УДК 517.983

В. Ф. Журавлев (Житомир. нац. агроэкол. ун-т)

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ n (d)-НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

On the basis of generalizing of the well-known Schmidt lemma to the case of linear bounded n- and d-normal operators in the Banach space, we suggest constructions of generally inverse operators. We also obtain criteria of the solvability and formulas for the representation of linear equations with these operators.

На основі узагальнення відомої леми Шмідта на випадок лінійних обмежених n- і d-нормальних операторів у банаховому просторі запропоновано конструкції узагальнено-обернених операторів. Отримано критерії розв'язності та формули для зображення розв'язків лінійних рівнянь з такими операторами.

Исследование разрешимости и построение решений краевых задач для счетных систем дифференциальных уравнений [1], когда число краевых условий конечно или наоборот, когда число уравнений конечно, а число краевых условий бесконечно, приводит к необходимости построения обобщенных обратных операторов к n- или d-нормальным [2].

Наиболее полно изучен и широко применяется способ обобщенного обращения нормально разрешимых операторов, являющихся фредгольмовыми (с ненулевыми ядрами) — так называемая конструкция Шмидта [3] и ее аналог для нетеровых операторов [4].

В данной работе доказаны леммы, обобщающие лемму Шмидта [5] на случай нормально разрешимых операторов, являющихся n- или d-нормальными, предложены конструкции обобщенно-обратных к ним операторов, а также доказаны теоремы о разрешимости и представлении решений линейных уравнений с такими операторами в банаховых пространствах.

Постановка задачи. Рассмотрим вопрос об условиях существования и построении решений уравнения

$$Lx = y \tag{1}$$

в предположении, что L — линейный ограниченный нормально разрешимый n- или d-нормальный оператор, действующий из банахова пространства $\mathbf{B_1}$ в банахово пространство $\mathbf{B_2}$, $L\colon \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$. Если $L\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный n-нормальный оператор, то будем предполагать, что его образ дополняем [6] в пространстве $\mathbf{B}_2$, т. е.

$$\mathbf{B}_2 = Y \oplus R(L), \tag{2}$$

а если $L\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный d — нормальный оператор, то его ядро $N(L)$ дополняемо в пространстве $\mathbf{B}_1$, т. е.

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X. \tag{3}$$

Обозначим через $\dim N(L) = \mu$ и $\dim N(L^*) = \nu$ размерности нуль-пространств оператора L и ему сопряженного L^* соответственно. По классификации С. Г. Крейна [7], если μ конечно, а ν — бесконечность, то L — n-нормальный оператор, а если, наоборот, μ — бесконечность, а ν конечно, то L — d-нормальный.

Ставится задача о построении ограниченного обобщенно-обратного оператора L^- к оператору L, условиях разрешимости и представлении решений уравнения (1).

Вспомогательные утверждения. Проведем рассуждения сначала для n-нормальных операторов. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\mu} \subset N(L)$, $f_i = \mathrm{col}(f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, f_i^{(3)}, \ldots)$ — базис подпространства $N(L)$, который существует вследствие его конечномерности $(\mu < \infty)$. Пусть пространство $\mathbf{B}_2$ имеет базис. Пространство $\mathbf{B}_2^*$ также имеет базис как пространство, сопряженное к пространству $\mathbf{B}_2$ [8, с. 131]. Следовательно, подпространство $N^*(L) \subset \mathbf{B}_2^*$ имеет полную систему базисных элементов (функционалов) $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty} \subset N^*(L)$, $\varphi_s(\cdot) = \mathrm{col}\left(\varphi_s^{(1)}(\cdot), \varphi_s^{(2)}(\cdot), \varphi_s^{(3)}(\cdot), \ldots\right)$. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\mu}$ и функционалов $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty}$ существуют сопряженно биортогональные [9] система функционалов $\left\{\gamma_j(\cdot)\right\}_{j=1}^{\mu} \subset \mathbf{B}_1^*$, $\gamma_j(\cdot) = \mathrm{col}\left(\gamma_j^{(1)}(\cdot), \gamma_j^{(2)}(\cdot), \gamma_j^{(3)}(\cdot), \ldots\right)$ и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{B}_2$, $\psi_k = \mathrm{col}\left(\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \psi_k^{(3)}, \ldots\right)$.

