Ю. А. Митропольский

Основные результаты в области математической физики и нелинейной механики, полученные в Институте математики АН УССР за 50 лет

Математическая физика — одна из наиболее бурно развивающихся областей современного естествознания. Методы классической математической физики находят самое широкое применение в различных областях науки и техники — в теории колебаний, аэро- и гидродинамике, оптике, акустике, электро- и радиотехнике, теплофизике и многих других.

Освоение передовых рубежей науки о природе колебательных явлений в физике, технике, биологии, физики элементарных частиц, физики твердого тела, квантовой электроники — потребовало создания ряда аппаратов современной математической физики, включающих теорию возмущений, элементы теории групп, функционального анализа, теории функций многих комплексных переменных, теории обобщенных функций, теории вероятностей и других разделов математики.

Важный вклад в развитие математической физики внесли ученые Института математики АН УССР. Основные достижения в этой области науки, полученные в Институте математики АН УССР, связаны с именами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

Фундаментальный вклад в развитие нелинейной механики — важного раздела математической физики — внесли труды Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Ими были созданы и строго математически обоснованы так называемые асимптотические методы нелинейной механики.

Основная идея асимптотических методов нелинейной механики может быть проиллюстрирована на примере нелинейного уравнения второго порядка

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = \varepsilon f(x, dx/dt), \qquad (1)$$

где ε — малый положительный параметр.

Исходя из физических соображений о виде решения при наличии возмущения, решение уравнения (1) ищется в виде степенного ряда

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \ldots, \qquad (2)$$

где $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ... периодически зависят от угла ψ, а a и ψ определяются дифференциальными уравнениями

$$da/dt = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \quad d\psi/dt = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) \ldots. \qquad (3)$$

Итак, задача сводится к подбору соответствующих выражений для $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ..., $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, ... таким образом, чтобы выражение (2) формально удовлетворяло уравнению (1). Эта задача решается элементарно, а для искомых коэффициентов разложения получаются явные выражения.

Идея асимптотических методов оказалась исключительно общей и гибкой. Она применима к самым разнообразным случаям систем с «малым» и «большим» параметром, в том числе и к системам с бесконечным числом степеней свободы.

Асимптотические методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений занимают в настоящее время центральное место в нелинейной механике и смежных разделах метаматики, механики, физики и техники.

В 1945—1949 гг. большой вклад в эту область математической физики был внесен Н. Н. Боголюбовым, который сформулировал и строго математически обосновал метод усреднения, разработал теорию интегральных многообразий и метод исследования одночастотных колебательных режимов в системах со многими степенями свободы. Фундаментальные теоремы, доказанные Н. Н. Боголюбовым, стали классическими и явились неиссякаемыми источниками для последующих обобщений и анализа сложных явлений в нелинейных колебательных системах.

1. Одночастотный метод и системы с медленно меняющимися параметрами. В 1948 г. Н. Н. Боголюбов установил эффективный метод исследования нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы — так называемый одночастотный метод. Суть его состоит в том, что находится не общее решение системы дифференциальных уравнений, а только частное, зависящее от двух произвольных постоянных и соответствующее определенному колебательному процессу в системе со многими степенями свободы.

В дальнейшем одночастотный метод был существенно развит и строго обоснован Ю. А. Митропольским применительно к ряду важных классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с «малым» параметром и применительно к исследованию колебательных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, близких к уравнениям гиперболического типа. Асимптотические методы были также распространены на исследование нелинейных колебательных систем с медленно изменяющимися параметрами. Разработана и строго обоснована теория медленных процессов в нелинейных колебательных системах как с одной, так и со многими степенями свободы, которая нашла широкое применение при решении многих важных задач физики и техники (прохождение через резонанс в нелинейных системах, колебание маятника с переменной длиной, исследование нестационарных процессов в роторах турбомашин и гироскопических явлений в синхрофазотронах, при расчете орбит спутников и т. п.).

2. Развитие асимптотических методов и применение ЭВМ. На основе анализа ряда вариантов асимптотических методов Ю. А. Митропольским, А. М. Самойленко, А. И. Скрипником, П. М. Сеником, В. Г. Самойленко сформулированы характерные особенности и закономерности асимптотических методов и предложена общая схема построения асимптотических разложений, которая позволяет разрабатывать новые варианты асимптотических методов. В основу анализа положено изучение кольца функций из класса C^∞. Аксиоматически вводятся три условия, накладываемые на оператор усреднения $\underset{t}{M}$ и на некоторый вспомогательный дифференциальный оператор L. Установлено свойство разделимости решения исходной системы на «нормально» и «плавно» или же на «быстро» и «медленно» изменяющиеся компоненты.

