УДК 517.98

Д. П. Проскурін (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
К. М. Сукретний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО $*$-ЗОБРАЖЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ CAR

Irreducible $*$-representations of deformations of canonical anticommutation relations (CAR) belonging to a class of $*$-algebras generated by generalized quons are considered.

Рассмотрены неприводимые $*$-представления деформаций канонических антикоммутационных соотношений (CAR), которые принадлежат классу $*$-алгебр, порожденных обобщенными куонами.

1. Вступ. Останнім часом у зв'язку з численними застосуваннями в математичній фізиці, теорії операторів, некомутативній теорії ймовірностей підвищився інтерес до вивчення $*$-зображень скінченнопороджених $*$-алгебр взагалі та $*$-алгебр, породжених деформаціями канонічних комутаційних та антикомутаційних співвідношень квантової механіки, зокрема. Так, теорія зображень деформованих CCR (канонічних комутаційних співвідношень) використовується при побудові некласичних моделей у квантовій механіці, теорії квантових однорідних просторів тощо.

Метою даної роботи є опис класів унітарної еквівалентності незвідних $*$-зображень деформацій канонічних антикомутаційних співвідношень, які позначатимемо далі як λ_{ij}-CAR. А саме, розглядатимемо $*$-алгебри, породжені твірними a_i, a_i^*, $i = 1, \ldots, d$, що задовольняють визначальні співвідношення

$$a_i^* a_i + a_i a_i^* = 1, \qquad a_i^* a_j = \lambda_{ij} a_j a_i^*, \qquad a_j a_i = \lambda_{ij} a_i a_j, \quad i \neq j, \tag{1}$$

де $i, j = 1, \ldots, d$, $\lambda_{ij} = \overline{\lambda}_{ji}$, $\lambda_{ij}^n = 1$ при всіх $i \neq j$. Нехай $\Lambda = \{\lambda_{ij},\, i \neq j\}$. Через $\mathcal{A}_\Lambda$ будемо позначати $*$-алгебру, породжену співвідношеннями (1).

Як приклад застосування опису незвідних зображень λ_{ij}-CAR наведемо реалізацію універсальної C^*-алгебри, породженої співвідношеннями (1) для випадку $d = 2$, $\lambda_{12}^4 = 1$.

Зауважимо, що співвідношення (1) належать до широкого класу комутаційних співвідношень для узагальнених куонів, що був уведений та вивчався в роботах [1–3].

Нагадаємо, що $*$-алгебра, породжена CAR з d степенями свободи, має вигляд

$$\mathcal{B} = \mathbb{C}\Big\langle a_i, a_i^* | a_i^* a_i + a_i a_i^* = 1, \;\; a_i^* a_j = -a_j a_i^*, \;\; i \neq j,$$
$$a_j a_i = -a_i a_j, \;\; a_i^2 = 0, \;\; i, j = 1 \ldots, d \Big\rangle.$$

Відомо (див., наприклад, [4]), що $*$-алгебра $\mathcal{B}$ має єдине незвідне $*$-зображення у просторі $(\mathbb{C}^2)^{\otimes d}$, і це зображення є фоківським.

У роботі [5] вивчався віківський аналог CAR-алгебри при $d = 2$. А саме, розглядалась $*$-алгебра WCAR, породжена співвідношеннями

$$a_i^* a_i + a_i a_i^* = 1, \quad i = 1, 2,$$
$$a_1^* a_2 = -a_2 a_1^*.$$

У цьому випадку порушується теорема про єдиність незвідного $*$-зображення. Проте всі незвідні $*$-зображення є скінченновимірними, з розмірностями, що не перевищують 4. Останній факт дозволяє реалізувати обгортуючу C^*-алгебру, породжену WCAR, як замкнену підалгебру алгебри неперервних матриць-функцій на спектрі. В роботі [6] розпочато вивчення більш широкого класу віківських деформацій CAR, а саме, розглянуто $*$-алгебри λ-WCAR з $d = 2$, породжені співвідношеннями

$$a_i^* a_i + a_i a_i^* = 1, \quad i = 1, 2,$$

$$a_1^* a_2 = \lambda a_2 a_1^*, \ \lambda^n = 1.$$

У даній роботі наведено класифікацію незвідних $*$-зображень λ-WCAR та побудовано реалізацію обгортуючої C^*-алгебри за допомогою неперервних матриць-функцій.

