УДК 517.53.57

М. А. Сухорольський (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА СИСТЕМОЮ ПОЛІНОМІВ, БІОРТОГОНАЛЬНИХ НА ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРІ З СИСТЕМОЮ РЕГУЛЯРНИХ У НЕСКІНЧЕННО ВІДДАЛЕНІЙ ТОЧЦІ ФУНКЦІЙ

We investigate properties of systems of polynomials constructed according to schemes similar to the Bernoulli and Euler polynomials. We formulate conditions for the existence of functions associated with polynomials and conditions under which the polynomials are representable by contour integrals, and present classes of analytic functions, that are expanded in series in the systems of polynomials. The expansion of functions is illustrated by examples.

Исследуются свойства систем полиномов, построенных по аналогичным с полиномами Бернулли и Эйлера схемам. Сформулированы условия существования ассоциированных с полиномами функций, условия представления полиномов контурными интегралами и приведены классы аналитических функций, разлагаемых в ряды по системам полиномов. Разложения функций проиллюстрированы примерами.

Вступ. Методи розвинення аналітичних функцій у ряди за системами поліномів у комплексній області з використанням системи асоційованих функцій викладено в роботі [1]. Встановлено умови, за яких для заданої системи функцій існує відповідна система асоційованих функцій (лінійних функціоналів), біортогональних на замкненому контурі, та умови розвинення аналітичних функцій за цими системами. Властивості систем поліномів (гармонічних, інтерполяційних, Фабера, частинних сум степеневих рядів та інших), а також розвинення аналітичних функцій за цими системами розглянуто також в роботах [2 – 4]. У даній роботі досліджено властивості систем поліномів, побудованих за аналогічною з поліномами Бернуллі та Ейлера схемою

$$\left\{ P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_{n-k} z^k \right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{1}$$

де z — комплексна змінна, C_n^k — біноміальні коефіцієнти, a_k, b_k — послідовності дійсних чисел. Якщо $a_k = 1$ і $b_k = B_k$ — числа Бернуллі, то $P_n(z) = B_n(z)$ — поліноми Бернуллі; якщо ж $a_k = 1$, $b_k = E_k$ — числа Ейлера, то $P_n(z) = E_n(z)$ — поліноми Ейлера.

Знайдено оцінки для поліномів і асоційованих з ними функцій, на основі яких встановлено достатні умови розвинення аналітичних функцій за системами поліномів.

1. Властивості поліномів. Дослідимо властивості системи поліномів (1), коефіцієнти яких задовольняють умови

$$b_0 \neq 0, \quad a_k \neq 0, \quad k = 0, 1, \ldots; \tag{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k!}} = A, \quad 0 \le A < \infty, \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{|b_k|}{k!}} = B, \quad 0 \le B < \infty, \tag{3}$$

і якщо $A = 0$ або $B = 0$, то відповідно

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a, \quad 0 < a < \infty, \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|b_k|} = b, \quad 0 \le b < \infty. \tag{4}$$

У роботі [5] розглянуто систему поліномів (1) за умови $b_k = b^k$.

Властивість 1. *Твірна функція* $F(z, t) = \sum_n^\infty \frac{t^n}{n!} P_n(z)$ *системи* (1) *має вигляд*

$$F(z, t) = F_1(zt) F_2(z),$$

де

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \qquad F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \tag{5}$$

— *функції, аналітичні відповідно в областях* $|z| < \frac{1}{A}$, $|z| < \frac{1}{B}$.

Доведення. Аналітичність функцій $F_1(z)$, $F_2(z)$ випливає з умов (2), (3). Змінивши порядок підсумовування рядів у виразі добутку функцій (5), одержимо твірну

$$F_1(zt) F_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (zt)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} t^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_k b_{n-k}}{k!(n-k)!} t^n z^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n! a_k b_{n-k}}{k!(n-k)!} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P_n(z).$$

Властивість 2. *Нехай виконуються умови* (2), (4). *Тоді мають місце інтегральні зображення*

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (b_0 + zt)^n \gamma_1(t)\, dt, \tag{6}$$

якщо $b_k = b_0^k$, *і*

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (a_0 z + t)^n \gamma_2(t)\, dt, \tag{7}$$

якщо $a_k = a_0^k$, *де* $\gamma_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{k+1}}$, $\gamma_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{t^{k+1}}$ — *аналітичні функції відповідно в областях* $|t| > a$, $|t| > b$; Γ_1, Γ_2 — *кола* $|t| = R_1$, $a < R_1 < \infty$, $|t| = R_2$, $b < R_2 < \infty$.

Доведення. Аналітичність функцій $\gamma_1(t)$ і $\gamma_2(t)$ випливає з умов (4). У справедливості формул (6) і (7) переконуємося безпосередньою перевіркою. Після підстановки виразів цих функцій у праві частини формул (6), (7) і обчислення інтегралів одержимо поліноми у формі (1).

Властивість 3. *Справджуються наступні оцінки*:

$$|P_n(z)| \le m_0 (a_\varepsilon |z| + b_\varepsilon)^n, \tag{8}$$

якщо виконуються умови (2), (4);

$$|P_n(z)| \le M_0 n! \sum_{k=0}^{n} A_\varepsilon^k B_\varepsilon^{n-k} |z|^k = M_0 n! \frac{(A_\varepsilon |z|)^{n+1} - B_\varepsilon^{n+1}}{A_\varepsilon |z| - B_\varepsilon}, \tag{9}$$

якщо виконуються умови (2), (3) *і* $A \ne 0$, $B \ne 0$;

$$|P_n(z)| \le m_0 n!\,B_\varepsilon^n \exp\left(\frac{a_\varepsilon|z|}{B_\varepsilon}\right), \tag{10}$$

якщо виконуються умови (2) *і* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = a$, $0 < a < \infty$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{|b_k|}{k!}} = B$, $0 < B < \infty$;

$$|P_n(z)| \le m_0 n!\left(A_\varepsilon|z|\right)^n \exp\left(\frac{b_\varepsilon}{A_\varepsilon|z|}\right), \tag{11}$$

якщо виконуються умови (2) *і* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k!}} = A$, $0 < A < \infty$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|b_k|} = b$, $0 \le b < \infty$, *де* $a_\varepsilon = a + \varepsilon$, $b_\varepsilon = b + \varepsilon$, $A_\varepsilon = A + \varepsilon$, $B_\varepsilon = B + \varepsilon$, M_0, m_0 — *сталі величини*, ε — *як завгодно мале додатне число*.