Установлена оценка близости точного решения и его m-го приближения. Показано, что разработанная схема включает в себя классический алгоритм метода усреднения. Реализация предложенного алгоритма для системы с главной линейной частью при $m \to \infty$ и $\varepsilon = 1$ приводит к методу нормальных форм.

На основе рассмотренной методики предложен алгоритм асимптотического интегрирования для исследования слабо нелинейных дифференциальных уравнений. Найдены формулы асимптотических приближений, исследованы уравнения m-х приближений.

Для систем дифференциальных уравнений, близких к существенно нелинейным, разработан математический аппарат, основанный на сочетании асимптотического метода нелинейной механики с методом минимизации среднеквадратичной величины соответствующей невязки. Построены улучшенные в среднем стационарные асимптотические представления. Развита теория многочастотных колебаний, разработаны схемы асимптотического интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих многочастотные колебания. Получены новые фундаментальные теоремы по обоснованию асимптотических методов исследования многочастотных колебаний. Проведен анализ колебаний систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка в резонансном и нерезонансном случаях, получены формулы асимптотических приближений.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы алгоритмы асимптотического разделения движений на «быстрые» и «медленные» соответственно некоторой шкале масштабов времени. Разработана методика построения трех- и многомасштабных асимптотических схем.

Предложено развитие асимптотического метода на основе операции «погружения» в теории колебаний систем с сосредоточенными параметрами. Суть его состоит в переходе к вспомогательной системе в полных дифференциалах. Если нулевое приближение этой системы обладает специальными групповыми свойствами, то для нее можно на основе гармонического анализа на группах развить асимптотический метод.

Особо следует отметить сложившееся в последние десятилетия направление, получившее название конструктивного анализа нелинейных систем. Оно связано с исследованием либо сложных систем, либо систем с большой размерностью. Указанное направление можно условно отнести к интенсивно развивающейся в последнее время «машинной математике», которая в процессе исследования существенно использует ЭВМ. Асимптотические методы нелинейной механики были применены при расчете на ЭВМ резонансных цепей микроэлектроники. Разработаны программы, реализующие буквенные выкладки алгоритмов на ЭВМ. Для этого весьма важной оказалась разработка новых методов конструктивного построения асимптотических решений. Получены явные формулы для определения асимптотических разложений, соответствующих асимптотическому методу с некоторым общим оператором усреднения, и разработан метод конструктивного построения решений на ЭВМ.

3. Развитие метода усреднения. В 30-х годах Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов предложили некоторый общий подход для исследования уравнений нелинейной механики, содержащих малый параметр. Содержание этого метода сводится к построению замены переменных, позволяющей отделять «медленные» переменные от «быстрых». Такая замена дает возможность представлять решения системы уравнений в виде асимптотического ряда, первый член которого совпадает с решением, получаемым по методу Ван-дер-Поля.

В 40-х годах Н. Н. Боголюбов создал строгую теорию метода усреднения и показал, что этот метод органически связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей уравнений с произвольной степенью точности относительно малого параметра ε. При этом, исходя из тонких физических соображений, им было указано, как строить не только систему первого приближения (усредненную систему), но и усредненные системы высших приближений, решения которых аппроксимируют решения исходной (точной) системы с произвольной наперед заданной точностью.

Суть этого метода заключается в следующем. Рассматривается дифференциальное уравнение в векторной форме

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x), \tag{4}$$

где ε — малый положительный параметр, t — время, x, X — точки n-мерного евклидова пространства E_n. Уравнения, правая часть которых пропорциональна ε, согласно терминологии, введенной Н. Н. Боголюбовым, называются уравнениями в «стандартной» форме.

При ряде ограничений, накладываемых на правые части уравнения (4), путем замены переменных, близкой к тождественной, согласно формулам

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \varepsilon^2 F_2(t, \xi) + \dots + \varepsilon^m F_m(t, \xi) \tag{5}$$

уравнение (4) сводится к точному уравнению

$$d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi). \tag{6}$$

Отбрасывая в уравнении (6) слагаемое $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi)$, получаем «усредненное» уравнение m-го приближения:

$$d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi). \tag{7}$$

Помимо построения схемы усреднения, Н. Н. Боголюбовым было дано обстоятельное математическое обоснование предложенного им метода усреднения. Это обоснование в основном сводится к решению следующих двух проблем:

1) отыскание условий, при которых разность между решением точной системы уравнений

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x) \tag{8}$$

и решением соответствующей ей усредненной системы

$$d\xi/dt = \varepsilon \underset{t}{M} \{X(t, \xi)\} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{9}$$

при достаточно малых значениях параметра ε становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени;

2) установление соответствия между различными свойствами решений точных уравнений (8) и решений усредненных уравнений (9), которые зависят от их поведения на бесконечном интервале времени.