2. Незвідні $*$-зображення λ_{ij}-CAR. Спочатку зауважимо, що будь-яке $*$-зображення співвідношень (1) є обмеженим. Розглянемо довільний набір операторів $\{A_i, \ i = 1, \ldots, d\}$, $A_i \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, що задовольняють співвідношення (1). Побудуємо ліві полярні розклади $A_i = U_i C_i$, $i = 1, \ldots, d$, де $C_i \geq 0$, U_i — часткові ізометрії та $\ker U_i = \ker C_i = \ker A_i$. Легко одержати наступне твердження.

Лема 1. *Набір операторів $\{A_i, \ i = 1, \ldots, d\} \subset B(\mathcal{H})$ задовольняє співвідношення* (1) *тоді і лише тоді, коли оператори C_i, U_i, де $A_i = U_i C_i$ — полярні розклади, задовольняють співвідношення*

$$U_i C_i^2 U_i^* = 1 - C_i^2, \qquad C_i C_j = C_j C_i, \quad i = 1, \ldots, d,$$
$$C_i^2 U_j = U_j C_i^2, \quad i, j = 1, \ldots, d, \quad i \neq j, \tag{2}$$
$$U_j U_i = \lambda_{ij} U_i U_j, \qquad U_i^* U_j = \lambda_{ij} U_j U_i^*, \quad i, j = 1, \ldots, d, \quad i \neq j.$$

Крім того, неважко пересвідчитись, що набір $\{A_i, i = 1, \ldots, d\}$ буде незвідним тоді і лише тоді, коли набір $\{U_i, U_i^*, C_i, i = 1, \ldots, d\}$ буде незвідним. Аналогічна властивість має місце щодо унітарної еквівалентності наборів.

Отже, тепер ми розглядатимемо набір операторів $\{U_i, \ C_i, \ i = 1, \ldots, d\}$, що задовольняють співвідношення (2). Нагадаємо опис незвідних $*$-зображень співвідношень (2) при $d = 1$ (див., наприклад, [4]).

Теорема 1. *Всі незвідні попарно нееквівалентні $*$-зображення співвідношення*

$$UC^2U^* = 1 - C^2, \qquad C \geq 0, \quad \ker U = \ker C, \tag{3}$$

де U — часткова ізометрія, мають такий вигляд:

1) *фоківське зображення*:

$$\sigma(C^2) = \{0, 1\},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2) *зображення, пов'язані з циклами довжини* 2:

$$\sigma(C^2) = \{x, 1 - x\},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

3) *зображення, пов'язані з нерухомою точкою*:

$$\sigma(C^2) = \left\{ \frac{1}{2} \right\},$$

$$C^2 = \frac{1}{2}, \qquad U = e^{i\psi}, \quad 0 \le \psi < 2\pi.$$

Перейдемо до загального вигляду.

Лема 2. *В незвідному $*$-зображенні $\mathcal{A}_\Lambda$ спектр оператора C_i^2 зосереджений на невід'ємній орбіті динамічної системи, заданої відображенням $f\colon x \to 1-x$, причому всі власні числа мають однакову кратність.*

Доведення. Розглянемо незвідний набір $\{C_i, U_i, i = 1, \ldots, d\}$, що задовольняє співвідношення (2). Зафіксуємо деяке $i \in \{1, \ldots, d\}$, тоді пара $\{C_i^2, U_i\}$ задає $*$-зображення співвідношень (3). Звідси випливає, що $\sigma(C_i^2)$ є інваріантним відносно відображення $x \to 1-x$. Припустимо, що $\sigma(C_i^2)$ не збігається з орбітою цього відображення.

Розглянемо $M \subset \sigma(C_i^2)$, інваріантну відносно f, та спектральний проектор $E_{C_i^2}(M)$. Тоді із співвідношень

$$C_i^2 C_j^2 = C_j^2 C_i^2, \qquad C_i^2 U_j = U_j C_i^2, \quad i, j = 1, \ldots, d, \quad i \ne j,$$

випливає

$$E_{C_i^2}(M) C_j^2 = C_j^2 E_{C_i^2}(M), \qquad E_{C_i^2}(M) U_j = U_j E_{C_i^2}(M).$$

Тобто образ $E_{C_i^2}(M)$ є інваріантним відносно C_j, U_j, U_j^*, i, $j = 1, \ldots, d$, $j \ne i$. Але із співвідношення $C_i^2 U_i = U_i(1 - C_i^2)$ випливає

$$E_{C_i^2}(M) U_i = U_i E_{C_i^2}(f^{-1}(M)),$$

звідки очевидно, що образ $E_{C_i^2}(M)$ є інваріантним відносно U_i. Таким чином, для довільної інваріантної відносно f підмножини $M \subset \sigma(C_i^2)$ образ $E_{C_i^2}(M)$ є інваріантним відносно всіх операторів зображення. Тоді з незвідності зображення випливає, що $\sigma(C_i^2)$ зосереджений на орбіті f.