Доведення. Згідно з умовами (4) маємо нерівності $|a_k| \le m_1 a_\varepsilon^k$, $|b_k| \le m_2 b_\varepsilon^k$, $m_i = \text{const}$. Оцінивши поліноми (1) з урахуванням цих нерівностей, одержимо

$$|P_n(z)| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k |a_k|\,|b_{n-k}|\,|z|^k \le m_1 m_2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_\varepsilon^k b_\varepsilon^{n-k} |z|^k =$$

$$= m_1 m_2 \left(a_\varepsilon|z| + b_\varepsilon\right)^n.$$

Звідси випливає нерівність (8).

Нерівність (9) одержимо, оцінивши вираз поліномів (1) з урахуванням співвідношень (3), записаних у вигляді $\frac{|a_k|}{k!} \le M_1 A_\varepsilon^k$, $\frac{|b_k|}{k!} \le M_2 B_\varepsilon^k$, $M_i = \text{const}$. Отже,

$$|P_n(z)| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k |a_k|\,|b_{n-k}|\,|z|^k \le M_1 M_2 n! \sum_{k=0}^{n} A_\varepsilon^k B_\varepsilon^{n-k} |z|^k =$$

$$= M_1 M_2 n! \frac{\left(A_\varepsilon|z|\right)^{n+1} - B_\varepsilon^{n+1}}{A_\varepsilon|z| - B_\varepsilon}.$$

Нерівність (10) одержимо, оцінивши вираз поліномів (1) з урахуванням нерівностей $|a_k| \le m_1 a_\varepsilon^k$, $\frac{|b_k|}{k!} \le M_2 B_\varepsilon^k$.

Дійсно,

$$|P_n(z)| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,|a_k|\,|b_{n-k}|}{k!\,(n-k)!}|z|^k \le m_1 M_2 n! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_\varepsilon^k B_\varepsilon^{n-k}}{k!}|z|^k \le$$

$$\le m_1 M_2 n!\,B_\varepsilon^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{a_\varepsilon|z|}{B_\varepsilon}\right)^k = m_1 M_2 n!\,B_\varepsilon^n \exp\left\{\frac{a_\varepsilon|z|}{B_\varepsilon}\right\}.$$

Аналогічно одержимо нерівність (11). Оцінивши поліноми (1) з урахуванням нерівностей $\frac{|a_k|}{k!} \le M_1 A_\varepsilon^k$, $|b_k| \le m_2 b_\varepsilon^k$, матимемо

$$|P_n(z)| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k |a_k||b_{n-k}||z|^k = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k||b_{n-k}||z|^k}{k!(n-k)!} \le$$

$$\le M_1 m_2 n! \sum_{k=0}^{n} \frac{b_\varepsilon^k (A_\varepsilon |z|)^{n-k}}{k!} \le M_1 m_2 n! (A_\varepsilon |z|)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{b_\varepsilon}{A_\varepsilon |z|}\right)^k =$$

$$= M_1 m_2 n! (A_\varepsilon |z|)^n \exp\left(\frac{b_\varepsilon}{A_\varepsilon |z|}\right).$$

Властивість 4. *Нехай виконуються умови* (2) *і* E_R *— простір функцій* $f(z)$, *однозначних і аналітичних у крузі* $|z| < R$, $0 < R \le \infty$. *Тоді система поліномів* (1) *є повною і незалежною у просторі* E_R.

Доведення. Система степенів незалежна і повна у просторі E_R. За виконання умов (2) коефіцієнти біля старших степенів поліномів не дорівнюють нулеві і функції z^k, $k = 0, 1, \dots$, однозначно виражаються через поліноми $P_n(z)$. Тому [1, с. 137] система (1) повна і незалежна у просторі E_R.

2. Асоційовані системи функцій. Запишемо залежності степенів z^k від поліномів системи (1) у вигляді

$$z^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{C_k^n g_{k-n}}{a_k} P_n(z), \tag{12}$$

де g_k, $k = 0, 1, \dots$, — коефіцієнти, що визначаються з системи рівнянь

$$\sum_{r=n}^{k} C_k^r C_r^n b_{k-r} g_{r-n} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \ne k. \end{cases} \tag{13}$$

Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \tag{14}$$

— степеневий ряд аналітичної функції $f(z) \in E_R$. Знайдемо формальне розвинення цієї функції за системою поліномів (1). Підставивши вирази степенів (12) у формулу (14) і змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n} P_k(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n} \right) P_k(z). \tag{15}$$

Ввівши позначення

$$L_k(f) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n}, \tag{16}$$

запишемо формулу (15) у вигляді

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f) P_k(z). \tag{17}$$

Якщо для будь-яких скінченних значень k існує границя

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{C_r^k \left| \frac{g_{r-k}}{a_r} \right|} = S, \quad 0 \le S < \infty, \tag{18}$$

то функції

$$\omega_k(z) = \sum_{r=k}^{\infty} \frac{C_r^k g_{r-k}}{a_r} \frac{1}{z^{r+1}} \tag{19}$$

аналітичні в області $|z| > S$ і справедливі еквівалентні рівнянням (13) співвідношення

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} P_n(z)\,\omega_k(z)\,dz = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \ne k, \end{cases} \tag{20}$$

де Γ — додатно орієнтоване коло $|z| = R_1$, $S < R_1 < R$, що охоплює особливі точки функцій $\omega_k(z)$.

