УДК 517.9

Р. В. Божок (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ДЕФЕКТ НЕЩІЛЬНОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ВКЛАДЕНЬ У ШКАЛІ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ*

The formula is obtained for the determination of a defect under the continuous imbedding of subspaces in the scale of Hilbert spaces.

Установлена формула для определения дефекта при непрерывном вложении подпространств в шкале гильбертовых пространств.

Для пари сепарабельних гільбертових просторів $\mathcal{H}$ та $\mathcal{K}$ пишемо $\mathcal{H} \sqsupset \mathcal{K}$, якщо $\mathcal{K}$ є власною підмножиною $\mathcal{H}$, тобто $\mathcal{H} \supset \mathcal{K}$, і при цьому $\mathcal{K}$ вкладається в $\mathcal{H}$ щільно і неперервно.

Нехай $\mathcal{H} \sqsupset \mathcal{K}$. Припустимо, що $\mathcal{K}$ розкладено в суму ортогональних підпросторів, $\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Тоді може статися, що підпростір $\mathcal{M}$ вкладається в $\mathcal{H}$ знову щільно, тобто можна писати $\mathcal{H} \sqsupset \mathcal{M}$ (необхідна і достатня умова для цього відома, див. нижче співвідношення (3)). Але припустимо, що це не так, тобто підпростір $\mathcal{K}$ не вкладається щільно в $\mathcal{H}$. Тоді можна використати наступне означення. Дефектом підпростору $\mathcal{M}$ в $\mathcal{H}$ називається розмірність підпростору $\mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}$, записуємо

$$\operatorname{def}(\mathcal{M} \subset \mathcal{H}) := \dim \mathcal{M}^{\perp}.$$

Задача полягає в знаходженні цього числа в термінах трійки $\mathcal{K}^* \sqsupset \mathcal{H} \sqsupset \mathcal{K}$, де $\mathcal{K}^*$ позначає спряжений до $\mathcal{K}$ простір відносно $\mathcal{H}$.

Для зручності подальших побудов перепозначимо $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{K}$ на $\mathcal{H}_+$, а $\mathcal{K}^*$ на $\mathcal{H}_-$ і без обмеження загальності припустимо, що трійка

$$\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+ \tag{1}$$

утворює звичайне оснащення гільбертового простору $\mathcal{H}_0$ у сенсі монографій [1, 2]. Позначимо через $D_{-,+}\colon \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ звичайний оператор унітарного ізоморфізму.

Теорема 1. *Припустимо, що позитивний простір $\mathcal{H}_+$ розкладено в ортогональну суму підпросторів: $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}_+$. Тоді*

$$\operatorname{def}(\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{H}_0) = \dim(\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0), \tag{2}$$

де $\mathcal{N}_- = D_{-,+}\mathcal{N}_+$. При цьому

$$\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \iff \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}. \tag{3}$$

Доведення. Еквівалентність $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$ та $\mathcal{M}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$ доведено в теоремі А1 з [3]. Співвідношення (2) є наслідком рівності

$$\mathcal{M}_+^{\perp,0} \equiv \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{M}_+ = \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0. \tag{4}$$

* Частково підтримано DFG 436 UKR (проекти 113/67 та 113/78).

Покажемо, що $\mathcal{M}_+^{\perp,0} \subset (\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0)$. Нехай вектор $g \in \mathcal{H}_0$ належить до $\mathcal{M}_+^{\perp,0}$. Тоді

$$0 = (g, \mathcal{M}_+)_0 = \langle g, \mathcal{M}_+ \rangle_{-,+} = (I_{+,-} g, \mathcal{M}_+)_+,$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-,+}$ позначає дуальний скалярний добуток між просторами $\mathcal{H}_-$ та $\mathcal{H}_+$, а $I_{+,-} := D_{-,+}^{-1} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$. Це означає, що $I_{+,-} g \in \mathcal{N}_+$. Отже, $g \in \mathcal{N}_-$, тому що $\mathcal{N}_+ = I_{+,-} \mathcal{N}_-$. Таким чином, $g \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0$.