Для доведення твердження про кратність власних чисел зауважимо, що в незвідному зображенні одновимірного CAR, пов'язаному з орбітою довжини 2, обидва власних числа оператора C^2 мають кратність 1, а в незвідному зображенні (2) оператор C_i^2 є прямою сумою копій незвідних зображень (3), пов'язаних із однією орбітою.

Лему доведено.

Наступне твердження є основою для опису незвідних $*$-зображень співвідношень (2).

Теорема 2. *Нехай набір операторів $\{U_i, C_i, i = 1, \ldots, d\}$ визначає незвідне $*$-зображення співвідношень* (2) *в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Тоді*:

1. *Якщо* $\sigma(C_1^2) = \{0, 1\}$, *то існує гільбертів простір* K *такий, що* $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes K$, *та*

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K, \qquad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K,$$

$$C_i^2 = \mathbf{1} \otimes \widetilde{C}_i^2, \qquad U_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{1i} \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_i, \quad i > 1,$$

де $\{\widetilde{C}_i, \widetilde{U}_i, i > 1\}$ *є незвідним набором операторів, що задовольняють* (2).

2. *Якщо* $\sigma(C_1^2) = \{x_1, 1 - x_1\}$ *для деякого* $0 < x_1 < \dfrac{1}{2}$, *то знайдеться гільбертів простір* K *такий, що* $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes K$, *та*

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 1 - x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K, \qquad C_i^2 = \mathbf{1} \otimes \widetilde{C}_i^2, \quad i > 1,$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_1, \qquad U_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda 1i \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_i, \quad i > 1,$$

де $\widetilde{U}_1$ — *унітарний оператор, що задовольняє співвідношення*

$$C_i \widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_1 C_i, \qquad \widetilde{U}_i \widetilde{U}_1 = \lambda_{1i}^2 \widetilde{U}_1 \widetilde{U}_i, \quad i > 1,$$

оператори $\widetilde{C}_i$, $\widetilde{U}_i$, $i > 1$, *задовольняють співвідношення* (2) *та набір* $\{\widetilde{C}_i, \widetilde{U}_i, \widetilde{U}_1, i > 1\}$ *є незвідним на* K.

3. *Якщо* $\sigma(C_1^2) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, *то* $C_1^2 = \dfrac{1}{2}\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$, *а набір* $\{C_i, U_i, U_1, i > 1\}$ *незвідний на* $\mathcal{H}$, *де всі оператори задовольняють співвідношення* (2). *Для уніфікації позначень у цьому випадку будемо писати* $\widetilde{C}_i$, $\widetilde{U}_i$, $\widetilde{U}_1$ *замість* C_i, U_i, U_1 *та* K *замість* $\mathcal{H}$.

Набори операторів, що визначаються різними значеннями $\sigma(C_1^2)$, *не еквівалентні.*

Якщо два набори $\{C_i, U_i, i = 1, \ldots, d\}$ *задаються одним значенням* $\sigma(C_1^2)$, *то вони еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні редуковані набори є унітарно еквівалентними.*

Доведення. Нехай $\{U_i, C_i^2, i = 1, \ldots, d\}$ — незвідний набір операторів, які задовольняють співвідношення (2). Згідно з лемою 2 потрібно розглянути наступні варіанти:

а) $\boldsymbol{\sigma(\mathbf{C_1^2}) = \{0, 1\}}$. З леми 2 випливає, що $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$, де $\mathcal{H}_1$ та $\mathcal{H}_2$ є власними підпросторами оператора C_1^2, що відповідають власним числам 1 та 0 відповідно, та $\mathcal{H}_1 \backsim \mathcal{H}_0 \backsim K$, де K — деякий гільбертів простір. Тобто

$$\mathcal{H} = K \oplus K \simeq \mathbb{C}^2 \otimes K$$

і, відповідно до цього розкладу, використавши умови $\ker U_1 = \ker C_1$ та $C_1^2 U_1 = U_1(\mathbf{1} - C^2)$, отримаємо

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K, \qquad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K.$$