Зазначимо [1], що якщо виконуються умови (20), то система поліномів (1) і система асоційованих (приєднаних) функцій $\{\omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ називаються біортогональними на замкненому контурі.

Таким чином, кожній функції $f(z) \in E_R$, $S < R \le \infty$, можна поставити у відповідність ряд (17), коефіцієнти якого визначаються за формулою (16) або за формулою

$$L_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\,\omega_k(z)\,dz. \tag{21}$$

Наступна теорема встановлює ще один спосіб визначення коефіцієнтів асоційованих функцій.

Теорема 1. *Нехай послідовність чисел* b_k, $k = 0, 1, \ldots$, *задовольняє умови* (2), (3). *Тоді функція* $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{k!}$, *коефіцієнти степеневого ряду якої задовольняють рівняння системи* (13), *є оберненою до функції* $F_2(z)$ *і аналітичною в деякому околі початку координат*,

$$G(z) = \frac{1}{F_2(z)}. \tag{22}$$

Доведення. Перемноживши степеневі ряди функцій $F_2(z)$ і $G(z)$, знайдемо

$$F_2(z)\,G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n g_k z^{k+n}}{k!\,n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{b_{m-k} g_k z^m}{k!\,(m-k)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=0}^{m} \frac{b_{m-k} g_k}{k!\,(m-k)!}.$$

За виконання рівності (22) і незалежності функцій z^m справджуються співвідношення

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{b_{m-r} g_r}{r!\,(m-r)!} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \ne 0. \end{cases}$$

Перетворивши ліві частини цих співвідношень з урахуванням заміни $m = n - k$,

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{b_{m-r} g_r}{r!(m-r)!} = \sum_{r=0}^{n-k} \frac{b_{n-k-r} g_r}{r!(n-k-r)!} =$$

$$= \frac{k!}{n!} \sum_{r=0}^{n-k} C_n^{k+r} C_{k+r}^{k} b_{n-k-r} g_r = \frac{k!}{n!} \sum_{r=k}^{n} C_n^r C_r^k b_{n-r} g_{r-k},$$

одержимо рівняння (13). Аналітичність функції $G(z)$ в деякому околі нульової точки випливає з аналітичності функції $F_2(z)$ і умови $F_2(0) = b_0 \neq 0$.

Розглянемо властивості асоційованих функцій (19).

Властивість 5. *Нехай виконуються умови* (2) *і функції* $G(z)$ *та* $F_1(z)$ *такі, що*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|g_k|} = g, \quad 0 \le g < \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a, \quad 0 < a < \infty. \tag{23}$$

Тоді приєднані функції $\omega_k(z)$ *аналітичні в області* $|z| > s$, $s = \dfrac{g}{a}$, *і справджується оцінка*

$$|\omega_k(z)| \le \frac{m_0}{\left(a_{-\varepsilon}|z| - g_\varepsilon\right)^{k+1}}, \tag{24}$$

де $m_0 = \text{const}$, $a_{-\varepsilon} = a - \varepsilon$, $g_\varepsilon = g + \varepsilon$.

Доведення. За виконання умов (23) маємо $|a_k| \ge m_1 a_{-\varepsilon}^k$, $|g_k| \le m_3 g_\varepsilon^k$, $m_i = \text{const}$. Оцінивши функції (19) з урахуванням цих нерівностей, одержимо нерівність

$$|\omega_k(z)| = \left| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_{r+k}^k g_r}{a_{r+k}} \frac{1}{z^{r+k+1}} \right| \le \frac{m_g}{m_1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_{r+k}^k g_\varepsilon^r}{a_{-\varepsilon}^{r+k}} \frac{1}{|z|^{r+k+1}} =$$

$$= \frac{a_{-\varepsilon} m_g}{m_1} \frac{1}{(a_{-\varepsilon}|z| - g_\varepsilon)^{k+1}},$$

яка виконується за умови $\dfrac{g_\varepsilon}{a_{-\varepsilon}|z|} < 1$ і, відповідно, $|z| > \dfrac{g_\varepsilon}{a_{-\varepsilon}}$. З цієї нерівності випливають оцінка (24), а також, внаслідок довільної малості величини ε, аналітичність функцій $\omega_k(z)$ в області $|z| > s$.

Властивість 6. *Нехай виконуються умови* (2) *і функції* $G(z)$, $F_1(z)$ *такі, що*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{|g_k|}{k!}} = G, \quad 0 \le G < \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k!}} = A, \quad 0 < A < \infty. \tag{25}$$

Тоді приєднані функції $\omega_k(z)$ *аналітичні в області* $|z| > S$, $S = \dfrac{G}{A}$, *і справджується оцінка*

$$|\omega_k(z)| \leq \frac{M_0}{k!\left(A_{-\varepsilon}|z| - G_\varepsilon\right)} \frac{1}{|z|^k}, \tag{26}$$

де $M_0 = \text{const}$, $A_{-\varepsilon} = A - \varepsilon$, $G_\varepsilon = G + \varepsilon$.