Для решения этих проблем Н. Н. Боголюбовым доказан ряд тонких теорем, которые стали классическими. Это математическое обоснование послужило многим ученым источником идей для дальнейшего развития метода.

Как известно, в последние годы в работах советских и зарубежных математиков широкое развитие получили различные варианты метода усреднения в формулировке Н. Н. Боголюбова как для рассматривавшихся ранее, так и для новых классов дифференциальных уравнений. В Институте математики АН УССР приведенные выше результаты Н. Н. Боголюбова нашли дальнейшее развитие в ряде работ Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, А. К. Лопатина, В. Г. Коломийца, В. И. Фодчука, В. Н. Челомея, И. З. Штокало.

Метод усреднения был распространен на нелинейные уравнения с медленно меняющимися коэффициентами, на многочастотные системы, уравнения, близкие к точно интегрирующимся, уравнения в частных производных, конечно-разностные уравнения, уравнения с недифференцируемыми правыми частями, уравнения с мгновенными силами, с запаздывающим аргументом, стохастические уравнения, уравнения в бесконечномерных пространствах, в гильбертовом пространстве и т. п. Для всех этих случаев были доказаны теоремы — обобщения первой основной теоремы Н. Н. Боголюбова об оценке разности между решениями точной системы и усредненной.

Для иллюстрации метода усреднения Н. Н. Боголюбовым был рассмотрен изящный пример — колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса. Здесь был получен важный вывод об устойчивости верхнего положения равновесия при достаточно большой частоте вибрации точки подвеса. Этот вывод явился стимулом интересной работы В. Н. Челомея, в которой было показано, что те же по природе динамические силы, которые рассматривались в примере с маятником, приводят статически неустойчивую систему (в частности, стержень) к динамически устойчивой, в результате чего В. Н. Челомеем была показана принципиальная возможность повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций.

На основании идей метода усреднения И. З. Штокало была решена задача устойчивости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, установлена формальная теорема Флоке в том смысле, что процесс сведения к системе с постоянными коэффициентами асимптотически сходящийся.

Большой цикл исследований выполнен по разработке теоретико-группового подхода в развитии метода усреднения.

Установлены необходимые и достаточные условия декомпозиции системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности на подсистемы более низкой размерности. Эти условия конструктивно выражаются через коэффициенты системы и сводятся к построению алгебр Ли (конечномерных и бесконечномерных). Разложимость этих алгебр в прямую сумму идеалов обеспечивает декомпозируемость.

Дальнейшим развитием метода усреднения стали результаты, относящиеся к асимптотической декомпозиции дифференциальных систем в окрестности интегральных многообразий систем с заданными свойствами (системы нулевого приближения). В основу здесь положено преобразование

Кэмпбелла — Хаусдорфа, и задача сводится к задаче возмущения на алгебрах. При различных предположениях о свойствах алгебры Ли невозмущенной системы, например разложимости в прямую сумму подалгебр, компактности и т. д., стало возможным рассмотреть ряд новых задач.

Впервые разработана теория возмущений для пфаффовых систем, что, как известно, эквивалентно исследованию систем дифференциальных уравнений в частных производных общего вида.

Для систем с медленными и быстрыми переменными доказана декомпозируемость при самых общих условиях, накладываемых на правые части. Для полной декомпозируемости (невырожденный случай системы нулевого приближения) требуется наложить ряд ограничений, сводящихся в конечном счете к условию отсутствия перекрестных резонансных соотношений.

Разработанные алгоритмы оказались весьма эффективными в прикладных задачах. Рассмотрена задача асимптотического расщепления системы уравнений n-го порядка движения летательного аппарата, когда в нулевом приближении уравнения разделяются на две независимые подсистемы: продольного и бокового движения. Аналогичная задача встречается при плоскопараллельном адиабатическом движении газа.

Рассмотрена задача о возмущении дифференциальной системы, допускающей некоторую группу преобразований Ли. С помощью асимптотической замены она сводится к уравнениям с той же группой симметрии.

Для описания волновых процессов в распределенных динамических системах предложен модовый подход. В его основе лежит исследование групповых свойств интегральных многообразий, использование групповых свойств алгебр и переход к гильбертовым пространствам, обобщающим разложения в классические ряды Фурье Это позволяет сохранить ряд преимуществ асимптотического метода, обеспечивает преемственность с асимптотическими методами нелинейной механики, открывая тем самым широкие возможности перенесения методов и постановок задач на новые классы проблем.

4. Проблема изучения интегральных многообразий в нелинейной механике. При исследовании колебательных процессов в сложных системах с большим числом степеней свободы часто большое значение имеет выделение из общего многообразия движений, допускаемых системой, более простых частных движений или движений, обладающих характерными свойствами.