Подамо тепер оператори C_i^2, U_i, $i > 1$ у блочному вигляді, що відповідає розкладу $\mathcal{H} = K \oplus K$:

$$C_i^2 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{pmatrix}, \qquad U_i = \begin{pmatrix} U_{11}^{(i)} & U_{12}^{(i)} \\ U_{21}^{(i)} & U_{22}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівностей

$$C_1^2 C_i^2 = C_i^2 C_1^2, \qquad C_i^2 U_1 = U_1 C_i^2, \quad i > 1,$$

відповідно матимемо

$$C_{12} = C_{12}^* = 0, \qquad C_{11} = C_{22} = \widetilde{C}_i^2, \quad i > 1.$$

А з рівностей

$$C_1^2 U_i = U_i C_1^2, \qquad U_i U_1 = \lambda_{1i} U_1 U_i, \quad i > 1,$$

випливатиме

$$U_{12}^{(i)} = U_{21}^{(i)} = 0, \qquad U_{22}^{(i)} = \lambda_{1i} U_{11}^{(i)}.$$

Покладемо $U_{11}^{(i)} = \widetilde{U}_i$, $i > 1$. Очевидно, що умова $\ker C_i = \ker U_i$ еквівалентна умові $\ker \widetilde{C}_i = \ker \widetilde{U}_i$. Отже,

$$C_i^2 = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_i^2 & 0 \\ 0 & \widetilde{C}_i^2 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \otimes \widetilde{C}_i^2, \qquad U_i = \begin{pmatrix} \widetilde{U}_i & 0 \\ 0 & \lambda_{1i} \widetilde{U}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{1i} \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_i, \quad i > 1.$$

При цьому оператори $\{\widetilde{C}_i^2, \widetilde{U}_i, i > 1\}$ задовольняють співвідношення (2).

b) $\boldsymbol{\sigma(C_1^2) = \{x_1, 1 - x_1\},\ 0 < x_1 < \frac{1}{2}}$. Нагадаємо, що в цьому випадку оператор U_1 є унітарним. Міркуваннями, аналогічними тим, що проводились у п. а), дістанемо

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_{1-x_1} \oplus \mathcal{H}_{x_1} \simeq K \oplus K \simeq \mathbb{C}^2 \otimes K,$$

і відповідно до цих розкладів одержимо

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} (1 - x_1)\mathbf{1}_K & 0 \\ 0 & x_1 \mathbf{1}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K, \quad 0 < x_1 < \frac{1}{2},$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{U}_1 \\ \mathbf{1}_K & 0 \end{pmatrix},$$

де оператор $\widetilde{U}_1 \colon K \longrightarrow K$ є унітарним.

Міркуючи, як і в попередньому випадку, отримуємо

$$C_i^2 = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_i^2 & 0 \\ 0 & \widetilde{C}_i^2 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \otimes \widetilde{C}_i^2, \qquad U_i = \begin{pmatrix} U_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & U_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i > 1.$$

Далі, з умов $U_i U_1 = \lambda_{1i} U_1 U_i$, $i > 1$, маємо

$$U_{11}^{(i)} \widetilde{U}_1 = \lambda_{1i} \widetilde{U}_1 U_{22}^{(i)}, \qquad U_{22}^{(i)} = \lambda_{1i} U_{11}^{(i)}.$$

Покладемо $U_{11}^{(i)} = \widetilde{U}_i$, $i > 1$. Одержимо $\ker \widetilde{U}_i = \ker \widetilde{C}_i$, $i > 1$, та

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{U}_1 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_1,$$

$$U_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{1i} \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_i, \quad i > 1,$$

$$\widetilde{U}_i \widetilde{U}_1 = \lambda_{1i}^2 \widetilde{U}_1 \widetilde{U}_i, \qquad \widetilde{C}_i^2 \widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_1 \widetilde{C}_i^2, \quad i > 1,$$

і оператори $\{\widetilde{C}_i, \widetilde{U}_i, i > 1\}$ задовольняють співвідношення (2).

c) $\boldsymbol{\sigma(\mathbf{C_1^2}) = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$**.** У цьому випадку $C_1^2 = \dfrac{1}{2}\mathbf{1}_K$, $U_1 = \widetilde{U}_1$ — унітарний оператор. Оператори $\widetilde{C}_i^2 = C_i^2$, $\widetilde{U}_i = U_i$, $i > 1$, задовольняють (2) та $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_i$, $i > 1$, додатково задовольняють співвідношення $\widetilde{U}_i \widetilde{U}_1 = \lambda_{1i} \widetilde{U}_1 \widetilde{U}_i$, $i > 1$.