Доведемо обернене включення $(\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0) \subset \mathcal{M}_+^{\perp,0}$. Позначимо через

$$D_{0,+} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_0 \quad \text{і} \quad D_{-,0} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_-$$

звичайні оператори унітарного ізоморфізму. Нехай $g \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0$. Аналогічно, $I_{+,0} g := \varphi \in \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{H}_+$, де

$$\mathcal{N}_0 = I_{0,-} \mathcal{N}_- \quad \text{і} \quad I_{+,0} := D_{0,+}^{-1} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_+, \quad I_{0,-} := D_{-,0}^{-1} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_0.$$

З цього випливає, що

$$0 = (\varphi, \mathcal{M}_0)_0 = \langle \varphi, \mathcal{M}_0 \rangle_{+,-} = (D_{0,+} \varphi, I_{0,-} \mathcal{M}_0)_0 = (D_{0,+} \varphi, \mathcal{M}_+)_0,$$

де $\mathcal{M}_0 := D_{0,+} \mathcal{M}_+ \perp \mathcal{N}_0$ в $\mathcal{H}_0$ (докладніше див. [4]). Таким чином, оскільки

$$\varphi = I_{+,0} g \in \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{H}_+ \Leftrightarrow g \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0,$$

то

$$0 = (D_{0,+} \varphi, \mathcal{M}_+)_0 = (D_{0,+} I_{+,0} g, \mathcal{M}_+)_0 = (g, \mathcal{M}_+)_0,$$

а це означає, що $g \in \mathcal{M}_+^{\perp,0}$. Тобто, якщо $g \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0$, то $g \in \mathcal{M}_+^{\perp,0}$, а отже, $\mathcal{M}_+^{\perp,0} \supseteq \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0$.

Теорему доведено.

Приклад. Нехай $A = A^* \geq 1$ — самоспряжений оператор в $\mathcal{H}_0$, а $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ в нормі $\|\cdot\|_+ = \|A \cdot\|_0$. Збурення A задано системою абстрактних граничних умов

$$\left\{ \omega_i(\varphi) = \langle \varphi, \omega_i \rangle_{+,-} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n < \infty,\ \omega_i \in \mathcal{H}_- \right\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A).$$

Розглянемо оператор $\dot{A} := A \restriction \mathcal{D}(\dot{A})$, де $\mathcal{D}(\dot{A}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(A) : \omega_i(\varphi) = 0\}$. Чи можливо вибрати $\omega_i \in \mathcal{H}_-$ так, щоб $\dot{A}$ був щільно визначеним симетричним оператором? Відповідь випливає з теореми 1. Область визначення $\mathcal{D}(\dot{A}) \sqsubset \mathcal{H}_0$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{def}(\mathcal{D}(\dot{A}) \subset \mathcal{H}_0) = 0$, а це еквівалентно умові $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$, де $\mathcal{N}_- := \operatorname{span}\{\omega_i\}$. Припустимо, що $\dot{A}$ заданий не щільно. Тоді важливо знати дефект нещільності області $\mathcal{D}(\dot{A})$ в $\mathcal{H}_0$. Зрозуміло, що можна отримати підпростір, ортогональний до $\mathcal{D}(\dot{A})$, довільної розмірності. Ця розмірність залежить від вибору $\mathcal{N}_-$:

$$\mathcal{D}(\dot{A})^\perp = \operatorname{def}(\mathcal{D}(\dot{A}) \subset \mathcal{H}_0) = \dim(\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0).$$

Використовуючи ідею доведення теореми 1, можна одержати більш тонкі результати про щільність вкладення одного підпростору в інший в A-шкалі гільбертових просторів, або дати характеристику дефекту такого вкладення, якщо воно не є щільним.