Функционалы $\left\{\gamma_j(\cdot)\right\}_{j=1}^{\mu}$ и $\left\{\varphi_s(\cdot)\right\}_{s=1}^{\infty}$, определенные на подпространствах $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ и $Y \subset \mathbf{B}_2$ (по теореме Хана – Банаха), могут быть продолжены, с сохранением норм, на пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно.

Обозначим через

$$\begin{gathered} X = (f_1, f_2, \ldots, f_\mu), \\ \Gamma(\cdot) = \big(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_\mu(\cdot)\big)^T, \\ \Phi(\cdot) = \big(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_k(\cdot), \ldots\big)^T, \\ \Psi = \big(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots\big) \end{gathered} \tag{4}$$

соответственно $(\infty \times \mu)$-, $(\mu \times \infty)$-, $(\infty \times \infty)$- и $(\infty \times \infty)$-мерные матрицы, причем $\Gamma(X) = E_\mu$, $\Phi(\Psi) = E_\infty$, E_μ, E_∞ — единичные матрицы.

Учитывая обозначения (4), оператор проектирования $\mathcal{P}_{N(L)} \colon \mathbf{B}_1 \to N(L)$ строим по формуле

$$\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot) = X\Gamma(\cdot), \qquad \mathcal{P}_{N(L)} \colon \ \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1. \tag{5}$$

Для построения оператора проектирования $\mathcal{P}_Y \colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ рассмотрим последовательность проекторов

$$\mathcal{P}_{Y(j)}(\cdot) = \Psi_j \Phi_j(\cdot) \tag{6}$$

пространства $\mathbf{B}_2$ на подпространства $Y_j \subset Y$, натянутые на элементы $\{\psi_k\}_{k=1}^{j}$.

Лемма 1. *Последовательность* (6) *проекторов* $\mathcal{P}_{Y(j)}$ *сильно* (*поточечно*) *сходится к проектору*

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi\Phi(\cdot) = \lim_{j\to\infty} \Psi_j \Phi_j(\cdot), \qquad \mathcal{P}_Y \colon \mathbf{B}_2 \to Y, \tag{7}$$

где $Y \subset \mathbf{B}_2$ — *бесконечномерное пространство, натянутое на полную систему элементов* $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$.

Доказательство. По определению сильной сходимости по норме пространства $\mathbf{B}_2$, с учетом определения матриц Φ и Ψ, для $y \in Y \subset \mathbf{B}_2$ имеем

$$\|\mathcal{P}_Y y - \mathcal{P}_{Y_j} y\| = \left\| \sum_{\xi=1}^{\infty} \varphi_\xi(y)\psi_\xi - \sum_{\xi=1}^{j} \varphi_\xi(y)\psi_\xi \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{\xi=j+1}^{\infty} \varphi_\xi(y)\psi_\xi \right\| \le \sum_{\xi=j+1}^{\infty} \|\varphi_\xi(y)\psi_\xi\|.$$

Величина $\sum_{\xi=j+1}^{\infty} \|\varphi_\xi(y)\psi_\xi\|$ стремится к нулю при $j \to \infty$ как остаток сходящегося по норме ряда $\sum_{\xi=1}^{\infty} \varphi_\xi(y)\psi_\xi$ разложения элемента $y \in Y$ по системе элементов $\{\psi_\xi\}_{\xi=1}^{\infty}$. А так как функционалы $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ продолжаемы с сохранением нормы на все пространство $\mathbf{B}_2$, то $\sum_{\xi=j+1}^{\infty} \left\|\varphi_\xi(y)\psi_\xi\right\| \to 0$ при $j \to \infty$ для любого $y \in \mathbf{B}_2$.

Операторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y$ являются проекторами, т. е. удовлетворяют их определяющим условиям $\mathcal{P}_{N(L)}^2 = \mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_Y^2 = \mathcal{P}_Y$. Эти проекторы ограничены. Ограниченность проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ следует из его конечномерности, а проектора $\mathcal{P}_Y$ — из дополняемости образа $R(L)$ оператора L [10].

Проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y$ разбивают пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ в прямые топологические суммы замкнутых подпространств:

$$\mathbf{B}_1 = R(\mathcal{P}_{N(L)}) \oplus N(\mathcal{P}_{N(L)}), \qquad \mathbf{B}_2 = R(\mathcal{P}_Y) \oplus N(\mathcal{P}_Y),$$

где $N(\mathcal{P}_{N(L)}) = X$, $R(\mathcal{P}_{N(L)}) = N(L)$, $R(\mathcal{P}_Y) = Y$, $N(\mathcal{P}_Y) = R(L)$.

