіх* $x \in R$ *має місце нерівність*

$$|\delta(x)| \leq B\Phi\left(\left|\frac{2x-1}{4}\right|\right),$$

де $0 < B < \infty$ *— деяка константа.*

Доведення. Згідно з лемою 4.1 [6] (див. також [4]), функції $\varphi(x)$ та $\delta(x)$ допускають такі зображення:

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} h_k \varphi(2x-k),$$

де $h_k = \sqrt{2}\int_R \varphi(u)\overline{\varphi(2u-k)}\,du$ та $\sum_{k\in Z}|h_k|^2 < \infty$,

$$\delta(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} \lambda_k \varphi(2x-k), \tag{6.2}$$

де $\lambda_k = (-1)^{1-k}\,\overline{h_{1-k}}$.

Нехай $k \geq 0$. Тоді

$$h_k = \sqrt{2}\int_R \Phi(|u|)\Phi(|2u-k|)du = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{k/3} \Phi(|u|)\Phi(|k-2u|)du \; +$$

$$+\; \sqrt{2}\int_{k/3}^{\infty} \Phi(|u|)\Phi(|k-2u|)du \;\leq\; \Phi\left(\frac{k}{3}\right)\sqrt{2}\int_{-\infty}^{k/3}\Phi(|u|)du \; +$$

$$+\; \Phi\left(\frac{k}{3}\right)\sqrt{2}\int_{\frac{k}{3}}^{\infty}\Phi(|2u-k|)du \;\leq\; \sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{k}{3}\right)\left(\int_R \Phi(|u|)du + \int_R \Phi(|2u-k|)du\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{k}{3}\right)C_\Phi,$$

де $C_\Phi = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_R \Phi(|u|)du < \infty$.

При $k \leq 0$ аналогічно отримуємо $|h_k| \leq \Phi\left(\frac{|k|}{3}\right)C_\Phi$.

Отже, при всіх $k \in Z$ маємо

$$|h_k| \leq C_\Phi\,\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right). \tag{6.3}$$

Тепер з (6.2) та (6.3) випливає, що для кожного $x \in R$

$$|\delta(x)| \leq \sqrt{2}\sum_{k\in Z}|\varphi(2x-k)|\left|h_{1-k}\right| \leq C_\Phi\sqrt{2}\sum_{k\in Z}\Phi(|2x-k|)\,\Phi\left(\frac{|1-k|}{3}\right) =$$

$$= C_\Phi\sqrt{2}\sum_{k\in Z}\Phi(|2x-1-k|)\,\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right) = I(2x-1). \tag{6.4}$$

Позначимо $2x-1=0$. Тоді для $u>0$

$$I(u) \leq C_\Phi\sqrt{2}\left(\left(\int_{|k|\leq\frac{3}{4}u}\Phi(|u-k|)\right)\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right) + \int_{|k|\geq\frac{3}{4}u}\Phi(|u-k|)\,\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right)\right) =$$

$$= C_\Phi\sqrt{2}\big(A_1(u)+A_2(u)\big).$$

Легко бачити, що

$$A_2(u) \leq \Phi\left(\frac{u}{4}\right)\int_{|k|\geq\frac{3}{4}u}\Phi(|u-k|) \leq \Phi\left(\frac{u}{4}\right)\int_{k\in Z}\Phi(|u-k|),$$

$$A_1(u) \leq \Phi\left(\frac{u}{4}\right)\int_{|k|\leq\frac{3}{4}u}\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right) \leq \Phi\left(\frac{u}{4}\right)\int_{k\in Z}\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right).$$

Отже, для $u>0$

$$I(u) \leq \Phi\left(\frac{u}{4}\right)C_\Phi\sqrt{2}\left(\sum_{k\in Z}\Phi(|u-k|)\right) + \sum_{k\in Z}\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right). \tag{6.5}$$

Покажемо, що існує константа D, $0<D<\infty$, така, що для всіх $u>0$

$$\sum_{k\in Z}\Phi(|u-k|) + \sum_{k\in Z}\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right) < D.$$