Доведення. Оцінивши функції (19) з урахуванням нерівностей $\dfrac{|a_k|}{k!} \geq$ $\geq M_1 A_{-\varepsilon}^k$, $\dfrac{|g_k|}{k!} \leq M_3 G_\varepsilon^k$, $M_i = \text{const}$, які випливають з умов (25), одержимо

$$|\omega_k(z)| = \left| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_{r+k}^k g_r}{a_{r+k}} \frac{1}{z^{r+k+1}} \right| \leq \frac{M_3}{k!\, M_1 A_{-\varepsilon}^k |z|^{k+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{G_\varepsilon}{A_{-\varepsilon}|z|} \right)^r =$$

$$= \frac{M_3}{k!\, M_1 A_{-\varepsilon}^{k-1} |z|^k} \frac{1}{A_{-\varepsilon}|z| - G_\varepsilon}.$$

Звідси випливають оцінка (26) і, внаслідок довільної малості величини ε, аналітичність функцій $\omega_k(z)$ в області $|z| > S$.

Властивість 7. *Нехай виконуються умови* (2) *і функції* $G(z)$, $F_1(z)$ *такі, що*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|g_k|} = g, \quad 0 \leq g < \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k!}} = A, \quad 0 < A < \infty. \tag{27}$$

Тоді приєднані функції $\omega_k(z)$ *аналітичні в області* $|z| > 0$ *і справджується оцінка*

$$|\omega_k(z)| \leq \frac{m_0}{k!\, A_{-\varepsilon}^k z^{k+1}} \exp\left(\frac{g_\varepsilon}{A_{-\varepsilon}|z|} \right), \tag{28}$$

де $m_0 = \text{const}$, $a_{-\varepsilon} = a - \varepsilon$, $g_\varepsilon = g + \varepsilon$.

Доведення. За виконання умов (27) маємо $\dfrac{|a_k|}{k!} \geq M_1 A_{-\varepsilon}^k$, $|g_k| \leq m_3 g_\varepsilon^k$, M_1, $m_3 = \text{const}$. Оцінивши функції (19) з урахуванням цих нерівностей, одержимо

$$|\omega_k(z)| = \frac{1}{k!\, z^{k+1}} \left| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g_r}{r!} \frac{(r+k)!}{a_{r+k}} \frac{1}{z^r} \right| \leq$$

$$\leq \frac{m_g}{k!\, M_1 A_{-\varepsilon}^k z^{k+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{g_\varepsilon}{A_{-\varepsilon}|z|} \right)^r = \frac{m_3}{k!\, M_1 A_{-\varepsilon}^k z^{k+1}} \exp\left(\frac{g_\varepsilon}{A_{-\varepsilon}|z|} \right).$$

З цієї нерівності випливають оцінка (28) і аналітичність функції $\omega_k(z)$ в області $|z| > 0$.

3. Розвинення аналітичних функцій. Розглянемо достатні умови розвинення функцій $f(z) \in E_R$, $0 < R \leq \infty$, за системою поліномів (1).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (2), (3), $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\dfrac{|g_k|}{k!}} = G$, $0 < G < \infty$, *і* $f(z) \in E_R$, $S_2 < S < R \le \infty$, *де* $S = \dfrac{G}{A}$, $S_2 = \dfrac{B}{A}$.

Тоді у крузі $|z| < R$ *справджується формула*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f) P_k(z), \tag{29}$$

де $L_k(f)$ — *коефіцієнти, що визначаються за формулою* (16) *або* (21).

Доведення. Степеневий ряд (14) рівномірно збігається в області $|z| \le R_{-\varepsilon}$, $0 < R_{-\varepsilon} = R - \varepsilon$. Перетворимо його з урахуванням формули (12):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n} P_k(z). \tag{30}$$

За умов теореми справедливою є оцінка (26) і, відповідно, функції $\omega_n(z)$ аналітичні в області $|z| > S$. Отже, мають місце формули (16) і (21). Використавши нерівності $M_1 A_{-\varepsilon}^k \le \dfrac{|a_k|}{k!} \le M_1 A_{\varepsilon}^k$, $\dfrac{|g_k|}{k!} \le M_3 G_{\varepsilon}^k$, $\dfrac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} \le \dfrac{M_4}{R_{-\varepsilon}^k}$, $M_i =$ $=$ const, оцінимо суму ряду (30):

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n} P_k(z) \right| \le$$

$$\le \frac{M_3 M_4}{M_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(A_{-\varepsilon} R_{-\varepsilon})^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{G_{\varepsilon}^{n-k} |P_k(z)|}{k!} =$$

$$= \frac{M_3 M_4}{M_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|P_k(z)|}{k! G_{\varepsilon}^k} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{G_{\varepsilon}}{A_{-\varepsilon} R_{-\varepsilon}} \right)^n \le$$

$$\le \frac{M_3 M_4}{M_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|P_k(z)|}{k! G_{\varepsilon}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{G_{\varepsilon}}{A_{-\varepsilon} R_{-\varepsilon}} \right)^n =$$

$$= \frac{M_3 M_4}{M_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{G_{\varepsilon}}{A_{-\varepsilon} R_{-\varepsilon}} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|P_k(z)|}{k! G_{\varepsilon}^k} \le$$

$$\le M \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{G_{\varepsilon}}{A_{-\varepsilon} R_{-\varepsilon}} \right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B_{\varepsilon}}{G_{\varepsilon}} \right)^k \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{A_{\varepsilon} |z|}{B_{\varepsilon}} \right)^n =$$

$$= M \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{G_{\varepsilon}}{A_{-\varepsilon} R_{-\varepsilon}} \right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_{\varepsilon} |z|}{B_{\varepsilon}} \right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{B_{\varepsilon}}{G_{\varepsilon}} \right)^k \le$$

$$\le M \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{G_{\varepsilon}}{A_{-\varepsilon} R_{-\varepsilon}} \right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_{\varepsilon} |z|}{B_{\varepsilon}} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B_{\varepsilon}}{G_{\varepsilon}} \right)^k =$$

$$= M\left(1 - \frac{G_\varepsilon}{A_{-\varepsilon}R_{-\varepsilon}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{A_\varepsilon|z|}{B_\varepsilon}\right)^{-1}\left(1 - \frac{B_\varepsilon}{G_\varepsilon}\right)^{-1}, \quad M = \frac{M_3 M_4 M_0}{M_1}.$$

За виконання умов $\dfrac{G_\varepsilon}{A_{-\varepsilon}R_{-\varepsilon}} < 1$, $\dfrac{A_\varepsilon|z|}{B_\varepsilon} < 1$, $\dfrac{B_\varepsilon}{G_\varepsilon} < 1$ одержані ряди збігаються. Враховуючи тут довільну малість величини ε, можна стверджувати, що ряд (27) збігається рівномірно у крузі $|z| \le R_0 < R$ за умов $S_2 < S < R \le \infty$.

