УДК 517.537. 72

О. М. Мулява (Київ. нац. ун-т харч. технол.),
М. М. Шеремета (Львів. нац. ун-т)

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ДО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

For a Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with the abscissa of absolute convergence $\sigma_a = 0$, let $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)|: t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n): n \geq 0\}$, $\sigma < 0$. It is proved that the condition $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, is necessary and sufficient for equivalence of relations $\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} \ln M(\sigma)\, d\sigma < +\infty$ and $\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} \ln\mu(\sigma)\, d\sigma < +\infty$, $\rho > 0$, for each such series.

Пусть $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)|: t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n): n \geq 0\}$, $\sigma < 0$, для ряда Дирихле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ с абсциссой абсолютной сходимости $\sigma_a = 0$. Доказано, что условие $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, является необходимым и достаточным для равносильности соотношений $\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} \ln M(\sigma)\, d\sigma < +\infty$ и $\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} \ln\mu(\sigma)\, d\sigma < +\infty$, $\rho > 0$, для каждого такого ряда.

1. Вступ. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0 = 0)$, а $S^0(\Lambda)$ — клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Для $\sigma < 0$ нехай $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)|: t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n): n \geq 0\}$ — максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma, F) = \max\{n \geq 0: |a_n|\exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ — його центральний індекс, а $\varkappa_n = \dfrac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$.

Зростання функції $F \in S^0(\Lambda)$ переважно вимірюють за допомогою порядку $\rho = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\ln\ln M(\sigma, F)}{\ln(1/|\sigma|)}$ (див., наприклад, [1, с. 238]). За умови $0 < \rho < +\infty$ клас збіжності означається [2, 3] умовою

$$\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} \ln M(\sigma, F)\, d\sigma < +\infty. \tag{2}$$

В [3] доведено, що якщо $\rho > 1$ і $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, то для того щоб ряд (1) належав до класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\varkappa_n)$ є неспадною, і достатньо, щоб $\sum_{n-1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\dfrac{\ln^+|a_n|}{\lambda_n}\right)^{\rho+1} < +\infty$. У доведенні цього результату важливим є твердження, що за умови $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, співвідношення (2) рівносильне [2, 3] співвідношенню

$$\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} \ln \mu(\sigma, F)\, d\sigma < +\infty. \tag{3}$$

Виникає питання про істотність умови $\ln\ln n = o(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, у цьому твердженні, і цій проблемі присвячено дану статтю.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Умова* $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, *є необхідною і достатньою для того, щоб для кожних* $\rho > 0$ *і* $F \in S^0(\Lambda)$ *співвідношення* (2) *і* (3) *були рівносильними.*

2. Доведення теореми 1. Як зазначено вище, достатність умови $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, доведено в [3]. Для доведення її необхідності нам потрібні наступні леми.

Лема 1 [4]. *Нехай* $\alpha\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ *і* $\gamma\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *— невід'ємні неперервні зростаючі до* $+\infty$ *функції і* $\alpha(x + O(1)) \sim \alpha(x)$ *при* $x \to +\infty$. *Якщо* $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (\alpha(n)/\gamma(\lambda_n)) > 1$, *то існує підпослідовність* $\left(\lambda_k^*\right)$ *послідовності* (λ_n) *така, що* $k \le \alpha^{-1}\left(\gamma(\lambda_k^*)\right) + 1$ *для всіх* $k \ge 1$ *і* $k_j \ge \alpha^{-1}\left(\gamma\left(\lambda_{k_j}^*\right)\right)$ *для деякої зростаючої послідовності* (k_j) *натуральних чисел.*

Лема 2 [5, с. 115]. *Якщо* $\ln n = o(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$, *то абсциса* σ_a *абсолютної збіжності ряду* (1) *обчислюється за формулою* $\sigma_a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|a_n|}$.

Лема 3. *Нехай* $\rho > 0$. *Співвідношення* (3) *рівносильне співвідношенню*

$$\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho} \lambda_{\nu(\sigma, F)}\, d\sigma < +\infty. \tag{4}$$

Справді, оскільки [5, с. 182] $\ln\mu(\sigma, F) = \ln\mu(-1, F) + \int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)}\, dx$, то

$$\int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} \ln\mu(\sigma, F)\, d\sigma = \int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho-1} d\sigma \left(\int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)} + \ln\mu(-1, F) \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)}\, dx \int_{x}^{0} |\sigma|^{\rho-1} d\sigma + K_1 = \frac{1}{\rho} \int_{-1}^{0} |\sigma|^{\rho} \lambda_{\nu(\sigma,F)}\, d\sigma + K_1, \quad K_1 \equiv \mathrm{const} > 0,$$

тобто співвідношення (3) і (4) є рівносильними.