Легко бачити, що

$$\sum_{k\geq u+1}\Phi(k-u) = \sum_{k\geq u+1}\int_{k-1}^{k}\Phi(k-u)\,d\nu \leq \sum_{k\geq u+1}\int_{k-1}^{k}\Phi(\nu-u)\,d\nu \leq$$

$$\leq \int_{u}^{\infty}\Phi(\nu-u)\,d\nu = \int_{0}^{\infty}\Phi(\nu)\,d\nu < \infty.$$

Аналогічно отримуємо $\sum_{k\leq u-1}\Phi(u-k) \leq \int_0^\infty\Phi(\nu)\,d\nu$,

$$\sum_{k\in Z}\Phi(|u-k|) \leq 2\left(\Phi(0)+\int_0^\infty\Phi(\nu)\,d\nu\right) = D_1 < \infty, \tag{6.6}$$

$$\sum_{k\in Z}\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right) < D_2 < \infty. \tag{6.7}$$

Отже, з (6.5) – (6.7) випливає, що для $u>0$

$$I(u) \leq C_\Phi\sqrt{2}\,(D_1+D_2)\,\Phi\left(\frac{u}{4}\right). \tag{6.8}$$

Для $u<0$ $\Phi(|u+k|) = \Phi(|-u-k|) = \Phi(||u|-k|)$, тобто для $u<0$

$$I(u) \leq C_\Phi \sqrt{2}\left(\sum_{k\in Z}\Phi(||u|-k|)\right)\Phi\left(\frac{|k|}{3}\right) \leq C_\Phi \sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{|u|}{4}\right)(D_1+D_2). \quad (6.9)$$

Тепер лема випливає з (6.4), (6.5), (6.8), (6.9).

Теорема 6.1. *Нехай для f-вейвлету φ виконується умова S з функцією Φ, $c = \{c(x),\ x \in R\}$ — така парна функція, що $c(x) > 1$, $x \in R$, $c(x)$ монотонно зростає при $x > 0$ та $\int_R c(x)\,\Phi(|x|)dx < \infty$. Крім того, існує така функція $0 < A(u) < \infty$, $u > 0$, що для досить великих x*

$$c(ax) \leq c(x)A(a), \quad a > 0. \quad (6.10)$$

Нехай $f = \{f(t),\ x \in R\}$ — така вимірна на R функція, що $|f(x)| \leq c(x)$, $x \in R$; $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$.

Тоді

$$f_m(x) = \sum_{k\in Z}\alpha_{0k}\,\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in Z}\beta_{jk}\,\delta_{jk}(x) \to f(x)$$

при $m \to \infty$ рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

$$\alpha_{0k} = \int_R f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}dx, \qquad \beta_{jk} = \int_R f(x)\overline{\delta_{jk}(x)}dx.$$

Доведення. Теорему 6.1 доведено в роботі [7] з додатковою умовою, що m-вейвлет $\delta(x)$ також задовольняє умову S з функцією Φ. Це додаткове припущення потрібно для обгрунтування існування β_{jk} та рівності

$$f_m(x) = \int_R f(y)\,Z_m(x, y)dy, \quad (6.11)$$

де $Z_m(x, y) = \sum_{k\in Z}\varphi_{0k}(x)\varphi_{0k}(y) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in Z}\psi_{jk}(x)\overline{\delta_{jk}(x)}$.

β_{jk} існує, оскільки з леми 6.1 випливає, що

$$\left|\beta_{jk}\right| \leq 2^{j/2}\int_R c(x)\left|\delta\left(x\cdot 2^j - k\right)\right|dx = 2^{-j/2}\int_R c\left(\frac{|u+k|}{2^j}\right)|\delta(u)|du \leq \quad (6.12)$$

$$\leq 2^{-j/2}\int_R c\left(\frac{|u+k|}{2^j}\right)\Phi\left(\frac{|2u-1|}{4}\right)du = 2^{(-j/2)+1}\int_R c\left(2^{-j}\left|2t+\frac{1}{2}+k\right|\right)\Phi(|t|)dt \leq$$

$$\leq 2^{(-j/2)+1}\int_R c\left(\left|2t+k+\frac{1}{2}\right|\right)\Phi(|t|)dt. \quad (6.12)$$