Построим изоморфизм между подпространствами $N(L)$ и $Y_1 \subset Y$. Составим из μ строк и столбцов матриц Φ и Ψ соответственно матрицы:

$$\overline{\Phi}(\cdot) = (\overline{\varphi}_1(\cdot), \overline{\varphi}_2(\cdot), \ldots, \overline{\varphi}_\mu(\cdot))^T,$$
$$\overline{\Psi} = \left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_\mu\right). \tag{8}$$

Матрица $\overline{\Psi}$ составлена из системы элементов $\left\{\overline{\psi}_k\right\}_{k=1}^{\mu} \subset \{\psi_k\}_{k=1}^{\nu}$, на которую натянуто подпространство Y_1, а матрица $\overline{\Phi}$ — из функционалов $\left\{\overline{\varphi}_s(\cdot)\right\}_{s=1}^{\mu} \subset \subset \left\{\varphi_s(\cdot)\right\}_{s=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют соотношению $\overline{\varphi}_s\left(\overline{\psi}_k\right) = \delta_{sk}$, $s, k = 1, 2, \ldots \ldots, \mu$.

Введем в рассмотрение операторы

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}(\cdot) = \overline{\Psi}\Gamma(\cdot), \quad (\cdot) \in \mathbf{B}_1,$$
$$\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}(\cdot) = X\overline{\Phi}(\cdot), \quad (\cdot) \in \mathbf{B}_2. \tag{9}$$

Оператор $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ является расширением на пространство $\mathbf{B}_1$ оператора, который осуществляет изоморфизм $N(L)$ на Y_1, а $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$ — оператор, являющийся расширением оператора, обратного изоморфному, на все пространство $\mathbf{B}_2$.

Использовав обозначения (8), проектирующий оператор $\mathcal{P}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \to Y_1 \subset Y$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{Y_1}(\cdot) = \overline{\Psi}\ \overline{\Phi}(\cdot). \tag{10}$$

Этот проектор разбивает подпространство Y в прямую топологическую сумму подпространств

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \tag{11}$$

где $Y_2 = \mathcal{P}_{Y_2}\mathbf{B}_2 = (\mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_{Y_1})\mathbf{B}_2$ и является ограниченным.

Для класса нормально разрешимых операторов, являющихся n-нормальными, докажем утверждение, аналогичное лемме Шмидта.

Лемма 2. *Пусть* $L\colon \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ — *линейный ограниченный* n-*нормальный оператор. Оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ *имеет ограниченный левый обратный*

$$\overline{L}_l^{-1} = \left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\right)_l^{-1}.$$

Общий вид обратных слева операторов $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ *дается формулой*

$$\overline{L}_l^{-1} = \overline{L}_{l_0}^{-1}\left(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}\right).$$

Доказательство. Пусть L — n-нормальный оператор. Для обратимости слева оператора $\overline{L}$ необходимо и достаточно, чтобы [11]:

1) $N(\overline{L}) = \{0\}$;

2) линейное многообразие $R(\overline{L})$ являлось подпространством, имеющим прямое дополнение в $\mathbf{B_2}$.

1. Предположим, что существует $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbf{B_1}$, такое, что

$$(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})\, x_0 = Lx_0 + \overline{\Psi}\,\Gamma(x_0) = 0.$$

Очевидно, что $Lx_0 \in R(L)$, а из определения оператора $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ следует, что $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 \in Y_1 \subset Y$. Но подпространства $R(L)$ и Y взаимно дополняют одно другое до всего пространства $\mathbf{B_2}$, значит, $R(L)\bigcap Y = \{0\}$, т. е. они имеют только один общий элемент – нулевой. Следовательно, $Lx_0 = 0$ и $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 = 0$. Из этого следует, что $x_0 \in N(L)$ и $x_0 \in N(\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) \subset X$. Но подпространства $N(L)$ и X также взаимно дополняют одно другое до пространства $\mathbf{B_1}$, следовательно, $N(L)\bigcap X = \{0\}$. Отсюда следует, что $x_0 = 0$. Таким образом, $N(L) = \{0\}$.