Завершення ***доведення теореми* 1**. Припустимо, що умова $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, не виконується, тобто існує таке $\delta \in (0, 1)$, що $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\ln n}{\delta \ln \lambda_n} > 1$. Тоді за лемою 1 з $\alpha(x) = \ln\ln x$ і $\gamma(x) = \delta \ln x$, $x \ge 1$, існує підпослідовність $\left(\lambda_k^*\right)$ послідовності (λ_n) така, що $k \le \exp\left\{\left(\lambda_k^*\right)^{\delta}\right\} + 1$ для всіх $k \ge 1$ і $k_j \ge \exp\left\{\left(\lambda_{k_j}^*\right)^{\delta}\right\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Якщо $\lambda_n \notin (\lambda_k^*)$, покладемо $a_n = 0$, а з метою скорочення запису в отриманому ряді Діріхле замінимо λ_k^* на λ_n. Одержимо ряд Діріхле (1), де послідовність (λ_n) така, що $\ln n \le \lambda_n^\delta + 1$ для всіх $n \ge 1$ і $\ln n_j \ge \lambda_{n_j}^\delta$ для деякої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел. Послідовність (n_j) можемо вважати такою, що $\dfrac{\ln\ln n_j}{\ln j} \to \infty$ при $j \to \infty$ і $n_{j+1} > 2n_j$ для всіх $j \ge 1$.

Нехай (q_k) — зростаюча до 0 послідовність від'ємних чисел і $m_j = [n_{j+1}/2]$. Покладемо $n_0 = 0$, $a_{n_0} = 1$, $a_n = 0$ для всіх $n_j < n < m_j$,

$$a_{n_{j+1}} = \prod_{k=0}^{j} \exp\left\{|q_k|\left(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}\right)\right\}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5}$$

і

$$a_n = a_{n_j} \exp\left\{|q_j|\left(\lambda_n - \lambda_{n_j}\right)\right\}, \quad m_j \le n < n_{j+1}, \tag{6}$$

тобто отримуємо ряд Діріхле

$$F^*(s) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(a_{n_j}\exp\left\{s\lambda_{n_j}\right\} + \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}-1} a_n \exp\{s\lambda_n\}\right). \tag{7}$$

З (5) і (6) легко випливає

$$\frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{m_j}}{\lambda_{m_j} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_n - \ln a_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = q_j, \quad m_j \le n < n_{j+1}.$$

Тому якщо $q_j \le \sigma < q_{j+1}$, то $\nu(\sigma, F^*) = n_{j+1}$ і $\mu(\sigma, F^*) = a_{n_{j+1}} \exp\left\{\sigma\lambda_{n_{j+1}}\right\}$. Звідси випливає

$$\int_{q_1}^{0} |\sigma|^\rho \lambda_{\nu(\sigma, F^*)}\, d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{q_j}^{q_{j+1}} |\sigma|^\rho \lambda_{\nu(\sigma, F^*)}\, d\sigma =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \int_{q_j}^{q_{j+1}} |\sigma|^\rho\, d\sigma \le \frac{1}{\rho+1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} |q_j|^{\rho+1}. \tag{8}$$

З іншого боку, для всіх досить великих j

$$M(q_j, F^*) \ge \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}} a_n \exp\{q_j \lambda_n\} = (n_{j+1} - m_j)\mu(q_j, F^*) \ge K_2 n_{j+1}, \tag{9}$$

$$K_2 \equiv \text{const} > 0.$$

Виберемо $q_j = -\lambda_{n_{j+1}}^{-\delta/\rho}$. Тоді з (9) отримаємо

$$\ln M(q_j, F^*) \ge \ln n_{j+1} + \ln K_2 \ge \lambda_{n_{j+1}}^\delta + \ln K_2 = 1/|q_j|^\rho + \ln K_2,$$

тобто співвідношення (2) не виконується, оскільки з нього випливає, що $\ln M(\sigma, F) = o(1/|\sigma|^\rho)$, $\sigma \uparrow 0$.

Якщо $\dfrac{\rho}{\rho+1} < \delta$, то з огляду на умову $\dfrac{\ln\ln n_j}{\ln j} \to \infty$, $j \to \infty$, з (8) отримуємо

$$\int\limits_{q_1}^{0} |\sigma|^{\rho} \lambda_{\nu(\sigma, F^*)}\, d\sigma \le \frac{\rho}{\rho+1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}}^{1-\delta(\rho+1)/\rho} \le \frac{2}{\rho+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n_{j+1})^{(\rho+1)/\rho - 1/\delta}} < +\infty,$$

тобто співвідношення (4), а за лемою 3 і співвідношення (3) є правильним.