Оскільки для досить великих $|t|$

$$c\left(\left|2t+k+\frac{1}{2}\right|\right) \leq c\left(2|t|+|k|+\frac{1}{2}\right) \leq c(4|t|) \leq c(|t|)A(4),$$

то останній інтеграл в (6.12) збігається, тобто β_{jk} існує. Рівність (6.11) є наслідком теореми Фубіні, якщо довести, що для кожного $x \in R$

$$\sum_{k\in Z}\int_R|\varphi_{0k}(u)||f(u)|du\,|\varphi_{0k}(x)| < \infty \quad (6.13)$$

та

$$\sum_{k\in Z}\int_R \left|\delta_{jk}(u)\right| |f(u)| du \left|\delta_{jk}(x)\right| < \infty. \tag{6.13'}$$

Нерівність (6.13) доведено в роботі [7]. Доведемо нерівність (6.13′).

З леми 6.1 випливає

$$\left|\delta_{jk}(y)\right| = 2^{j/2}\left|\delta\left(2^j y-k\right)\right| \le 2^{j/2} B\Phi\left(\frac{1}{2}\left|2^j y-k-\frac{1}{2}\right|\right).$$

Отже,

$$\sum_{k\in Z}\left|\delta_{jk}(u)\right|\left|\delta_{jk}(x)\right| \le 2^j B^2 \sum_{k\in Z}\Phi\left(\frac{1}{2}\left|2^j u-\frac{1}{2}-k\right|\right)\Phi\left(\frac{1}{2}\left|2^j x-\frac{1}{2}-k\right|\right). \tag{6.14}$$

В лемі 8.2 з книги [6] (див. також [4]) доведено таке твердження. Нехай $F = \{F(x),\ x>0\}$ — така функція, що $F(0)<\infty$, $F(x)$ монотонно спадає при $x>0$ та $\int_R F(|x|)dx<\infty$. Тоді існують константи $c_1>0$, $c_2>0$ такі, що

$$\sum_{k\in Z} F(|x-k|)\,F(|y-k|) \le c_1 F(c_2|x-y|).$$

Якщо вибрати $F(x)=\Phi\left(\frac{x}{2}\right)$, то з (6.14) випливає

$$\sum_{k\in Z}\left|\delta_{jk}(u)\right|\left|\delta_{jk}(x)\right| \le 2^j c_1 B^2\Phi\left(c_2\, 2^{j-1}|u-x|\right). \tag{6.15}$$

З (6.15) випливає

$$\sum_{k\in Z}\int_R\left|\delta_{jk}(u)\right||f(u)|du\left|\delta_{jk}(x)\right| \le 2^j c_1\int_R |f(u)|\,\Phi\left(2^{j-1}c_2|u-x|\right)du \le$$

$$\le 2^j c_1\int_R c(u)\,\Phi\left(2^{j-1}c_2|u-x|\right)du < \infty.$$

Остання нерівність доводиться так, як і обмеженість інтеграла в (6.12).

7. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів. Наступна теорема дає загальні умови рівномірної збіжності вейвлет-розкладів для випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин.

Теорема 7.1. *Нехай* $X=\{X(t),\ t\in R\}$ *— сепарабельний випадковий процес із простору Орліча* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x)$ *задовольняє умову g. Нехай для процесу* $X(t)$ *виконується умова теореми* 3.1 *відносно функції* $c(t)>0$, *а для процесу* X *на деякому інтервалі* $[a,b]$ *— умова наслідку* 2.1. *Крім того, нехай* φ *— деякий f-вейвлет,* δ *— відповідний йому m-вейвлет і для* φ *виконується умова S з функцією* Φ. *Якщо для функції* $c(x)$ *існує функція* $0<A(u)<\infty$, $u>0$, *така, що для досить великих* x, $a>0$ $c(ax)\le c(x)A(a)$ *та* $\int_R c(x)\Phi(|x|)dx<\infty$, *то для будь-якого інтервалу* $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ $X_n(t)\to X(t)$ *при* $n\to\infty$ *рівномірно по* $t\in[\alpha,\beta]$ *з імовірністю одиниця,*