2. Дополняемость образа $R(\overline{L})$ в пространстве $\mathbf{B_2}$ следует из (11) и дополняемости подпространства $R(L)$(2):

$$\mathbf{B_2} = R(L) \oplus Y_1 \oplus Y_2 = R(\overline{L}) \oplus Y_2.$$

Следовательно, оператор $\overline{L}$ имеет левый обратный оператор. Оператор $\overline{L}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие банахова пространства $\mathbf{B_1}$ на подпространство $\mathbf{B_2} \ominus Y_2$, значит, по теореме Банаха [12] оператор $\overline{L}_l^{-1}$ ограничен. Известно [11], что левые обратные операторы в общем виде записываются так: $\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}\mathcal{P}_{R(\overline{L})}$, где $\mathcal{P}_{R(\overline{L})}$ — некоторый проектор на образ $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$. Как следует из (11), такое свойство имеет, например, оператор $I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}$, т. е. $R(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}) = R\left(\overline{L}\right)$. Итак, общее представление левых обратных операторов можно записать в виде

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}).$$

Лемма 2 доказана.

***Замечание* 1.** Если $\dim\ker L < \dim\ker L^* < \infty$, т. е. оператор L нетеров отрицательного индекса, то лемма 2 переходит в лемму 2.4 [4, с. 47].

***Замечание* 2.** Если $\dim\ker L = \dim\ker L^* = n < \infty$, т. е. оператор L фредгольмов ненулевого индекса, то лемма 2 переходит в лемму Шмидта [3, с. 340].

Установим некоторые свойства и соотношения левого обратного оператора $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ проекторов (5), (7) и операторов (9).

Лемма 3. *Оператор* $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} &a_1)\quad \mathcal{P}_{N(L)}\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}, &\qquad a_2)\quad L\overline{L}_{l_0}^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_Y,\\ &a_3)\quad \overline{L}_{l_0}^{-1}\mathcal{P}_Y = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}, &\qquad a_4)\quad \overline{L}_{l_0}^{-1}L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $I_{\mathbf{B}_1}$, $I_{\mathbf{B}_2}$ — *тождественные операторы в пространствах* $\mathbf{B}_1$ *и* $\mathbf{B}_2$ *соответственно.*

Доказательство. Из определения левого обратного оператора $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ следует, что если он существует, то [11]

$$\overline{L}\,\overline{L}_{l_0}^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2},$$

$$\overline{L}_{l_0}^{-1}\overline{L} = I_{\mathbf{B}_1}.$$

Так как

$$\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}L = 0, \qquad \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N(L)},$$

действуя справа оператором $\overline{L}$ на обе части равенства a$_1$) из (12), получаем тождество

$$\mathcal{P}_{N(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}I_{\mathbf{B_1}} = \mathcal{P}_{N(L)}\overline{L}_{l_0}^{-1}\overline{L} \equiv$$

$$\equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}L + \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N(L)},$$

доказывающее это соотношение.

Поскольку $\mathcal{P}_Y\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ и $\mathcal{P}_Y(Lx) = 0$, так как $Lx \in R(L)$, действуя на обе части равенства a$_2$) из (12) оператором $L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ справа, устанавливаем тождество, доказывающее это соотношение:

$$L = L\,I_{\mathbf{B}_1} = L\overline{L}_{l_0}^{-1}\overline{L} \equiv (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_Y)(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) =$$

$$= L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} - \mathcal{P}_Y L - \mathcal{P}_Y\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} - \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = L.$$

Далее, так как $\mathcal{P}_Y^2 = \mathcal{P}_Y$ и $L\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0$, действуя слева оператором L на обе части равенства a$_3$) из (12) и используя равенство a$_2$), получаем тождество

$$0 = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_Y)\,\mathcal{P}_Y = L\overline{L}_{l_0}^{-1}\mathcal{P}_Y \equiv L\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0,$$

которое доказывает равенство a$_3$) из (12).

Действуя оператором $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ справа на обе части равенства a$_4$) и используя равенства a$_1$) – a$_3$) из (12), находим тождество, доказывающее это соотношение:

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = \overline{L}_{l_0}^{-1}I_{\mathbf{B_2}} - \overline{L}_{l_0}^{-1}\mathcal{P}_Y = \overline{L}_{l_0}^{-1}L\overline{L}_{l_0}^{-1} \equiv$$

$$\equiv (I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)})\,\overline{L}_{l_0}^{-1} = I_{\mathbf{B}_1}\overline{L}_{l_0}^{-1} - \mathcal{P}_{N(L)}\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_{l_0}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}.$$

Лемма 3 доказана.