Наслідок. *За умов теореми* 2 *справедливим є розвинення*

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(t) P_k(z), \tag{31}$$

яке рівномірно збігається при $|z| \le r$ *і* $|t| \ge \rho$, *де* r *і* ρ *— будь-які числа, що задовольняють умови* $0 < r < R$, $\rho > \max(r, S)$.

Доведення. Рівномірна збіжність ряду (31) випливає з оцінок (9) і (26). Його суму знайдемо, використавши формули (12) і (19):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(t) P_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty} \frac{C_r^k g_{r-k}}{a_r} \frac{1}{t^{r+1}} P_k(z) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{t^{r+1}} \sum_{k=0}^{r} \frac{C_r^k g_{r-k}}{a_r} P_k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{t^{r+1}} = \frac{1}{t - z}.$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (2),

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k!}} = A, \quad 0 < A < \infty, \qquad \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|b_k|} = b, \quad 0 \le b < \infty,$$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\frac{|g_k|}{k!}} = G, \quad 0 \le G < \infty, \quad і \quad f(z) \in E_R, \quad S < R \le \infty, \quad S = \frac{G}{A}.$$

Тоді у крузі $|z| < R$ *має місце розвинення* (29), *коефіцієнти якого визначаються за формулою* (16) *або* (21).

Доведення. Справедливість формул (16) і (21) забезпечується (як і у попередній теоремі) виконанням нерівності (26). Оцінимо суму ряду (30) з урахуванням нерівності (11) і нерівностей $M_1 A_{-\varepsilon}^k \le |A_k| \le M_1 A_\varepsilon^k$, $\dfrac{|g_k|}{k!} \le M_3 G_\varepsilon^k$, $\dfrac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \le \dfrac{M_4}{R_{-\varepsilon}^k}$, m_i, $M_j = \mathrm{const}$, які випливають з умов теореми. Таким чином, маємо оцінку

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n} P_k(z)\right| \le \frac{M_3 M_4}{M_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R_\varepsilon^n A_{-\varepsilon}^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{G_\varepsilon^{n-k}}{k!} |P_k(z)| \le$$

$$\le m \exp\left(\frac{b_\varepsilon}{A_\varepsilon|z|}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(R_{-\varepsilon}A_{-\varepsilon})^n} \sum_{k=0}^{n} G_\varepsilon^{n-k} \left(A_\varepsilon|z|\right)^k =$$

$$= m\exp\left(\frac{b_\varepsilon}{A_\varepsilon|z|}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A_\varepsilon|z|}{G_\varepsilon}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{G_\varepsilon}{R_{-\varepsilon}A_{-\varepsilon}}\right)^n \le$$

$$\le m\exp\left(\frac{b_\varepsilon}{A_\varepsilon|z|}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A_\varepsilon|z|}{G_\varepsilon}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{G_\varepsilon}{R_{-\varepsilon}A_{-\varepsilon}}\right)^n, \quad m = \frac{M_3M_4m_0}{M_1},$$

яка справджується за умов $|z| < \dfrac{G_\varepsilon}{A_\varepsilon}$, $\dfrac{G_\varepsilon}{A_{-\varepsilon}} < R_{-\varepsilon}$. Внаслідок довільності числа $\varepsilon > 0$ ряд (29) рівномірно збігається до функції $f(z)$ в області $|z| \le R_0 < R$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* (2), (4), $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|g_k|} = g$, $0 \le g < \infty$, *і* $f(z) \in E_R$, $s_0 < R \le \infty$, *де* $s_0 = \dfrac{b+g}{a}$. *Тоді у крузі* $|z| < R - s_0$ *має місце розвинення* (29), *коефіцієнти якого визначаються за формулою* (16) *або* (21).

Доведення. Оскільки виконується нерівність (24), функції $\omega_k(z)$ аналітичні в області $|z| > \dfrac{g}{a}$ і, відповідно, справедливими є формули (16) і (21). Розглянемо ряд (30), який одержано з степеневого ряду (14), рівномірно збіжного в області $|z| \le R_{-\varepsilon}$, $0 < R_{-\varepsilon} = R - \varepsilon$. Перетворимо його з урахуванням нерівності (8) і нерівностей $m_1a_{-\varepsilon}^k \le |a_k| \le m_1a_\varepsilon^k$, $g_k \le m_3g_\varepsilon^k$, $\dfrac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \le \dfrac{M_4}{R_{-\varepsilon}^k}$, m_i, $M_4 = \mathrm{const}$, що випливають з умов теореми:

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^kg_{n-k}}{a_n}P_k(z)\right| \le$$

$$\le \frac{M_4m_3}{m_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(R_{-\varepsilon}a_{-\varepsilon})^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kg_\varepsilon^{n-k}|P_k(z)| =$$

$$= m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(R_{-\varepsilon}a_{-\varepsilon})^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kg_\varepsilon^{n-k}\left(a_\varepsilon|z| + b_\varepsilon\right)^k =$$

$$= m\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_\varepsilon|z| + b_\varepsilon + g_\varepsilon}{R_{-\varepsilon}a_{-\varepsilon}}\right)^n, \quad m = \frac{M_4m_3m_0}{m_1}.$$