$$X_n(t) = \sum_{k\in Z}\xi_{0k}\,\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in Z}\eta_{ik}(x)\delta_{ik}(x), \tag{7.1}$$

$$\xi_{0k} = \int_R X(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}dt, \qquad \eta_{ik}(x) = \int_R X(t)\overline{\delta_{ik}(t)}dt. \tag{7.2}$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 6.1. Дійсно, якщо для X на інтервалі $[a, b]$ виконуються умови наслідку 2.1, то згідно з наслідком 2.2 випадковий процес є вибірково неперервним з імовірністю одиниця на $[a, b]$.

Згідно з теоремою 3.1, з імовірністю одиниця для $t \in R$ $|X(t)| \le \xi_0 c(t)$, де $P\{\xi_0 < \infty\} = 1$, тобто для X на інтервалі $[a, b]$ з імовірністю одиниця виконуються всі умови теореми 6.1.

Наступна теорема дає загальні умови рівномірної збіжності вейвлет-розкладів випадкових процесів із просторів $L_U(\Omega)$, $p \ge 1$.

Теорема 7.2. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ *— сепарабельний випадковий процес із простору* $L_U(\Omega)$, $p \ge 1$. *Нехай для процесу* $X(t)$ *виконується умова теореми* 4.2 *відносно функції* $c(t) > 0$ *та на деякому інтервалі* $[a, b]$ *виконуються умови теореми* 4.1. *Нехай* φ *— деякий f-вейвлет,* δ *— відповідний йому m-вейвлет і для* φ *виконується умова S з функцією* Φ. *Якщо для функції* $c(t)$ *виконується умова* (6.10) *та* $\int_R c(t)\Phi(|x|)dx < \infty$, *то для будь-якого інтервалу* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$ *рівномірно по* $t \in [\alpha, \beta]$ *з імовірністю одиниця* ($X_n(t)$ *задано в* (7.1), (7.2)).

Аналогічно можна отримати умови рівномірної збіжності вейвлет-розкладів, якщо для процесу X замість умов теореми 4.2 вимагати виконання наслідку 4.1 або теореми 4.4. З теореми 4.3 та 6.1 випливає наступна теорема.

Теорема 7.3. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ *— сепарабельний WSSSI-процес із простору* $SL_p(\Omega)$, $p > \dfrac{1}{\alpha}$, $\varphi(x)$ *— f-вейвлет, для якого виконується умова S з функцією* $\Phi(|t|) = \dfrac{1}{|t|^{\delta+\alpha}(\ln|t|)^{\gamma}}$, $\gamma > \dfrac{1}{p}$, $\delta > 1$, *для досить великих* $|t|$. *Тоді для будь-якого інтервалу* $[a, b]$ $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$ *рівномірно по* $t \in [\alpha, \beta]$ *з імовірністю одиниця* ($X_n(t)$ *задано в* (7.1), (7.2)).

Доведення. Для WSSSI-процесів при $p > \dfrac{1}{\alpha}$ виконуються умови теореми 4.1, тобто він є вибірково неперервним з імовірністю одиниця на будь-якому інтервалі $[a, b]$. Далі, теорема випливає з теореми 4.3, оскільки з імовірністю одиниця $X(t) < \xi c(t)$, де ξ — випадкова величина, $P\{\xi < \infty\} = 1$, $c(t)$ — така функція, що при досить великих $|t|$ $c(t) = |t|^{\alpha}(\ln|t|)^{\gamma}$, $\gamma > \dfrac{1}{p}$.

Аналогічно, з наслідку 4.2 випливає наступна теорема.