Пусть теперь $L\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный d-нормальный оператор. В этом случае подпространство $N(L)$ бесконечномерно ($\mu = \infty$), а подпространство $N(L^*)$ конечномерно ($\nu < \infty$). Пусть пространство $\mathbf{B}_1$ имеет базис.

Следовательно, и $N(L)$ также имеет базис. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset N(L)$ — полная система базисных элементов. Подпространство $N(L^*)$ имеет конечномерный базис $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu} \subset N(L^*)$. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и функционалов $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}$ существуют сопряженно биортогональные [9] система функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N^*(L) \subset \mathbf{B}_1^*$ и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\nu} \subset \mathbf{B}_2$. Каждый из функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}$, определенных на подпространствах $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ и $Y \subset \mathbf{B}_2$ (по теореме Хана – Банаха), может быть продолжен, с сохранением норм, на пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно.

Аналогично (3) обозначим через

$$X = (f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots),$$

$$\Gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_s(\cdot), \ldots)^T,$$

$$\Phi(\cdot) = \big(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_\nu(\cdot)\big)^T$$

и

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$$

соответственно $(\infty \times \infty)$-, $(\infty \times \infty)$-, $(\nu \times \infty)$- и $(\infty \times \nu)$-мерные матрицы, причем $\Gamma(X) = E_\infty$, $\Phi(\Psi) = E_\nu$, E_∞, E_ν — единичные матрицы.

Для построения оператора проектирования $\mathcal{P}_{N(L)} \colon \mathbf{B}_1 \to N(L)$ определим последовательность проекторов

$$\mathcal{P}_{N^{(i)}(L)}(\cdot) = X_i \Gamma_i(\cdot), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

пространства $\mathbf{B}_1$ на подпространства $N_i(L)$ нуль-пространства $N(L)$.

Лемма 4. *Последовательность* (13) *проекторов* $\mathcal{P}_{N^{(i)}(L)}$ *сильно* (*поточечно*) *сходится к проектору*

$$\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot) = X\Gamma(\cdot) = \lim_{i\to\infty} X_i \Gamma_i(\cdot), \qquad \mathcal{P}_{N(L)} \colon\ B_1 \to N(L). \tag{14}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Оператор проектирования $\mathcal{P}_Y \colon \mathbf{B}_2 \to Y$ пространства $\mathbf{B}_2$ на подпространство Y определим по формуле

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi\Phi(\cdot). \tag{15}$$

Рассмотрим матрицы

$$\begin{gathered} \overline{X} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_\nu), \\ \overline{\Gamma}(\cdot) = (\overline{\gamma}_1(\cdot), \overline{\gamma}_2(\cdot), \ldots, \overline{\gamma}_\nu(\cdot))^T. \end{gathered} \tag{16}$$

Матрица $\overline{X}$ размерности $\infty \times \nu$ составлена из ν произвольных столбцов матрицы X, а матрица $\overline{\Gamma}(\cdot)$ размерности $\nu \times \infty$ — из функционалов матрицы $\Gamma(\cdot)$, которые удовлетворяют соотношению $\overline{\Gamma}(\overline{X}) = E_\nu$, где E_ν — единичная матрица.

Введем в рассмотрение операторы

$$\overline{\mathcal{P}}_Y(\cdot) = \Psi\,\overline{\Gamma}(\cdot), \quad (\cdot) \in \mathbf{B}_1,$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}(\cdot) = \overline{X}\,\Phi(\cdot), \quad (\cdot) \in \mathbf{B}_2.$$

Оператор $\overline{\mathcal{P}}_Y : \mathbf{B}_1 \to Y$ является расширением на все пространство $\mathbf{B}_1$ оператора, осуществляющего изоморфизм $N(L) \to Y$, а оператор $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \to N_1(L)$ — расширением ему обратного на пространство $\mathbf{B}_2$.

Использовав обозначения (16), проектирующий оператор $\mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \to N_1(L) \subset \subset N(L)$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{N_1(L)}(\cdot) = \overline{X}\;\overline{\Gamma}(\cdot).$$

Этот оператор ограничен и разбивает подпространство $N(L)$ в прямую топологическую сумму подпространств

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L), \qquad N_2(L) = \mathcal{P}_{N_2(L)}\mathbf{B}_1, \tag{17}$$

где $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}$ — ограниченный проектор.