Это — проблема изучения интегральных многообразий. К этой проблеме, в частности, относится известная проблема об исследовании одночастотных колебательных режимов в системах со многими степенями свободы, о которой сказано выше.

Проблема изучения интегральных многообразий в нелинейной механике состоит в выделении из всей совокупности решений, допускаемых сложными системами нелинейных дифференциальных уравнений, многообразия решений (интегральных многообразий), имеющего размерность меньше порядка системы и обладающего теми или иными характерными свойствами.

Основная идея метода интегральных многообразий впервые была четко сформулирована Н. Н. Боголюбовым для нелинейных дифференциальных уравнений в стандартной форме. Для этих уравнений Н. Н. Боголюбовым сформулированы и доказаны основополагающие теоремы существования и устойчивости многообразия, которые легли в основу всех последующих исследований

Основные проблемы, возникающие при исследовании интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений, состоят в следующем.

Наряду с заданной системой нелинейных дифференциальных уравнений рассматривается соответствующая ей система «первого приближения» или «невозмущенная» система. Как хорошо известно, даже малые возмущения могут резко изменить характер фазовых траекторий приближенной системы. В то же время при некоторых довольно общих условиях, накладываемых на правые части рассматриваемых уравнений, удается показать, что если соответствующие приближенные уравнения обладают интегральным многообразием $\mathfrak{M}_0$, то в достаточно малой его окрестности будет существовать интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\varepsilon$ исходных уравнений, которое при $\varepsilon \to 0$ стремится к $\mathfrak{M}_0$. При этом, если $\mathfrak{M}_0$ устойчиво, условно устойчиво или неустойчиво, то и $\mathfrak{M}_\varepsilon$ соответственно будет устойчивым, условно устойчивым или неустойчивым.

Таким образом, метод интегральных многообразий позволяет установить соответствие между решениями точных (исходных) уравнений и соответствующих им приближенных (усредненных, невозмущенных и т. п. уравнений).

Независимо от этой проблемы теория интегральных многообразий представляет также самостоятельный интерес в связи с тем, что, найдя интегральное многообразие для нелинейной системы уравнений, мы сводим ее рассмотрение к уравнениям на многообразии, размерность которого меньше размерности исходного фазового пространства.

Особенный интерес представляет случай, если многообразие устойчиво и размерность его равна 1 или 2.

Идея метода интегральных многообразий и методы доказательства соответствующих теорем оказались очень эффективными и гибкими и получили в Институте математики (Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, А. М. Самойленко, К. В. Задирака, В. И. Фодчук) дальнейшее развитие и применение для исследования широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений. Здесь в первую очередь следует отметить исследование интегральных многообразий для уравнений, близких к точно интегрирующимся; уравнений с медленно меняющимися параметрами; уравнений, содержащих быстрые и медленные движения, в частности уравнений с быстро вращающейся фазой; уравнений с отклоняющимся аргументом. Применив аппарат спектральной теории линейных операторов, метод интегральных многообразий удалось также распространить для исследования указанных типов уравнений в случае бесконечномерного банахова пространства, в частности гильбертова пространства.

С помощью метода интегральных многообразий исследована устойчивость стационарных решений нелинейных уравнений при постоянно действующих возмущениях; доказано существование квазипериодического решения системы нелинейных уравнений. Изучены нелинейные дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной, рассмотрена задача о сведении, позволяющая судить об устойчивости решений исходной системы по устойчивости решений на интегральном многообразии, размерность которого определяется кратностью критической части спектра некоторого линейного уравнения.

5. Колебания в нелинейных системах с последействием. В настоящее время одной из актуальных задач теории колебаний является задача исследования колебательных процессов в системах с последействием, которые обычно описываются дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом (с запаздыванием). К исследованию таких систем приводят физические и технические задачи, в которых сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости и положения этой точки не только в данный момент, но и в некоторый момент, предшествующий данному. Актуальность исследования подобных задач, а также возможность распространения асимптотических методов для исследования их была высказана Н. Н. Боголюбовым в начале 50-х годов. Эти идеи были развиты рядом результатов, полученных Ю. А. Митропольским, Д. И. Мартынюком, Д. Г. Кореневским, В. И. Фодчуком. Ими разработаны алгоритмы (схемы) построения асимптотических решений для нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом. Рассмотрены различные случаи: постоянных и медленно меняющихся коэффициентов и запаздывания, автономных и неавтономных уравнений, резонансный и нерезонансный. Разработан метод исследования одночастотных колебаний в нелинейных системах с запаздыванием со многими степенями свободы, а также метод ус-

реднения, позволяющий исследовать периодические решения таких систем.