Покажемо, що в усіх випадках сім'я $\{C_i, U_i, i = 1, \ldots, d\}$ є незвідною тоді і тільки тоді, коли редуковані набори операторів $\{\widetilde{C}_i, \widetilde{U}_i, i > 1\}$ у випадку a) та $\{\widetilde{C}_i, \widetilde{U}_i, \widetilde{U}_1, i > 1\}$ в решті випадків є незвідними.

Доведемо це для випадку b). Випадок c) є тривіальним, а у випадку a) всі міркування аналогічні.

Скористаємось лемою Шура. Нехай $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ — обмежений оператор, такий, що

$$TC_i^2 = C_i^2 T, \qquad TU_i = U_i T, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Подамо T у вигляді блочної матриці $T = (T_{ij})_{i,j=1}^2$, що відповідає розкладу простору зображення у пряму суму $\mathcal{H} = K \oplus K$. Тоді $TC_1^2 = C_1^2 T$ еквівалентно умові $T_{12} = T_{21} = 0$.

Далі, $TU_1 = U_1 T$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$T_{11} = T_{22}, \qquad \widetilde{U}_1 T_{11} = T_{11} \widetilde{U}_1.$$

Позначимо $T_{11} = \widetilde{T}$. Остаточно співвідношення

$$C_i^2 T = TC_i^2, \qquad U_i T = TU_i, \quad i > 1,$$

еквівалентні співвідношенням

$$\widetilde{C}_i^2 \widetilde{T} = \widetilde{T} \widetilde{C}_i^2, \qquad \widetilde{U}_i \widetilde{T} = \widetilde{T} \widetilde{U}_i, \quad i > 1.$$

Отже, оператор T комутує з усіма C_i, U_i, $i = 1, \ldots, d$, тоді і тільки тоді, коли $T = \mathbf{1}_2 \otimes \widetilde{T}$, де $\widetilde{T}$ комутує з усіма $\widetilde{C}_i$, $\widetilde{U}_i$, $\widetilde{U}_1$, $i > 1$. Таким чином, T скалярний тоді і лише тоді, коли скалярним є $\widetilde{T}$.

Розглянемо два набори операторів $\{C_i^{(1)}, U_i^{(1)}, i = 1, \ldots, d\}$ та $\left\{C_i^{(2)}, U_i^{(2)}, i = 1, \ldots, d\right\}$, які задовольняють співвідношення (2). Очевидно, якщо набори є унітарно еквівалентними, то $\sigma\left(\left(C_1^{(1)}\right)^2\right) = \sigma\left(\left(C_1^{(2)}\right)^2\right)$. Тоді, міркуючи, як і при доведенні незвідності, переконуємося, що набори $\left\{C_i^{(1)}, U_i^{(1)}, i = 1, \ldots, d\right\}$ та $\left\{C_i^{(2)}, U_i^{(2)}, i = 1, \ldots, d\right\}$ є унітарно еквівалентними тоді і лише тоді, коли редуковані набори є унітарно еквівалентними.

Теорему доведено.

Тепер можна сформулювати основний результат роботи.

Теорема 3. *Нехай оператори* $C_i, U_i \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, \ldots, d$, *задають незвідне зображення співвідношень* (2). *Тоді знайдуться розбиття множини індексів* $\{1, 2, \ldots, d\} = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$ (*кожна із компонент може дорівнювати порожній множині*), *набір чисел* $\{x_i, i \in \Phi_2\}$, $0 < x_i < \dfrac{1}{2}$, *гільбертів простір* K *такий, що*

$$\mathcal{H} \simeq \bigotimes_{j\in\Phi_1} \mathbb{C}^2 \bigotimes_{j\in\Phi_2} \mathbb{C}^2 \otimes K,$$

і незвідний набір унітарних операторів $\widetilde{U}_i$, $i \in \Phi_2 \cup \Phi_3 \subset B(K)$, *які задовольняють співвідношення*

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_j\widetilde{U}_i &= \lambda_{ij}^4 \widetilde{U}_i\widetilde{U}_j, \quad i,\ j \in \Phi_2, \quad i \neq j, \\ \widetilde{U}_j\widetilde{U}_i &= \lambda_{ij}^2 \widetilde{U}_i\widetilde{U}_j, \quad i \in \Phi_2, \quad j \in \Phi_3, \\ \widetilde{U}_j\widetilde{U}_i &= \lambda_{ij} \widetilde{U}_i\widetilde{U}_j, \quad i,\ j \in \Phi_3, \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{4}$$