Для класса нормально разрешимых операторов, являющихся d-нормальными, докажем утверждение, аналогичное лемме Шмидта.

Лемма 5. *Пусть $L\colon \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ — линейный ограниченный d-нормальный оператор. Оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_Y$ имеет ограниченный правый обратный*

$$\overline{L}_r^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_Y)_r^{-1}.$$

Общий вид обратных справа операторов $\overline{L}_{r_0}^{-1}$ дается формулой

$$\overline{L}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 и поэтому здесь не приводится.

***Замечание* 3.** Если $\dim\ker L^* < \dim\ker L < \infty$, т. е. оператор L нетеров положительного индекса, то лемма 5 переходит в лемму 2.4 [4, с. 47].

Для правого обратного оператора $\overline{L}_{r_0}^{-1}$ справедлива лемма, аналогичная лемме 3, которую приведем без доказательства.

Лемма 6. *Оператор $\overline{L}_{r_0}^{-1}$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} &\text{a}_1)\ \ \mathcal{P}_{N(L)}\overline{L}_{r_0}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \qquad &&\text{a}_2)\ \ L\overline{L}_{r_0}^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_Y, \\ &\text{a}_3)\ \ \overline{L}_{r_0}^{-1}\mathcal{P}_Y = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \qquad &&\text{a}_4)\ \ \overline{L}_{r_0}^{-1}L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $I_{\mathbf{B}_1}$, $I_{\mathbf{B}_2}$ — тождественные операторы в пространствах соответственно $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$.

Доказанные леммы позволяют предложить конструкции обобщенных обратных операторов к n- и d- нормальным.

Теперь сформулируем основной результат этой статьи.

Теорема 1. *Пусть L — линейный ограниченный n-нормальный оператор, образ $R(L)$ которого дополняем в банаховом пространстве $\mathbf{B_2}$. Тогда оператор*

$$L^- = \overline{L}_{l_0}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} \tag{19}$$

является ограниченным обобщенно-обратным к оператору L.

Для ***доказательства теоремы*** необходимо и достаточно проверить, что L^- удовлетворяет свойствам, определяющим обобщенный обратный оператор [13]

$$L^- = L^- L L^-, \qquad L = L L^- L. \tag{20}$$

Для этого предварительно покажем, что

$$L L^- = I_{\mathbf{B_2}} - \mathcal{P}_Y, \qquad L^- L = I_{\mathbf{B_1}} - \mathcal{P}_{N(L)}. \tag{21}$$

Используя равенство а$_2$) из (12) и представление (19), имеем

$$L L^- = L(\overline{L}_{l_0}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}) = L\,\overline{L}_{l_0}^{-1} - L\,\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = I_{\mathbf{B_2}} - \mathcal{P}_Y.$$

Используя соотношение

$$\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}(Lz) = 0$$

и равенство а$_4$) из (12), получаем

$$L^- L = (\overline{L}_{l_0}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)})\,L = \overline{L}_{l_0}^{-1}\,L - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}\,L = I_{\mathbf{B_1}} - \mathcal{P}_{N(L)}.$$

С учетом (11) проверим выполнение свойств (20). Имеем

$$L L^- L = L(I_{\mathbf{B_1}} - \mathcal{P}_{N(L)}) = L - L\mathcal{P}_{N(L)} = L,$$

$$L^- L L^- = (I_{\mathbf{B_1}} - \mathcal{P}_{N(L)})\,L^- = L^- - \mathcal{P}_{N(L)} L^- = L^-,$$

так как $\mathcal{P}_{N(L)} L^- = \mathcal{P}_{N(L)} \overline{L}_{l_0}^{-1} - \mathcal{P}_{N(L)}\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0$. Ограниченность оператора L^- следует из ограниченности операторов $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ и $\mathcal{P}_{N(L)}$.

Теорема доказана.

***Замечание* 4.** Если обобщенно-обратимый оператор L имеет конечномерные ядро и коядро, т. е. является нетеровым, то конструкция (19) переходит в конструкцию 2.14 из [4, с. 53].

Использовав лемму 5, сформулируем теорему, дающую конструкцию обобщенно-обратного оператора к d-нормальному.