Получил развитие асимптотический метод нелинейной механики для исследования как детерминированных нелинейных колебаний в системах с распределенными параметрами и с запаздыванием, так и случайных колебаний в нелинейных колебательных системах с запаздыванием. Особое внимание было обращено на исследование периодических и квазипериодических систем с запаздыванием.

Для исследования сильно нелинейных систем с запаздыванием развит топологический метод исследования периодических решений, метод Чезари, численно-аналитический метод и др.

Предложен также проекционно-итеративный метод определения периодических решений нелинейных систем с запаздыванием, сочетающий идеи метода Галеркина и численно-аналитического метода.

Получили развитие вопросы существования инвариантных тороидальных многообразий для систем с запаздыванием. Доказаны новые теоремы существования и устойчивости инвариантных многообразий, указан алгоритм асимптотического интегрирования систем с запаздыванием, обобщающий метод асимптотического интегрирования квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

6. Влияние случайных сил на колебательные системы. Изучение влияния случайных сил на нелинейные колебательные системы имеет большое значение во многих практических задачах.

Уже в 1945 г. Н. Н. Боголюбов в монографии « О некоторых статистических методах в математической физике» рассмотрел задачи о влиянии случайных сил на гармонический осциллятор и установлении статистического равновесия в системе, связанной с термостатом.

В частности, при исследовании предельного поведения линейной колебательной системы, находящейся под воздействием случайных сил, в пределе превращающихся в «белый шум», Н. Н. Боголюбов показал, что движение такой системы описывается марковским процессом, переходные вероятности которого удовлетворяют уравнению Колмогорова — Фоккера — Планка (КФП).

Развивая эти идеи, Ю. А. Митропольский, В. Б. Ларин и В. Г. Коломиец при помощи асимптотических методов нелинейной механики изучали случайные колебания квазилинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными стохастическими уравнениями второго и высших порядков, стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа, а также интегро-дифференциальными уравнениями со случайными возмущениями типа «белого шума». Изучены случайные колебания в существенно нелинейных стохастических системах с одной степенью свободы. Показано, что первое приближение асимптотического метода может быть получено методом статистической линеаризации. Доказаны аналоги теоремы усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка гиперболического типа с последействием и случайными воздействиями.

Решена задача оптимизации колебательной системы с одной степенью свободы, находящейся под воздействием случайных сил типа «белого шума».

7. Колебательные системы с распределенными параметрами (массами, распределенными силами). Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов впервые обратили внимание на эффективность применения асимптотических методов нелинейной механики для рассмотрения колебательных явлений в системах с распределенными массами (валы, стержневые системы).

Эти идеи получили существенное развитие в Институте математики АН УССР в работах Ю. А. Митропольского и Б. И. Мосеенкова. Так, ими развит асимптотический метод нелинейной механики для исследования как стационарных, так и нестационарных колебаний в системах с распределенными параметрами, описываемых уравнениями в частных производных. Здесь большое внимание уделено актуальным, быстро развивающимся разделам нелинейной теории колебаний систем с распределенными параметрами —

нелинейным краевым задачам с учетом нелинейностей в уравнениях движения и краевых условиях, нелинейным уравнениям гиперболического типа с учетом влияния случайных сил и запаздывания. Были рассмотрены изгибные, крутильные и изгибно-крутильные колебания в механических упругих системах с учетом различных нелинейных характеристик и возмущений. Доказаны теоремы о существовании почти периодических решений волновых уравнений. Метод усреднения был распространен на системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Полученные результаты нашли широкое применение при исследовании нестационарных колебаний в механических системах с распределенными параметрами, при исследовании волн в стратификационной среде, взаимодействия волн в дисперсионной среде и др.

Исследованы асимптотические свойства решений интегральных, интегро-дифференциальных уравнений.

К приведенному выше циклу работ, посвященных развитию асимптотических методов нелинейной механики применительно к исследованию систем с распределенными параметрами, примыкает цикл исследований, проведенных А. А. Березовским, К. Я. Кухтой.

Разработан единый приближенный метод решения граничных задач на собственные значения для упругих систем с непрерывными и переменными непрерывно-дискретными параметрами при произвольном числе разрывов, а также при непрерывных и дискретных возмущениях. Метод применен к расчету поперечных крутильных и изгибно-крутильных колебаний несущих поверхностей самолетов.

Проведены исследования по нелинейным краевым задачам теории оболочек, теплоизлучения и электромагнитных полей в ферромагнитных средах. Здесь основное внимание было уделено, наряду с установлением теорем существования и единственности, разработке алгоритмов построения приближенных решений краевых задач, которые, как правило, не допускают точных решений.