Сума одержаного мажорантного ряду існує за умови $|z| < \dfrac{a_{-\varepsilon}}{a_\varepsilon}\left(R_{-\varepsilon} - \dfrac{b_\varepsilon + g_\varepsilon}{a_{-\varepsilon}}\right)$. Внаслідок довільної малості величини ε ряд (30) і, відповідно, ряд (29) рівномірно збігаються в області $|z| \le R_0 < R - s_0$.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* (2), (4), $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\dfrac{|g_k|}{k!}} = G$, $0 < G < \infty$, *і* $f(z)$ *— функція експоненціального типу,* $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f^{(k)}(0)|} = \sigma$, $0 \le \sigma < \dfrac{a}{G}$.

Тоді в області $|z| < \infty$ *має місце розвинення* (29), *коефіцієнти якого визначаються за формулою* (16).

Доведення. За умовою $0 < a < \infty$ і $g = \infty$, тому ряди (19) розбігаються. Оцінимо безпосередньо суму ряду (30), одержаного з рівномірно збіжного в області $|z| \le R_{-\varepsilon}$, $0 < R_{-\varepsilon} = R - \varepsilon$, степеневого ряду (14) з урахуванням формули (12). Враховуючи нерівність (8) і нерівності $m_1 a_{-\varepsilon}^k \le |a_k| \le m_1 a_{\varepsilon}^k$, $\dfrac{|g_k|}{k!} \le$ $\le M_3 G_{\varepsilon}^k$, $\left|f^{(k)}(0)\right| \le m_4 \sigma_{\varepsilon}^k$, m_i, M_j = const, які випливають з умов теореми, одержуємо

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n} P_k(z)\right| \le$$

$$\le M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{\varepsilon}^n G_{\varepsilon}^n}{a_{-\varepsilon}^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(a_{\varepsilon}|z| + b_{\varepsilon}\right)^k}{k!\, G_{\varepsilon}^k} \le$$

$$\le M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{\varepsilon}^n G_{\varepsilon}^n}{a_{-\varepsilon}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(a_{\varepsilon}|z| + b_{\varepsilon}\right)^k}{k!\, G_{\varepsilon}^k} =$$

$$= M\left(1 - \frac{\sigma_{\varepsilon} G_{\varepsilon}}{a_{-\varepsilon}}\right)^{-1} \exp\left(\frac{a_{\varepsilon}|z| + b_{\varepsilon}}{G_{\varepsilon}}\right), \quad M = \frac{M_3 m_0 m_4}{m_1}.$$

Ця оцінка справджується за умови $\sigma_{\varepsilon} < \dfrac{a_{-\varepsilon}}{G_{\varepsilon}}$. Отже, ряд (30) для цілої функції збігається рівномірно в будь-якій скінченній області $|z| \le R_0 < \infty$, якщо тільки $\sigma < \dfrac{a}{G}$. За цих умов в області $|z| \le R_0 < \infty$ також рівномірно збігається ряд (29).

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* (2), $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$, $0 < a < \infty$, $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\dfrac{|b_k|}{k!}} = B$, $0 \le B < \infty$, $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|g_k|} = g$, $0 \le g < \infty$, *і* $f(z)$ — *функція експоненціального типу*, $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left|f^{(k)}(0)\right|} = \sigma$, $0 \le \sigma < \dfrac{a}{B}$.

Тоді в області $|z| < \infty$ *має місце розвинення* (29), *коефіцієнти якого визначаються за формулами* (16) *або* (21).

Доведення. За виконання умов теореми справджуються оцінки (10), (24) і приєднані функції $\omega_k(z)$ аналітичні в області $|z| > \dfrac{g}{a}$. Тому справедливими є формули (16) і (21). Оцінимо суму ряду (30) з урахуванням нерівності (10) і нерівностей $m_1 a_{-\varepsilon}^k \le |a_k| \le m_1 a_{\varepsilon}^k$, $|g_k| \le m_3 g_{\varepsilon}^k$, $\left|f^{(k)}(0)\right| \le m_4 \sigma_{\varepsilon}^k$, m_i, M_j = = const, що випливають з умов теореми:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k g_{n-k}}{a_n} P_k(z)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k \left|g_{n-k}\right|}{|a_n|} |P_k(z)| \le$$

$$\leq M \exp\left(\frac{a_\varepsilon |z|}{B_\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{a_{-\varepsilon}}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{g_\varepsilon^{n-k} B_\varepsilon^k}{(n-k)!} \leq$$

$$\leq M \exp\left(\frac{a_\varepsilon |z|}{B_\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_\varepsilon B_\varepsilon}{a_{-\varepsilon}}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{g_\varepsilon}{B_\varepsilon}\right) =$$

$$= M \exp\left(\frac{a_\varepsilon |z| + g_\varepsilon}{B_\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_\varepsilon B_\varepsilon}{a_{-\varepsilon}}\right)^n = M \exp\left(\frac{a_\varepsilon |z| + g_\varepsilon}{B_\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\sigma_\varepsilon B_\varepsilon}{a_{-\varepsilon}}\right)^{-1},$$

$$M = \frac{m_0 m_3 m_4}{m_1}.$$

Таким чином, за умови $\sigma < \dfrac{a}{B}$ ряд (30) збігається і, відповідно, ряд (29) збігається рівномірно до функції $f(z)$ у будь-якому крузі скінченного радіуса.