Теорема 2. *Пусть L — линейный ограниченный d-нормальный оператор, ядро $N(L)$ которого дополняемо в банаховом пространстве $\mathbf{B_1}$. Тогда оператор*

$$L^- = \overline{L}_{r_0}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \tag{22}$$

является ограниченным обобщенно-обратным к оператору L.

Доказательство осуществляется проверкой свойств (20), определяющих обобщенно-обратный оператор и аналогично доказательству теоремы 1.

Теоремы 1, 2 позволяют с помощью конструкций (19) и (22) решить вопрос о записи в явном виде общего решения операторного уравнения (1) с линейным ограниченным n- или d-нормальным оператором L. Общее решение уравнения (1) представляет собой прямую сумму общего решения $\tilde{x}$, соответствующего (1), однородного уравнения $Lx = 0$ и частного решения $\bar{x} = L^- y$ неоднородного уравнения (1). Из определения проектора на нуль-пространство $N(L)$ оператора L следует, что общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$\tilde{x} = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x},$$

где $\tilde{x} \in N(L) \subset \mathbf{B}_1$, а $\hat{x}$ – произвольный элемент пространства $\mathbf{B}_1$.

Поскольку линейное операторное уравнение (1) является нормально разрешимым, то для его разрешимости [12] необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}y = 0, \tag{23}$$

где $\mathcal{P}_{N(L^*)}$ — проектор на нуль-пространство оператора L^*. Выполнение условия (23) гарантирует принадлежность y образу $R(L)$ оператора L. Поскольку $R(L) = N(\mathcal{P}_Y)$, (23) эквивалентно условию

$$\mathcal{P}_Y y = 0.$$

Эти рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть L — линейный ограниченный n-нормальный оператор, образ $R(L)$ которого дополняем в банаховом пространстве $\mathbf{B_2}$. Операторное уравнение* (1) *с линейным ограниченным n-нормальным оператором разрешимо для тех и только тех $y \in \mathbf{B}_2$, для которых выполнено условие*

$$\mathcal{P}_Y y = 0, \tag{24}$$

и при этом имеет μ-параметрическое семейство решений, представимое в виде прямой суммы

$$x = \tilde{x} + \bar{x} = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + L^-\, y, \tag{25}$$

первое слагаемое которой — общее решение соответствующего однородного уравнения, а второе — частное решение операторного уравнения (1).

Доказательство. Подставив решение (25) в исходное уравнение (1), с учетом первого соотношения (21) и (24) получим

$$Lx = L\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + LL^- y = LL^- y = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_Y)\, y =$$

$$= I_{\mathbf{B}_2} y - \mathcal{P}_Y y = I_{\mathbf{B}_2} y = y.$$

Решение уравнения (1) с учетом определения (5) оператора $\mathcal{P}_{N(L)}$ можно записать следующим образом:

$$x = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + L^-\, y = X\Gamma(\hat{x}) + L^-\, y = Xc + L^-\, y,$$

где $c = \Gamma(\hat{x})$ — произвольный постоянный вектор пространства R^{μ}.

Поскольку проектор $\mathcal{P}_Y$ бесконечномерный, линейное уравнение с n-нормальным оператором разрешимо тогда и только тогда, когда $y \in \mathbf{B}_2$ удовлетворяет бесконечному числу линейно независимых условий.

Для линейных уравнений с d-нормальным оператором справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть L — линейный ограниченный d-нормальный оператор, ядро $N(L)$ которого дополняемо в банаховом пространстве $\mathbf{B_1}$. Операторное уравнение* (1) *с линейным ограниченным d-нормальным оператором разрешимо для тех и только тех $y \in \mathbf{B}_2$, для которых выполнено условие* (24), *и при этом имеет бесконечномерное семейство решений, представимое в виде прямой суммы*

$$x = \tilde{x} + \bar{x} = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + L^-\, y, \tag{26}$$

первое слагаемое которой — общее решение соответствующего однородного уравнения, а второе — частное решение операторного уравнения (1).

Решение уравнения (1) с учетом определения оператора $\mathcal{P}_{N(L)}$ запишем следующим образом:

$$x = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + L^{-}\,y = X\Gamma(\hat{x}) + L^{-}\,y = Xc + L^{-}\,y,$$

где $c = \Gamma(\hat{x})$ — произвольный постоянный вектор некоторого банахова пространства числовых последовательностей $c = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ таких, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i c_i$ сходится.