Объединяющим фактором указанных выше задач из различных областей математической физики является их принадлежность к специальному классу нелинейных краевых задач с явно выделенными главными линейными частями, содержащих нелинейности только в виде сильных возмущений правых частей дифференциальных уравнений и краевых условий.

8. Метод ускоренной сходимости в задачах нелинейной механики и многочастотные колебания. В 1934 г. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым был предложен метод последовательных замен, который стал эффективным аппаратом для решения многих интересных задач нелинейной механики. В частности, этим методом была решена задача о существовании квазипериодического режима с двумя основными частотами в нелинейных колебательных системах. Однако получаемые приближенные решения в общем случае содержали расходящиеся ряды. В 50—60-х годах А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом для гамильтоновых систем были получены принципиальные результаты по методу построения решений, характеризующихся ускоренной сходимостью, типичной для ньютоновского метода касательных. В 1963 г. Н. Н. Боголюбов, объединяя идею выше указанных работ со своим методом интегральных многообразий, исследовал неконсервативную систему и построил для ее решения сходящиеся ряды. При этом им было доказано существование тороидального многообразия квазипериодических решений (при $n > 2$), исследована их зависимость от параметров и решен ряд других вопросов.

Идеи и результаты Н. Н. Боголюбова получили дальнейшее развитие в ряде работ Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, В. Л. Кулика. Было построено общее решение системы нелинейных дифференциальных уравнений и решен вопрос о приводимости нелинейной системы к линейной с постоянными коэффициентами. Исследовано поведение траекторий на n-мерном гладком торе, решен вопрос о приводимости линейной системы дифференциальных уравнений (как аналитической, так и конечное число раз дифференцируемой) с квазипериодическими коэффициентами к системе с постоянной матрицей, исследована мера приводимости таких систем. Изучено расположение интегральных кривых систем нелинейных уравнений в окрестностях гладких тороидальных и компактных инвариантных многообразий.

Предложен новый подход к теории возмущения инвариантных тороидальных многообразий динамических систем, связанный с использованием функций Грина для линеаризованной задачи. Этот подход дал возможность рассмотреть с общей точки зрения теорию возмущения как гладких, так и недифференцируемых инвариантных многообразий и доказать новые теоремы об их существовании. Рассмотрены вопросы существования, единственности и гладкости функции Грина линеаризованной системы, ее расщепляемости и дихотомии.

Многие из перечисленных результатов, полученных методом ускоренной сходимости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, были перенесены на уравнения с запаздыванием, с импульсными толчками, на счетные системы уравнений.

Результаты Н. Н. Боголюбова были также обобщены на случай, когда в аналитической системе уравнений матрица линейной части H — переменная, $H = H(\varphi)$. После построения специальных аналитических сглаживающих операторов эти результаты удалось перенести на системы с дифференцируемыми конечное число раз коэффициентами.

Глубокие результаты получены в теории многочастотных колебаний. Под многочастотными колебаниями обычно понимают движение системы, описываемое квазипериодической функцией $x(t)$. Сама эта функция — плохой объект исследования, поскольку как угодно малые возмущения могут существенно изменить ее частотный базис. При этом во многих случаях оказывается, что поверхность, «заметаемая» тракторией в фазовом пространстве x-ов, устойчива по отношению к малым возмущениям. Поэтому возникли важные и сложные задачи по исследованию устойчивости этих поверхностей, расположения траекторий на них, возможности линеаризации автономной системы дифференциальных уравнений в их окрестности и многие другие. Здесь рассмотрена возможность введения фазовых φ и нормальных y координат в окрестности m-мерного инвариантного тора $\mathcal{T}_m$. Доказано, что ограничение количества фазовых координат φ всегда позволяет ввести такие координаты. Отказ от этого ограничения приводит к тому, что не всегда в окрестности тора $\mathcal{T}_m$ можно ввести координаты (φ, y). Разработан важный с практической стороны метод Галеркина для отыскания инвариантных тороидальных поверхностей для системы дифференциальных уравнений.

С помощью введения определенных соотношений между скоростями сближения траекторий на торе и скоростью приближения траекторий из окрестности тора, при этом предполагается определенная гладкость функций, стоящих в правых частях уравнений, доказана сходимость приближений метода Галеркина к m-мерной инвариантной тороидальной поверхности.