Залишилось довести, що ряд (7) має нульову абсцису абсолютної збіжності. Оскільки $|q_k| \downarrow 0$, $k \to \infty$, то з (5) випливає

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}}} = \lim_{j\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{j} |q_k| \left(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}\right)}{\sum_{k=0}^{j} \left(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}\right)} = 0,$$

а з (6) для $m_j \le n < n_{j+1}$ маємо

$$\frac{\ln a_n}{\lambda_n} \le \frac{\ln a_{n_j}}{\lambda_n} + |q_j| \le \frac{\ln a_{n_j}}{\lambda_{n_j}} + |q_j| \to 0, \quad j \to \infty.$$

Отже, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln a_n}{\lambda_n} = 0$ і, оскільки $\ln n \le \lambda_n^{\delta} + 1$, $n \ge 1$, $\delta \in (0, 1)$, за лемою 2 $\sigma_a = 0$.

Теорему 1 доведено.

3. Зауваження та доповнення. Спочатку зауважимо, що з огляду на аналог нерівності Коші $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ зі співвідношення (2) випливає співвідношення (3) і, отже, задача зводиться до знаходження умов на Λ, за яких з (3) випливає (2). Тому через $S^0(\Lambda, \rho)$ позначимо клас рядів із $S^0(\Lambda)$, для яких виконується (3) зі заданим $\rho \in (0, +\infty)$. Будемо говорити, що $\beta \in L_{пз}$, якщо функція β додатна, неперервна, зростає до $+\infty$ на $(0, +\infty)$ і є повільно змінною, тобто $\beta(cx) \sim \beta(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$. У класі $S^0(\Lambda, \rho)$ правильним є наступне твердження.

Теорема 2. *Для того щоб для кожної функції* $F \in S^0(\Lambda, \rho)$ *виконувалось співвідношення* (2), *необхідно, щоб* $\ln n = O\left(\lambda_n^{\rho/(\rho+1)}\right)$, $n \to \infty$, *і досить, щоб* $\ln n \le \dfrac{\lambda_n^{\rho/(\rho+1)}}{\beta\left(\lambda_n^{1/(\rho+1)}\right)}$, $n \ge n_0$, *де функція* $\beta \in L_{пз}$ *така, що* $\ln\beta\left(e^{(1+o(1))x}\right) = \ln\beta\left(e^{x}\right) + O(1)$, $x \to +\infty$, *і* $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x\beta(x)^{\rho+1}} \le +\infty$.

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що умова $\ln n = O\left(\lambda_n^{\rho/(\rho+1)}\right)$, $n \to \infty$, не виконується, тобто існує $l \in L_{пз}$ така, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{(\lambda_n l(\lambda_n))^{\rho/(\rho+1)}} > 1$. Тоді за лемою 1 існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \le \exp\left\{\left(\lambda_k^* l(\lambda_k^*)\right)^{\rho/(\rho+1)}\right\}$ для всіх $k \ge 1$ і $k_j \ge \exp\left\{\left(\lambda_{k_j}^* l(\lambda_{k_j}^*)\right)^{\rho/(\rho+1)}\right\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел. Покладаючи $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \notin (\lambda_k^*)$, як у доведенні теореми 1, отримуємо ряд Діріхле (1), де послідовність (λ_n) така, що $\ln n \le (\lambda_n l(\lambda_n))^{\rho/(\rho+1)} + 1$ для всіх $n \ge 1$ і $\ln n_j \ge \left(\lambda_{n_j} l(\lambda_{n_j})\right)^{\rho/(\rho+1)}$ для деякої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел. Послідовність (n_j) можемо вважати такою, що $n_{j+1} > 2n_j$ для всіх $j \ge 1$ і $\sum_{j=j_0}^{\infty} \dfrac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})} < +\infty$.

Нехай (q_k) — зростаюча до 0 послідовність від'ємних чисел, а коефіцієнти a_n виберемо, як у доведенні теореми 1. Для отриманого таким чином ряду (7) залишаються правильними оцінки (8) і (9).