такі, що $\{C_i, U_i, i = 1, \ldots, d\}$ *є унітарно еквівалентними сім'ї операторів*

$$\begin{gathered} C_i^2 = \bigotimes_{j<i,\ j\in\Phi_1} \mathbf{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bigotimes_{j>i,\ j\in\Phi_1} \mathbf{1}_2 \otimes \bigotimes_{j\in\Phi_2} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_K, \quad i \in \Phi_1, \\ C_i^2 = \bigotimes_{j\in\Phi_1} \mathbf{1}_2 \otimes \bigotimes_{j<i,\ j\in\Phi_2} \mathbf{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1-x_i & 0 \\ 0 & x_i \end{pmatrix} \bigotimes_{j>i,\ j\in\Phi_2} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_K, \quad i \in \Phi_2, \\ C_i^2 = \frac{1}{2} \bigotimes_{j\in\Phi_1} \mathbf{1}_2 \otimes \bigotimes_{j\in\Phi_2} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_K, \quad i \in \Phi_3, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} U_i = \bigotimes_{j<i,\ j\in\Phi_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \bigotimes_{j>i,\ j\in\Phi_1} \mathbf{1}_2 \otimes \bigotimes_{j\in\Phi_2} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_K, \quad i \in \Phi_1, \\ U_i = \bigotimes_{j\in\Phi_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji} \end{pmatrix} \otimes \bigotimes_{j<i,\ j\in\Phi_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \bigotimes_{j>i,\ j\in\Phi_2} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_K + \\ + \bigotimes_{j\in\Phi_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji} \end{pmatrix} \otimes \bigotimes_{j<i,\ j\in\Phi_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \\ \otimes \bigotimes_{j>i,\ j\in\Phi_2} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji}^2 \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_i, \quad i \in \Phi_2, \\ U_i = \bigotimes_{j\in\Phi_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji} \end{pmatrix} \otimes \bigotimes_{j\in\Phi_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{ji} \end{pmatrix} \otimes \widetilde{U}_i, \quad i \in \Phi_3. \end{gathered}$$

Навпаки, будь-який набір операторів, побудований за формулами (5), *де* $\{\widetilde{U}_i$, $i \in \Phi_2 \cup \Phi_3\}$ *є незвідним набором унітарних операторів, що задовольняють* (4), $0 < x_i < \dfrac{1}{2}$, $i \in \Phi_2$, *визначає незвідне зображення* (2).

Два набори, побудовані за формулами (5), *є унітарно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли*:

1) *збігаються відповідні розбиття*;

2) *збігаються відповідні значення* x_i, $i \in \Phi_2$;

3) *відповідні незвідні набори унітарних операторів* $\widetilde{U}_i$, $i \in \Phi_3$, *є унітарно еквівалентними.*

Доведення випливає з теореми 2 та індуктивних міркувань.

***Зауваження* 1.** Якщо $\lambda_{ij}^n = 1$ при всіх $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, d$, то набір унітарних операторів $\{\widetilde{U}_i,\ i \in \Phi_2 \cup \Phi_3\} \subset B(K)$ визначає незвідне $*$-зображення багатовимірного раціонального тора. З приводу опису $*$-зображень раціональних торів див., наприклад, [7].

У протилежному випадку одержимо класифікацію незвідних $*$-зображень $\mathcal{A}_\Lambda$ з точністю до класифікації незвідних зображень ірраціональних торів. Зазначимо, що ірраціональні тори є ядерними C^*-алгебрами не типу один та опис класів унітарної еквівалентності незвідних $*$-зображень цих алгебр є вкрай важкою задачею.

3. Універсальна обгортуюча C^*-алгебра. У цьому пункті застосуємо теорему про опис незвідних $*$-зображень λ_{ij}-CAR для опису універсальної C^*-алгебри, породженої співвідношеннями (1) при $d = 2$ та $\lambda_{12}^4 = 1$.

Нагадаємо спочатку означення універсальної C^*-алгебри, породженої $*$-алгеброю $\mathcal{A}$.

Означення 1. *Пара* (A, ρ), *де* A — C^**-алгебра, а* $\rho\colon \mathcal{A} \to A$ — *унітальний гомоморфізм, називається обгортуючою для* $*$*-алгебри* $\mathcal{A}$, *якщо для кожного обмеженого* $*$*-зображення* $\pi\colon \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ *знайдеться єдине* $*$*-зображення* $\widetilde{\pi}\colon A \to B(\mathcal{H})$ *таке, що* $\pi = \widetilde{\pi} \circ \rho$. *У цьому випадку* C^**-алгебра* A *називається універсальною* C^**-алгеброю, породженою* $*$*-алгеброю* $\mathcal{A}$.