Как известно, условия, гарантирующие неразрушаемость тора $\mathcal{T}_m$ в системе уравнений при малых возмущениях, определяют некоторый «грубый» характер поведения траекторий этой системы в окрестности $\mathcal{T}_m$. Изучение этой окрестности было необходимо и важно для выяснения механизма разрушения инвариантной поверхности малыми возмущениями динамической системы. При этом получен ряд результатов о взаимосвязи траекторий, расположенных в окрестности тора $\mathcal{T}_m$ и на самом торе. Оказалось, что каждая траектория из окрестности тора «выбирает» единственную траекторию на самом торе и экспоненциально к ней приближается на бесконечности. Изучена возможность линеаризации нелинейной динамической системы в окрестности тора $\mathcal{T}_m$, а также вопросы теории бифуркации инвариантных многообразий для ряда достаточно гладких систем. Предполагалось, что для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ система уравнений имеет одно и то же инвариантное множество $\mathfrak{M}_0$, и в процессе изменения параметра ε происходит смена устойчивости множества $\mathfrak{M}$. При этих условиях доказано, что при прохождении параметра ε через критическое значение, ведущее к смене устойчивости, из $\mathfrak{M}$ может появиться новое инвариантное множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$. Для появления такого множества достаточно смены асимптотической устойчивости $\mathfrak{M}$ на неустойчивость. Структура порождаемого множества $\mathfrak{M}_\varepsilon$ зависит от множества $\mathfrak{M}_0$ и характера смены устойчивости.

Получены условия существования инвариантного тора $\mathcal{T}_m$ для нелинейной системы с медленно меняющейся фазой, в том числе для двоякопериодической колебательной системы с медленно меняющимися коэффициентами.

Подробно изучена функция Грина $G(\tau, \varphi)$ в задаче об инвариантных торах: зависимость от параметра, модуль непрерывности по переменным φ, дифференцируемость и др.

Получен ряд результатов по исследованию экспоненциальной дихотомичности тора $\mathcal{T}_m$ с помощью квадратичных форм.

Разработан новый подход к исследованию поведения решений линейной однородной системы на всей оси R, позволяющий охватывать сразу целые семейства таких систем. Это дало возможность получить условия существования равномерно ограниченных на R решений неоднородной системы уравнений, а также исследовать неоднозначную функцию Грина задачи об ограниченных решениях.

Исследована возможность расщепления системы уравнений заменой переменных Ляпунова $x = L(\varphi)y$ на системы меньшего порядка.

Основополагающие идеи и фундаментальные результаты, полученные в области асимптотических методов нелинейной механики, составляют в настоящее время основу многих современных исследований по общей механике, механике сплошной среды, теории устойчивости, теории регулирования и стабилизации, математической экологии и других направлений науки и техники.

Подводя итог основным результатам, полученным в Институте математики АН УССР Н. Н. Боголюбовым и его учениками и последователями в многочисленных трудах в области создания асимптотических методов нелинейной механики, следует особо подчеркнуть, что благодаря своему глубокому теоретическому содержанию и широкой практической направленности эти методы получили широкую известность не только в нашей стране, но и во всем мире. Они обогатили советскую науку новыми достижениями как в области математики, так и в области приложений к механике, физике и технике. С полной уверенностью можно сказать, что во всем мире асимптотические методы нелинейной механики—один из наиболее эффективных методов расчета нелинейных колебательных процессов.

9. Математические вопросы теоретической физики. Остановимся теперь на основных результатах, полученных в Институте математики в области теоретической физики. Эти результаты в основном связаны с работами Н. Н. Боголюбова, а также О. С. Парасюка и В. И. Фущича.

Первые работы Н. Н. Боголюбова, относящиеся к этой области, естественно связаны с дальнейшим развитием асимптотических методов нелинейной механики и применением их в задаче многих тел в классической статистической механике.

Уже в 1945 г. в монографии «О некоторых статистических методах в математической физике» Н. Н. Боголюбовым были рассмотрены задачи о влиянии случайных сил на гармонический осциллятор и установлении равновесия в системе, связанной с термостатом. Показано, что в зависимости от использования аппроксимации и выбора масштаба времени один и тот же случайный процесс может рассматриваться как динамический, марковский или — в общем случае — как некоторый немарковский.

Выдвинутая Н. Н. Боголюбовым идея об иерархии времен в статистической физике определила все дальнейшее развитие статистической теории необратимых процессов.

Ряд исследований Н. Н. Боголюбова посвящен вопросам статистической механики классических систем. Здесь разработаны методы функций распределения и производящих функционалов для решения основной задачи статистической физики о вычислении термодинамических функций через молекулярные характеристики вещества. Дальнейшее распространение аппарата функций распределения на случай неравновесных процессов дало возможность Н. Н. Боголюбову подойти с единой точки зрения к теории и методу построения кинетических уравнений для систем взаимодействующих частиц. Для решения кинетических уравнений в 1947 г. был предложен метод, суть которого заключается в использовании наличия двух процессов — медленного и быстрого — в эволюции функций распределения со временем и специальном введении «малых» параметров. Метод кинетических функций распределения был использован Н. Н. Боголюбовым при исследовании вопроса о получении уравнений гидромеханики на основе классической механики совокупности молекул, взаимодействующих между собой. Не менее важные результаты были получены в квантовой статистике, позволившие решить в общем случае задачу о построении кинетических уравнений для квантовых систем во втором приближении. Был разработан метод вторичного квантования, давший возможность исследовать поведение электронов в металле и оказавшийся весьма эффективным при изучении квантовой теории ферромагнетизма.