Розглянемо оснащення гільбертового простору, асоційованого з самоспряженим оператором $A \geq 1$,

$$\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+,$$

де $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ в нормі $\|\cdot\|_+ = \|A\cdot\|_0$ і $\mathcal{H}_-$ — спряжений до $\mathcal{H}_+$ відносно $\mathcal{H}_0$. Припустимо, що $\mathcal{H}_+$ розкладено в ортогональну суму: $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$ так, що $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$. Кожен оснащений простір можна розширити до ланцюжка з п'яти просторів (див. знову [1, 2]), отже,

$$\mathcal{H}_{--} \sqsupset \mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+ \sqsupset \mathcal{H}_{++}, \tag{5}$$

де $\mathcal{H}_{++} = \mathcal{D}(A^2)$. Слід зазначити, що $\mathcal{H}_{++}$ є спряженим до $\mathcal{H}_0$ відносно $\mathcal{H}_+$.

Розглянемо в $\mathcal{H}_{++}$ лінійну множину $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$. Легко бачити, що це замкнений в $\mathcal{H}_{++}$ підпростір. Дійсно, нехай послідовність $\varphi_n \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Якщо вона збіжна до $\varphi \in \mathcal{H}_{++}$, то збіжна і в $\mathcal{H}_+$ внаслідок нерівності $\|\cdot\|_+ \leq \leq \|\cdot\|_{++}$. Тому $\varphi \in \mathcal{M}_+$, оскільки підпростір $\mathcal{M}_+$ є замкненим в $\mathcal{H}_+$. Отже, $\varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$.

Таким чином, простір $\mathcal{H}_{++}$ розкладається в ортогональну суму:

$$\mathcal{H}_{++} = \tilde{\mathcal{M}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{N}}_+.$$

Аналогічний розклад має місце і для $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_0 = \tilde{\mathcal{M}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{N}}_0,$$

де

$$\tilde{\mathcal{M}}_0 := D_{0,++}\tilde{\mathcal{M}}_+ \equiv A^2\tilde{\mathcal{M}}_+, \qquad \tilde{\mathcal{N}}_0 := D_{0,++}\tilde{\mathcal{N}}_+ \equiv A^2\tilde{\mathcal{N}}_+$$

і $D_{0,++} : \mathcal{H}_{++} \to \mathcal{H}_0$ позначає оператор унітарного ізоморфізму.

Теорема 2. *Нехай позитивні простори* $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ *та* $\mathcal{H}_{++} = \mathcal{D}(A^2)$ *з* A*-шкали розкладено в ортогональні суми, як описано вище*: $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$ *і* $\mathcal{H}_{++} = \tilde{\mathcal{M}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{N}}_+$, *де* $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$. *При цьому припускається, що підпростір* $\mathcal{M}_+$ *є щільним в* $\mathcal{H}_0$: $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$.

Підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+$ *буде щільним в* $\mathcal{M}_+$ *тоді і тільки тоді, коли підпростір* $\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0}$ (*замикання* $\mathcal{N}_+$ *в* $\mathcal{H}_0$) *не матиме ненульових векторів, спільних з* $\mathcal{M}_+$:

$$\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+ \iff \mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \cap \mathcal{M}_+ = \{0\}. \tag{6}$$

Якщо ж умова (6) *не виконується і підпростір* $\tilde{\mathcal{M}}_+$ *не є щільним в* $\mathcal{M}_+$, *то його дефект нещільності визначається формулою*

$$\operatorname{def}(\tilde{\mathcal{M}}_+ \subset \mathcal{M}_+) = \dim(\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \cap \mathcal{M}_+). \tag{7}$$

При доведенні цієї теореми використовується наступна лема.

Лема. *Має місце рівність*

$$\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} = \tilde{\mathcal{N}}_0,$$

де $\tilde{\mathcal{N}}_0 = \mathcal{H}_0 \ominus A^2\tilde{\mathcal{M}}_+ = D_{0,++}\tilde{\mathcal{N}}_+ \equiv A^2\tilde{\mathcal{N}}_+$.