Зауважимо, що для існування універсальної C^*-алгебри необхідно і достатньо, щоб всі обмежені $*$-зображення $\mathcal{A}$ були рівномірно обмеженими.

Перш ніж навести опис C^*-алгебри, породженої співвідношеннями (1) при $d = 2$ та $\lambda_{12}^4 = 1$, надамо перелік незвідних $*$-зображень цих співвідношень у термінах твірних a_1, a_2. З теореми 3 одержимо наступний результат.

Теорема 4. *Нехай* $*$*-алгебра* $\mathcal{A}$ *породжена твірними* a_1, a_2, *що задовольняють співвідношення*

$$\begin{gathered} a_j^* a_j + a_i a_j^* = 1, \quad j = 1, 2, \\ a_1^* a_2 = i a_2 a_1^*, \qquad a_2 a_1 = i a_1 a_2, \quad i^2 = -1. \end{gathered} \tag{6}$$

Тоді всі незвідні $*$*-зображення* $\mathcal{A}$, *з точністю до унітарної еквівалентності, мають наступний вигляд*:

1) $$\rho_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-x_1} & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2 + e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-x_2} & 0 \end{pmatrix} + e^{i\varphi_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$0 < x_1, \quad x_2 < \frac{1}{2}, \quad \varphi_1,\ \varphi_2 \in [0, 2\pi);$$

2) $$\pi_F(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2, \qquad \pi_F(a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3a) $$\pi^{(1)}_{x_2,\varphi_2}(a_1)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\otimes\mathbf{1}_2,$$

$$\pi^{(1)}_{x_2,\varphi_2}(a_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\\sqrt{1-x_2}&0\end{pmatrix}+e^{i\varphi_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&\sqrt{x_2}\\0&0\end{pmatrix},$$

$$0<x_2<\frac{1}{2},\quad \varphi_2\in[0,2\pi);$$

3b) $$\pi^{(2)}_{x_1,\varphi_1}(a_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\\sqrt{1-x_1}&0\end{pmatrix}+e^{i\varphi_1}\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&\sqrt{x_1}\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\pi^{(2)}_{x_1,\varphi_1}(a_2)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\otimes\mathbf{1}_2,\qquad 0<x_1<\frac{1}{2},\quad \varphi_1\in[0,2\pi);$$

4a) $$\rho^{(1)}_{x_1,\varphi_1,\varphi_2}(a_1)=\begin{pmatrix}0&0\\\sqrt{1-x_1}&0\end{pmatrix}\otimes\mathbf{1}_2+\begin{pmatrix}0&\sqrt{x_1}\\0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}e^{i\varphi_1}&0\\0&-e^{i\varphi_1}\end{pmatrix},$$

$$\rho^{(1)}_{x_1,\varphi_1,\varphi_2}(a_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&e^{i\varphi_2}\\1&0\end{pmatrix},$$

$$0<x_1<\frac{1}{2},\quad \varphi_1\in[0,\pi),\quad \varphi_2\in[0,2\pi);$$

4b) $$\rho^{(2)}_{x_2,\varphi_2,\varphi_1}(a_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&e^{i\varphi_1}\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\rho^{(2)}_{x_2,\varphi_2,\varphi_1}(a_2)=\begin{pmatrix}0&0\\\sqrt{1-x_2}&0\end{pmatrix}\otimes\mathbf{1}_2+\begin{pmatrix}0&\sqrt{x_2}\\0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}e^{i\varphi_2}&0\\0&-e^{i\varphi_2}\end{pmatrix},$$

$$0<x_2<\frac{1}{2},\quad \varphi_1\in[0,2\pi),\quad \varphi_2\in[0,\pi);$$

5a) $$\delta^{(1)}_{\varphi_1}(a_1)=\frac{e^{i\varphi_1}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix},\qquad \delta^{(1)}_{\varphi_1}(a_2)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \varphi_1\in[0,2\pi);$$

5b) $$\delta^{(2)}_{\varphi_2}(a_1)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\qquad \delta^{(2)}_{\varphi_2}(a_2)=\frac{e^{i\varphi_2}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix},\quad \varphi_2\in[0,2\pi);$$

6) *для всіх* $\varphi_1\in[0,2\pi)$, $\varphi_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\pi_{\varphi_1,\varphi_2}(a_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0&e^{1\varphi_1}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\pi_{\varphi_1,\varphi_2}(a_2)=\frac{e^{i\varphi_2}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}.$$

Доведення. Нагадаємо, що незвідні пари унітарних операторів U_1, U_2, які задовольняють співвідношення

$$U_2U_1 = \lambda U_1U_1, \qquad \lambda^n = 1,$$

мають, з точністю до унітарної еквівалентності (див. [4]), вигляд

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & e^{i\varphi_1} \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = e^{i\varphi_2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in \left[0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$. Тоді теорема 4 безпосередньо випливає з теореми 3.