4. Розвинення функцій за системами поліномів типу Бернуллі — Ейлера. Розглянемо систему поліномів

$$\left\{ P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_0^k b_{n-k} z^k \right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{32}$$

яка є частинним випадком системи (1) за умови $a_k = a_0^k$. Твірна функція системи (32) набере вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0^k}{k!} (zt)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} t^m .$$

Звідси $F_1(zt) = e^{a_0 zt}$, $F_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{b_m}{m!} t^m$.

А. Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді поліноми системи (29) можна зобразити у вигляді контурного інтеграла (7).

Для приєднаних функцій одержимо з формули (19) такі вирази:

$$\omega_k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_{r+k}^k g_r}{a_0^{r+k}} \frac{1}{z^{r+k+1}} = \frac{(-1)^k}{k!\, a_0^k} \frac{d^k \omega_0}{dz^k} = \frac{(-1)^k}{a_0^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\omega_0(t)\, dt}{(t-z)^{k+1}}, \tag{33}$$

де $\omega_0(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \dfrac{g_r}{a_0^r} \dfrac{1}{z^{r+1}}$, $|z| > s = \dfrac{g}{|a_0|}$.

Коефіцієнти розвинення (29) функції $f(z) \in E_R$, $s < R \leq \infty$, отримаємо з (19) у вигляді

$$L_k(f) = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, g_{n-k}}{(n-k)!\, a_0^n} = \frac{1}{k!\, a_0^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \omega_0(t)\, dt. \tag{34}$$

Б. Виконання умов теореми 5 також забезпечує інтегральне зображення поліномів у вигляді (7), однак ряди, що зображують приєднані функції, розбігаються. Тому для коефіцієнтів розвинення функції експоненціального типу

$f(z)$, $0 \le \sigma < \dfrac{|a_0|}{G}$, за системою поліномів (29) можна використати тільки формулу (16), яка набере вигляду

$$L_k(f) = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, g_{n-k}}{(n-k)!\, a_0^n}.$$

В. Нехай виконуються умови теореми 6. Тоді поліноми не можна зобразити у вигляді контурного інтеграла (7). Для приєднаних функцій та коефіцієнтів розвинення функції експоненціального типу $f(z)$, $0 \le \sigma < \dfrac{|a_0|}{B}$, мають місце формули (33) і (34).

***Приклад* 1.** Нехай $b_k = (-z_0)^k$ і $a_0 = 1$. Тоді

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-z_0)^{n-k} z^k = (z - z_0)^n, \qquad F(zt, t) = e^{zt} e^{-z_0 t},$$

$$F_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t, \qquad F_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z_0)^k}{k!} t^k = e^{-z_0 t},$$

$$G(t) = e^{z_0 t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_0^k}{k!} t^k.$$

Звідси $g_k = z_0^k$, $a = 1$, $b = |z_0|$, $g = |z_0|$. За формулою (33) знайдемо $\omega_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z_0^k}{t^{k+1}} = \dfrac{1}{t - z_0}$. Для визначення коефіцієнтів розвинення аналітичної функції $f(z) \in E_R$, $R > 2|z_0|$, за системою поліномів (32) одержимо з (34) формулу

$$L_n(f) = \frac{1}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \frac{1}{t - z_0} dt = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z_0)}{dt^n}$$

і, відповідно, ряд (29), який згідно з теоремою 4 збігається у крузі $|z| < R - 2|z_0|$. Отже, коефіцієнти розвинення функції $f(z)$ за поліномами $P_n(z) = (z - z_0)^n$ є коефіцієнтами Тейлора цієї функції,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z_0)}{dt^n} (z - z_0)^n.$$

Зауважимо, що теорема 4 встановлює круг з центром у початку координат, всередині якого відповідний ряд рівномірно збігається.

***Приклад* 2.** Розглянемо систему поліномів Ейлера $E_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k E_{n-k} z^k$, які є коефіцієнтами розвинення відповідної твірної функції $\dfrac{2e^{zt}}{1 + e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z) \dfrac{t^n}{n!}$. За формулами (5) і (22) знайдемо

$$F_1(t) = e^t, \quad F_2(t) = \frac{2}{1+e^t}, \quad G(t) = \frac{1}{F_2(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k.$$

Звідси маємо $a_0 = 1$, $g_0 = 1$, $g_k = \frac{1}{2}$, $k \geq 1$, і за формулою (30) знайдемо $\omega_0(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right)$. Оскільки виконуються умови теореми 6, маємо границі відповідних послідовностей $a = 1$, $B = \frac{2}{\pi}$, $g = 1$. Коефіцієнти розвинення функції експоненціального типу $f(z)$, $\sigma < \frac{\pi}{2}$, знаходимо за формулою (34):

$$L_n(f) = \frac{1}{n!}\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{d^k f(z)}{dz^k}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)dz = \frac{1}{n!}\frac{f^{(n)}(0) + f^{(n)}(1)}{2}.$$

Розвинення функції експоненціального типу за системою поліномів Ейлера збігається у будь-якому крузі скінченного радіуса і має вигляд

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0) + f^{(n)}(1)}{n!}E_n(z).$$

***Приклад* 3.** Розвинення функцій за системою поліномів Бернуллі $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} z^k$. Твірна функція системи поліномів є такою:

$$\frac{te^{zt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z)\frac{t^n}{n!}.$$

Звідси маємо $F_1(t) = e^t$, $F_2(t) = \frac{t}{e^t - 1}$, $G(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{(k+1)!}$ і, відповідно, $\omega_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\frac{1}{t^{k+1}} = \ln\frac{t}{t-1}$. Знаходимо границі послідовностей коефіцієнтів відповідних рядів $a = 1$, $g = 1$, $B = \frac{2}{\pi}$. Оскільки справджуються умови теореми 6, підставивши вираз функції $\omega_0(t)$ у формулу (34), знайдемо коефіцієнти розвинення експоненціальної функції $f(z)$, $\sigma < \frac{\pi}{2}$:

$$L_0(f) = \int_0^1 f(z)\,dz, \quad L_n(f) = \frac{1}{n!}\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{d^n f(z)}{dz^n}\ln\frac{z}{z-1}dz =$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{d^{n-1}f(z)}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dz = \frac{1}{n!}\left[f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)\right], \quad n \geq 1.$$