Доведення. З означення $\tilde{\mathcal{M}}_+$ легко бачити, що

$$\tilde{\mathcal{M}}_+ = \{\varphi \in \mathcal{H}_{++} : (\mathcal{N}_+, \varphi)_+ = 0\}. \tag{8}$$

З іншого боку, $\langle \tilde{\mathcal{N}}_0, \tilde{\mathcal{M}}_+ \rangle_{0,++} = 0$. Зрозуміло, що $\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \subset \tilde{\mathcal{N}}_0$. Припустимо, що $\tilde{\mathcal{N}}_0 = \mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \oplus \mathcal{S}_0$. Покажемо, що $\mathcal{S}_0 = 0$. З огляду на геометрію шкали (5) маємо

$$0 = \langle \mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \oplus \mathcal{S}_0, \tilde{\mathcal{M}}_+ \rangle_{0,++} = (I_{++,0}[\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \oplus \mathcal{S}_0], \tilde{\mathcal{M}}_+)_{++},$$

де $I_{++,0} = D_{0,++}^{-1} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_{++}$. Зокрема,

$$0 = (I_{++,0}\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0}, I_{++,0}\mathcal{S}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_+)_{++} = \langle \mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0}, I_{++,0}\mathcal{S}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_+ \rangle_{0,++}.$$

Оскільки $\mathcal{N}_+ \sqsubset \mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0}$, то $0 = (\mathcal{N}_+, I_{++,0}\mathcal{S}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_+)_+$. Але $I_{++,0}\mathcal{S}_0 \in \mathcal{H}_{++}$. А це приводить до суперечності з тим фактом, що всі вектори з $\mathcal{H}_{++}$, ортогональні до $\mathcal{N}_+$, належать $\tilde{\mathcal{M}}_+$ (див. (8)). Таким чином, $I_{++,0}\mathcal{S}_0 = 0$, а отже, і $\mathcal{S}_0 = 0$. Це й означає, що $\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} = \tilde{\mathcal{N}}_0$.

Доведення теореми. Для доведення необхідно ввести ще одну шкалу просторів. Оскільки $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$, то цю пару можна розглянути як передоснащений простір (див. [1, 2]), який єдиним чином розширюється до оснащення гільбертового простору $\mathcal{H}_0$. Введемо позначення для нового оснащеного простору:

$$\breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+,$$

де $\breve{\mathcal{H}}_+ \equiv \mathcal{M}_+$ з нормою $\mathcal{H}_+$, а $\breve{\mathcal{H}}_-$ — спряжений до $\breve{\mathcal{H}}_+$ відносно $\mathcal{H}_0$.

Нехай $\breve{A} = \breve{A}^* \geq 1$ позначає самоспряжений оператор, асоційований з цим оснащенням. Розглянемо розширене, по аналогії з (5), оснащення $\mathcal{H}_0$:

$$\breve{\mathcal{H}}_{--} \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+ \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_{++}. \tag{9}$$

У роботах [4 – 6] показано, що $\breve{\mathcal{H}}_{++} = P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}$, де $P_{\mathcal{M}_+}$ — ортопроектор в $\mathcal{H}_+$ на $\mathcal{M}_+$. При цьому норма в $\breve{\mathcal{H}}_{++}$ визначається так: для кожного $\varphi = P_{\mathcal{M}_+}\psi$, $\psi \in \mathcal{H}_{++}$,

$$\|\varphi\|_{\breve{++}} := \|\psi\|_{\mathcal{H}_{++}}.$$

Отже, (9) можна переписати у вигляді

$$\breve{\mathcal{H}}_{--} \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \sqsupset P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}, \tag{10}$$

звідки зрозуміло, що $\mathcal{D}(\breve{A}) \equiv \mathcal{M}_+$ і $\mathcal{D}(\breve{A}^2) = P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}$. За побудовою (докладніше див. [5]) оператор $\breve{A}$ пов'язаний с оператором A таким чином:

$$\breve{A}^2 P_{\mathcal{M}_+}\varphi = A^2\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{H}_{++} \equiv \mathcal{D}(A^2),$$

де, нагадаємо, A — самоспряжений оператор, асоційований зі шкалою (5).