Поскольку проектор $\mathcal{P}_Y$ конечномерный, линейное уравнение с d-нормальным оператором разрешимо тогда и только тогда, когда $y \in \mathbf{B}_2$ удовлетворяет конечному числу линейно независимых условий.

Пример. Найдем условия разрешимости и общий вид решения уравнения

$$Ax = y,$$

где $(\infty \times n)$-мерная матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что элементы a_{ij} матрицы A удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} < \infty,$$

поэтому A является линейным ограниченным оператором, отображающим R_3 в ℓ_2 [14].

Оператор A — простейший случай n-нормального оператора, действующего из пространства $\mathbf{R}_3$ в пространство ℓ_2, так как $N(L)$ имеет два линейно независимых базисных вектора

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а $N(L^*)$ — бесконечное число линейно независимых базисных векторов

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \varphi_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots .$$

Построим оператор, обобщенно-обратный к оператору A.

Матрицы X и Γ, составленные из базисных векторов f_i и γ_j, будут иметь вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \Gamma(X) = E_3.$$

Тогда оператор проектирования $\mathcal{P}_{N(A)} \colon \mathbf{R}_3 \to N(A)$ построим по формуле

$$\mathcal{P}_{N(A)} = X\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}_{N(A)} \colon \ \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3. \tag{27}$$

Матрицы Φ и Ψ, составленные из базисных векторов φ_s и ψ_k, будут иметь вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}^T,$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \qquad \Phi(\Psi) = E_\infty.$$

Оператор проектирования $\mathcal{P}_Y : \ell_2 \to Y$ построим по формуле (7):

$$\mathcal{P}_Y = \Psi\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}_Y : \ell_2 \to Y.$$

Поскольку размерность нуль-пространства $N(A)$ оператора A равна двум, матрицы (8) определим следующим образом:

$$\overline{\Psi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}^T,$$

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда операторы (9) примут вид

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\Psi}\,\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{N(A)} = X\,\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Построим оператор $\overline{A}$:

$$\overline{A} = A + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Левый обратный оператор $\overline{A}_l^{-1}$ к оператору $\overline{A}$ будет иметь вид

$$\overline{A}_l^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & 16 & 0 & -32 & 0 & 64 & \dots \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти общий вид левых обратных операторов $\overline{A}_{l_0}^{-1}$, построим проектор $I - \mathcal{P}_{Y_2}$. По формуле (10) имеем

$$\mathcal{P}_{Y_1} = \overline{\Psi}\,\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда, поскольку $\mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_{Y_1}$,

$$I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_Y + \mathcal{P}_{Y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Общий вид левого обратного оператора относительно проектора $\mathcal{P}_{Y_2}$ в выбранном базисе будет

$$\overline{A}_{l_0}^{-1} = \overline{A}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}.$$

По формуле (20) обобщенно-обратный оператор A^- будет иметь вид

$$A^{-} = \overline{A}_{l_0}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(A)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 4 уравнение (27) разрешимо для тех и только тех $y \in \ell_2$, которые удовлетворяют условию

$$\mathcal{P}_Y\, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ \ldots \end{pmatrix} = 0.$$

Этому условию удовлетворяет, например, вектор вида

$$y = \operatorname{col}\left(2y_3,\ 0,\ y_3,\ 0,\ \frac{1}{2}y_3,\ 0,\ \frac{1}{4}y_3,\ 0,\ \ldots\right).$$

При выполнении этого условия уравнение имеет двупараметрическое семейство решений

$$x = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + L^{-}y = X\Gamma(\hat{x}) + L^{-}y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_3 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \\ \frac{1}{2}y_3 \\ 0 \\ \frac{1}{4}y_3 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4y_3 \end{pmatrix}.$$

1. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – 495 с.
2. *Бойчук А. А., Панасенко Є. В.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 16 – 19.
3. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.
5. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teil 3. Uber die Auflosungen der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Losungen // Math. Ann. – 1908. – № 65.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 271 с.
9. *Гринблюм М. М.* Биортогональные системы в пространстве Банаха // Докл. АН СССР. – 1945. – **47**, № 2. – С. 79 – 82.
10. *Кадец М. И., Митягин Б. С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, вып. 6. – С. 77 – 94.
11. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
12. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
13. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
14. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 415 с.

Получено 06.04.09,
после доработки — 27.11.09