Теорема 7.4. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ *— квазістаціонарний сепарабельний випадковий процес із простору* $L_p(\Omega)$, *для якого виконується умова*

$$\sup_{|t-s| \le h} \left(E|X(t) - X(s)|^p\right)^{1/p} \le Ch^{\delta}, \quad \delta > \frac{1}{p}, \quad C > 0.$$

Тоді якщо для f-вейвлету φ *виконується умова S з функцією* $\Phi(|t|) = \dfrac{1}{|t|^{\nu}(\ln|t|)^{\gamma}}$, $\nu > 1 + \dfrac{1}{p}$, $\gamma > 1 + \dfrac{1}{p}$, *то для будь-якого інтервалу* $[a, b]$ $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$ *з імовірністю одиниця рівномірно на* $[a, b]$ ($X_n(t)$ *задано в* (7.1), (7.2)).

Аналогічно з пункту 5 можна отримати умови рівномірної збіжності вейвлет-розкладів для випадкових процесів із просторів Орліча експоненціального типу. Наприклад, має місце така теорема.

Теорема 7.5. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ *— сепарабельний випадковий процес із простору Орліча* $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$. *Нехай для деякого інтервалу* $[a, b]$ *виконуються умови теореми* 5.2 *та для* X *— умови теореми* 5.4 *відносно функції* $c(t) > 0$. *Нехай для* f*-вейвлету* φ *виконується умова* S *з функцією* Φ. *Тоді якщо для* Φ *виконується умова* (6.10) *та* $\int_R c(x)\Phi(|x|)dx < \infty$, *то для будь-якого інтервалу* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$ *рівномірно по* $t \in [\alpha, \beta]$ *з імовірністю одиниця* ($X_n(t)$ *задано в* (7.1), (7.2)).

З теореми 5.8 випливає, що для сепарабельного процесу з простору $\mathrm{Exp}_\psi(\Omega)$ на будь-якому інтервалі $X_n(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно при $t \in [a, b]$ з імовірністю одиниця, якщо для f-вейвлету φ виконується умова S з функцією $\Phi(|t|) = \dfrac{1}{|t|^s \psi^{(-1)}(\ln|t|)\, \psi^{(-1)}(b \ln\ln|t|)}$, $s > 1$.

Висновки. В роботі досліджено властивості випадкових процесів $X(t)$ із простору Орліча випадкових величин. Зокрема, побудовано такі функції $c(t) > 0$, що з імовірністю одиниця $\sup\limits_{t \in R} \dfrac{|X(t)|}{c(t)} < \infty$, та знайдено оцінки для ймовірностей $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t \in R} \dfrac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\}$. Отримані результати застосовуються до знаходження умов рівномірної збіжності з імовірністю одиниця вейвлет-розкладів цих процесів на обмежених інтервалах. Передбачається вивчення розподілів інших функціоналів від процесів $X(t)$ та знаходження умов збіжності з імовірністю одиниця вейвлет-розкладів цих процесів в інших нормах (зокрема, в $L_p(T)$).

1. *Козаченко Ю. В., Перестюк М. М.* Про рівномірну збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 12. – С. 1647 – 1660.
2. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characteristics of the random variables and random processes. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2000. – 257 p.
3. *Daubechies I.* Ten lecture on wavelets. – Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math., 1992. – 324 p. (*Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. – М.; Ижевск: RXD, 2001. – 463 с.)
4. *Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelets, approximation and statistical applications. – New York: Springer, 1998. – 265 p.
5. *Walter G., Shen. X.* Wavelets and other orthogonal systems. – London: Chapman and Hall / CRC 2000. – 370 p.
6. *Козаченко Ю. В.* Лекції з вейвлет аналізу. – Київ: ТВіМС, 2004. – 147 с.
7. *Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M., Vasylyk O. I.* On uniform convergence of wavelet expansion of φ-sub-Gaussian random processes // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2006. – **14**, № 3. – P. 209 – 232.
8. *Браверман М. Ш.* Оценки для сумм независимых случайных величин // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 173 – 178.

Одержано 20.02.07,
після доопрацювання — 21.05.07