Зрозуміло, що $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$ є власною підмножиною простору $P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}$. Тому для будь-якого $\varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$ маємо $P_{\mathcal{M}_+}\varphi = \varphi$ $(P_{\mathcal{M}_+}\tilde{\mathcal{M}}_+ = \tilde{\mathcal{M}}_+)$. Отже,

$$A^2 \upharpoonright \tilde{\mathcal{M}}_+ = \breve{A}^2 \upharpoonright \tilde{\mathcal{M}}_+. \tag{11}$$

Оскільки $\breve{A}^2$ — унітарний оператор у шкалі (10), $\breve{A}^2 : P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++} \to \mathcal{H}_0$ і справджується рівність (11), робимо висновок, що ортогональний розклад $\mathcal{H}_0 = \tilde{\mathcal{M}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{N}}_0$ можна перенести на розклад простору $\breve{\mathcal{H}}_{++} = P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}$. А саме, $P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++} = \breve{\mathcal{M}}_{++} \oplus \breve{\mathcal{N}}_{++}$, де $\breve{\mathcal{M}}_{++} = \breve{A}^{-2}\tilde{\mathcal{M}}_0 = \tilde{\mathcal{M}}_+$ завдяки (11). Застосувавши тепер теорему A1 з [3] до трійки $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \sqsupset P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}$, як до оснащення гільбертового простору $\mathcal{M}_+$, отримаємо (6).

Співвідношення (7) є наслідком рівності (її доведення таке ж, як і в теоремі 1)

$$(\tilde{\mathcal{M}}_+)^{\perp,+} = \tilde{\mathcal{N}}_0 \cap \mathcal{M}_+, \tag{12}$$

де $(\tilde{\mathcal{M}}_+)^{\perp,+}$ позначає ортогональне доповнення до $\tilde{\mathcal{M}}_+$ у просторі $\mathcal{M}_+$.

Теорему доведено.

Цікавим з точки зору геометрії шкали гільбертових просторів може бути такий наслідок з теореми 2 та рівність (5.12) з теореми 5.6 з роботи [4].

Наслідок.

$$\mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \cap \mathcal{M}_+ = \{0\} \iff \mathcal{N}_+^{\mathrm{cl},0} \cap \mathcal{H}_+ = \mathcal{N}_+. \tag{13}$$

Доведення цього наслідку випливає з того факту, що права частина (13) також еквівалентна щільності $\tilde{\mathcal{M}}_+$ в $\mathcal{M}_+$ (див. [4]).

1. *Berezanskii Yu. M.* Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators. – Providence, Rhode Island: AMS, 1968.
2. *Berezanskii Yu. M.* Self-adjoint operators in spaces of function of infinitely many of variables. – Providence, Rhode Island: AMS, 1986.
3. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* Square power of singularly perturbed operators // Math. Nachr. – 1995. – **173.** – P. 5 – 24.
4. *Albeverio S., Bozhok R., Dudkin M., Koshmanenko V.* Dense subspace in scales of Hilbert spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 2. – P. 156 – 169.
5. *Bozhok R., Koshmanenko V. D.* Singular perturbations of self-adjoint operators associated with rigged Hilbert spaces // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 5.
6. *Koshmanenko V.* Construction of singular perturbations by the method of rigged Hilbert spaces // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2005. – **38.** – P. 4999 – 5009.

Одержано 05.12.05,
після доопрацювання — 23.05.07