Маємо такий ряд функції $f(z)$ за системою поліномів Бернуллі:

$$f(z) = \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)}{n!}B_n(z).$$

5. Розвинення функцій за системою поліномів типу Мелліна. Розглянемо систему поліномів

$$\left\{ P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_0^{n-k} z^k \right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{35}$$

яку одержимо з (1) за умови $b_k = b_0^k$, $b_0 \neq 0$. Для твірної функції системи поліномів (35) одержимо вираз

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (zt)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b_0 t)^m}{m!}.$$

Звідси $F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!}$, $F_2(z) = e^{bz}$, $G(z) = e^{-b_0 z}$ і, відповідно, $g_k = (-b_0)^k$, $b = |b_0|$, $g = |b_0|$.

Приєднані функції знайдемо за формулою (19) у вигляді $\omega_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_n^k (-b_0)^{n-k}}{a_n} \frac{1}{z^{n+1}}$ або

$$\omega_k(z) = \frac{1}{k!\, b_0^k} \frac{d^k}{dz^k} \left(z^k \omega_0(z) \right) = \frac{1}{b_0^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^k \omega_0(t)\, dt}{(t-z)^{k+1}}, \tag{36}$$

де $\omega_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b_0)^n}{a_n t^{n+1}}$.

Коефіцієнти розвинення аналітичної функції $f(z)$ за системою поліномів (35) шукаємо за формулою (21) або з урахуванням (36) — за формулою

$$L_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\, \omega_k(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{k!\, b_0^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \frac{d^k}{dz^k} \left(z^k \omega_0(z) \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d^k f(z)}{dz^k} \Phi_k(z)\, dz, \tag{37}$$

де $\Phi_k(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-b_0)^n}{a_n t^{n-k+1}}$.

А. Нехай справджуються умови теореми 3 і, відповідно, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k!}} = A$, $0 < A < \infty$. Для приєднаних функцій мають місце формули (36) в області $|z| > 0$, оскільки

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k!}{|a_k|} \frac{1}{k!}} = \frac{1}{A} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0.$$

Б. Нехай виконуються умови теореми 4, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$, $0 < a < \infty$. Тоді поліноми (35) можна записати в інтегральній формі (6).

Для функції $f(z) \in E_R$, $s < R \le \infty$, $s = \dfrac{2|b_0|}{a}$, справедливою є формула (29) в області $|z| < R - \dfrac{2|b_0|}{a}$. Коефіцієнти розвинення цієї функції за системою поліномів (35) шукаємо за формулами (37).

Для функції $f(z)$, аналітичної в області $|z| < R$, $0 < R < \infty$, має місце формула (29), а коефіцієнти розвинення за системою поліномів (35) визначаються за формулами (37).

***Приклад* 4.** Розглянемо функцію $f(z)$, аналітичну в області $|z| < R$, зі степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \tag{38}$$

коефіцієнти якого задовольняють умови $A_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|} = A$, $0 < A < \infty$, і, відповідно, $R = \dfrac{1}{A}$. Знайдемо розвинення функції $f(z)$ за системою поліномів (35), коефіцієнти яких є коефіцієнтами степеневого ряду (38), $a_k = A_k$, тобто справджуються умови теореми 4, $b = g = |b_0|$, $a = A$.

Приєднані функції $\omega_k(z)$, згідно з формулою (36), мають вигляд

$$\omega_k(z) = \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(-b_0)^{r-k} C_r^k}{A_r} \frac{1}{z^{r+1}}.$$

Підставивши їх у формулу (37) і врахувавши (38), одержимо

$$L_n(f) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-b_0)^{n-k} f^{(n)}(0)}{n!} \frac{C_n^k}{A_n} = \sum_{n=k}^{\infty} (-b_0)^{n-k} C_n^k = \frac{1}{(1+b_0)^{k+1}}.$$

Отже, маємо розвинення

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1+b_0)^{m+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_0^{n-k} A_k z^k,$$

яке є перетворенням Ейлера [6] степеневого ряду функції $f(z)$.

Висновки. Розклад функцій за системою поліномів, біортогональною з деякою іншою системою (асоційованих) функцій, є розвиненням методу розкладу функцій у степеневі ряди (за додатними степенями змінної) в комплексній області. При цьому система асоційованих функцій для системи степенів, як видно з прикладу 1, є системою від'ємних степенів цієї змінної. Можна також розвивати функції в ряди за системою асоційованих з поліномами функцій, для якої асоційованими є поліноми.

Зауважимо, що для будь-якої незалежної і повної системи функцій за певних умов [1] можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за цією системою функцій.

Інтегральне зображення (6) або (7) поліномів і, відповідно, інтегральне зображення сум рядів за системою поліномів лежить в основі [7] побудови розв'язків (у вигляді контурних інтегралів) звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними.

1. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука,1976. – 192 с.
2. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
4. *Уолш Дж.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд-во иност. лит., 1961. – 508 с.
5. *Сухорольський М. А.* Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Меллі-на // Вісн. ун-ту „Львів. політехніка”. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – № 346. – С. 111 – 115.
6. *Сухорольський М. А.* Область збіжності перетворення Ейлера степеневого ряду аналітичної функції // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 8. – С. 1145 – 1152.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1974. – 576 с.

Одержано 02.07.07,
після доопрацювання — 30.11.09