Виберемо тепер $q_j = -\left(\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})\right)^{-1/(\rho+1)}$. Тоді з (9) маємо

$$\ln M\left(q_j, F^*\right) \ \ge\ \ln n_{j+1} + \ln K_2 \ \ge\ \left(\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})\right)^{-1/(\rho+1)} + \ln K_2 \ =$$

$$= \ 1\Big/\left|q_j\right|^{\rho} + \ln K_2,$$

тобто співвідношення (2) не виконується, а з (8) одержуємо

$$\int\limits_{q_1}^{0} |\sigma|^{\rho} \lambda_{\nu(\sigma, F^*)}\, d\sigma \ \le\ \frac{\rho}{\rho+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})} < +\infty,$$

тобто співвідношення (4), а за лемою 3 і співвідношення (3) є правильним.

Нарешті, оскільки l — повільно зростаюча функція, то $\ln n \le (\lambda_n l(\lambda_n))^{\rho/(\rho+1)} + 1 = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$, і, як у доведенні теореми 1, $\sigma_a = 0$. Необхідність умови $\ln n = O\left(\lambda_n^{\rho/(\rho+1)}\right)$, $n \to \infty$, доведено.

Для доведення *достатності* використаємо наступну лему.

Лема 4 [3]**.** *Якщо* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} \le h_0 < +\infty$, *де* γ — *додатна неперервна спадна до* 0 *на* $[0, +\infty)$ *функція така, що* $t\gamma(t) \uparrow +\infty$, $t \ge +\infty$, *то для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує стала* $K(\varepsilon) > 0$ *така, що для всіх* $\sigma < 0$

$$M(\sigma, F) \ \le\ \mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\right)\left(\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2\left(h_0+\varepsilon^2\right)}\right)\right\} + K(\varepsilon)\right).$$

Неважко перевірити, що за умов теореми 2 виконується умова леми 4 з $\gamma(x) = \dfrac{1}{x^{1/(\rho+1)}\beta\left(x^{1/(\rho+1)}\right)}$, $x \ge x_0$, і $h_0 = 1$. Щоб знайти $\gamma^{-1}(t)$, потрібно розв'язати рівняння

$$\ln x^{1/(\rho+1)} + \ln\beta\left(x^{1/(\rho+1)}\right) \ =\ \ln(1/t). \tag{10}$$

Оскільки β — повільно зростаюча функція, то $\ln\beta(x) = o(\ln x)$, $x \to +\infty$, і тому розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $\ln x^{1/(\rho+1)} = \ln(1/t) - \alpha(1/t)$, де $\alpha(1/t) = o(\ln(1/t))$, $t \to 0$. Підставляючи цей вираз у (10), отримуємо $\alpha(1/t) = \ln\beta(\exp\{\ln(1/t) - \alpha(1/t)\}) = \ln\beta(\exp\{\ln(1/t)\}) + O(1)$, $t \to 0$. Отже, $\ln x^{1/(\rho+1)} = \ln(1/t) - \ln\beta(1/t) + O(1)$ і $\gamma^{-1}(t) = \dfrac{e^{O(1)}}{(t\beta(1/t))^{\rho+1}}$, $t \to 0$. Тоді за лемою 4 з огляду на повільне зростання функції β маємо

$$\ln M(\sigma, F) \le \ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\right) + \frac{K_1(\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho}\beta(1/|\sigma|)^{\rho+1}}, \quad K_1(\varepsilon) = \text{const} > 0.$$

Оскільки $\int_{-1}^{0}|\sigma|^{\rho-1}\dfrac{K_1(\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho}\beta(1/|\sigma|)^{\rho+1}}d\sigma = K_1(\varepsilon)\int_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x\beta(x)^{\rho+1}} < +\infty$, то з останньої нерівності і співвідношення (3) випливає співвідношення (2).

Зауважимо, що умови теореми 2 задовольняє функція $\beta(x) = \ln(x+1)$. Як видно, у теоремі 2 необхідна умова не збігається з достатньою. Правдоподібним є наступне твердження.

Гіпотеза. *Для того щоб для кожної функції* $F \in S^0(\Lambda, \rho)$ *виконувалось співвідношення* (2), *досить, щоб* $\ln n = O\left(\lambda_n^{\rho/(\rho+1)}\right)$, $n \to \infty$.

1. *Бойчук В. С.* О росте абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле // Мат. сб. – Киев : Наук. думка, 1976. – 296 с.
2. *Галь Ю. М., Шеремета М. Н.* Принадлежность аналитических функций классу сходимости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 7. – С. 11 – 14.
3. *Мулява О. М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1485 – 1494.
4. *Sumyk O. M., Sheremeta M. M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of *m*-member asymptotics // Mat. Stud. – 2003. – **19**, № 1. – P. 83 – 88.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1986. – 536 с.
6. *Шеремета М. М.* Цілі ряди Діріхле. – Київ : ІСДО, 1993. – 168 с.

Одержано 09.08.06,
після доопрацювання – 25.09.07