В 1947 г. Н. Н. Боголюбовым были получены первые результаты по теории вырождения неидеальных газов. Исследование «конденсации» неидеального бозе-газа явилось первым шагом на пути построения микроскопической теории сверхтекучести гелия-II. Был установлен исключительно важный факт: свойством сверхтекучести может обладать только газ со взаимодействием, но отнюдь не идеальный газ. При этом показано, что, несмотря на слабость взаимодействия, обычная теория возмущений оказалась здесь принципиально неприменимой и возникла необходимость в развитии совершенно новой методики расчета. Развитие идей и методов, высказанных Н. Н. Боголюбовым в 1947—1948 гг., позволило ему в 1957 г. создать (независимо от нескольких более ранних работ Бардина, Купера и Шриффера) последовательную микроскопическую теорию сверхпроводимости. Для решения указанной проблемы Н. Н. Боголюбов построил адекватный математический аппарат, в основе которого лежит особое преобразование бозе-амплитуд, широко известное сейчас как uv-преобразование Боголюбова. Это преобразование получило широкое применение в теоретической физике, например в ряде работ по квантовой теории гравитационного поля. Дальнейшее развитие этих идей и методов позволило Н. Н. Боголюбову создать в 1958 г. последовательную микроскопическую теорию сверхпроводимости. За разработку нового метода в квантовой теории поля и статистической физике, который привел, в частности, к обоснованию теории сверхтекучести и теории сверхпроводимости, Н. Н. Боголюбов удостоен в 1958 году Ленинской премии.

Большой цикл исследований Н. Н. Боголюбова и его учеников, выполненных в Институте математики АН УССР, относится к фундаментальным проблемам современной квантовой теории поля и элементарных частиц. Здесь Н. Н. Боголюбовым предложен метод построения матрицы рассеяния в виде разложения по степеням взаимодействия, дана оригинальная формулировка принципа причинности. Для правильного определения операции умножения обобщенных причинных функций квантовой теории поля Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком разработана R-операция, с помощью которой дано корректное определение хронологического произведения лагранжианов с точностью до квазилокальных операторов. Это позволило строго математически обосновать метод перенормировки квантовой теории поля.

Работы Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка по теории умножения обобщенных функций сыграли основополагающую роль при построении единой теории электромагнитных и слабых взаимодействий.

Н. Н. Боголюбовым построено также доказательство дисперсионных соотношений, в процессе которого установлен ряд тонких свойств функций многих комплексных переменных и обобщенных функций.

В последние 10—15 лет в Институте математики В. И. Фущичем выполнен цикл работ, посвященных исследованию симметричных свойств основных уравнений современной квантовой физики. Основные результаты, полученные в этих работах, могут быть сформулированы следующим образом.

Предложен эффективный алгоритм исследования симметрийных свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, существенно отличный от классического метода Ли.

Найдены новые группы инвариантности многих уравнений квантовой теории — Дирака, Максвелла, Клейна — Гордона, Кеммера — Дэффина и др. Найдены интегралы движения, соответствующие нелокальной симметрии уравнений квантовой физики; установлена связь интегралов движения электромагнитного поля с классическими параметрами Стокса.

Получен ряд результатов относительно симметрии нелинейных уравнений математической физики. Исследована симметрия поливолнового уравнения с нелинейными добавками и обобщенного уравнения Буссинеска.

Построен класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, инвариантных относительно группы Галилея.

Получен ряд результатов по развитию теории представлений групп и алгебр Ли применительно к задачам математической физики.

Решены задачи о редукции представлений группы движений $(n+1)$-мерного пространства Де-Ситтера $P(1,n)$ по представлениям групп Пуанкаре $P(1,3)$ и Галилея $G(1,3)$.

Решена задача описания неэквивалентных подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, содержащая, в частности, такие важные с физической точки зрения подгруппы, как группы Пуанкаре и Галилея.

Выведены и детально изучены системы дифференциальных уравнений в частных производных, инвариантные относительно группы вращения и сдвигов в n-мерном пространстве Минковского.

Решена задача описания некоторого класса уравнений, инвариантных относительно группы Галилея, которые можно интерпретировать как уравнения движения нерелятивистской частицы произвольного спина.