***Зауваження* 2.** Нижче будемо ототожнювати тензорний добуток $A \otimes B$, де $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ та $B \in M_m(\mathbb{C})$, з блочною матрицею $A \otimes B = (a_{ij}B) \in \in M_{nm}(\mathbb{C})$.

Перейдемо тепер до опису універсальної C^*-алгебри. Розглянемо C^*-алгебру неперервних функцій, заданих на компакті $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]^2 \times [0, 2\pi]^2$, що набувають значень в $M_4(\mathbb{C})$. Розглянемо C^*-підалгебру A в $C\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]^2 \times [0, 2\pi]^2 \to M_4(\mathbb{C})\right)$, породжену функціями

$$a_1(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2) = \rho_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_1), \qquad a_2(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2) = \rho_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_2), \tag{8}$$

де на кінці відрізків ми продовжили функції за неперервністю.

Теорема 5. *Універсальна C^*-алгебра, породжена співвідношеннями* (6), *ізоморфна C^*-алгебрі A.*

Доведення. Достатньо показати, що довільне незвідне $*$-зображення (6) унітарно еквівалентне або зображенню, визначеному набором $\{a_1(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2), a_2(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)\}$ при фіксованих значеннях змінних, або прямому доданку такого зображення.

Розглянемо зображення $\sigma_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}$ співвідношень (6) з $\lambda_{12} = i$, що визначені формулами

$$\sigma_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-x_2} & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2 + e^{i\varphi_2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-x_1} & 0 \end{pmatrix} + e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для довільного набору $(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)$ знайдеться набір $(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2)$ такий, що

$$\sigma_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2} \sim \rho_{x_1,x_2,\psi_1,\psi_2}.$$

Обернене твердження також є правильним.

Покажемо, що будь-яке незвідне зображення співвідношень (6) еквівалентне зображенню, заданому операторами $a_1(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)$ та $a_2(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)$ при фіксованих значеннях змінних, або є прямим доданком такого зображення.

1. Очевидно, що

$$\pi_F(a_i) = a_i(0,0,0,0), \quad i = 1,2.$$

2. Тепер розглянемо серії $\pi^{(1)}_{x_2,\varphi_2}$ та $\pi^{(2)}_{x_1,\varphi_1}$. Для всіх $0 < x_2 < \dfrac{1}{2}$, $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$

$$\pi^{(1)}_{x_2,\varphi_2}(a_i) = a_i(0, x_2, 0, \varphi_2), \quad i = 1,2.$$

Через $T\colon \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ позначимо оператор транспозиції множників:

$$Tx \otimes y = y \otimes x, \quad x,\, y \in \mathbb{C}^2.$$

Нехай U є діагональною матрицею вигляду

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Тоді для всіх $0 < x_1 < \dfrac{1}{2}$, $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$

$$\pi^{(2)}_{x_1,\varphi_1}(a_i) = U^* T a_i(0, x_1, 0, \varphi_1) T U, \quad i = 1,2.$$

3. Для серій $\rho^{(1)}_{x_1,\varphi_1,\varphi_2}$ та $\rho^{(2)}_{x_2,\varphi_2,\varphi_1}$ маємо

$$\rho^{(1)}_{x_1,\varphi_1,\varphi_2}(a_i) = a_i\left(x_1, \frac{1}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right),$$

$$i = 1,2, \quad 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 \in [0, \pi), \quad \varphi_2 \in [0, 2\pi).$$

З рівностей

$$\rho^{(2)}_{x_2,\varphi_2,\varphi_1}(a_i) = \sigma_{1/2, x_2, \varphi_1, \varphi_2}(a_i),$$

$$i = 1,2, \quad 0 < x_2 < \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi), \quad \varphi_2 \in [0, \pi),$$

випливає, що для всіх $0 < x_2 < \dfrac{1}{2}$, $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in [0, \pi)$

$$\rho^{(2)}_{x_2,\varphi_2,\varphi_1}(a_i) \sim a_i\left(\frac{1}{2}, x_2, \psi_1, \psi_2\right), \quad i = 1,2,$$

при деяких $\psi_1, \psi_2 \in [0, 2\pi)$, що залежать від φ_1, φ_2.

4. Розглянемо серії $\delta^{(1)}_{\varphi_1}$ та $\delta^{(2)}_{\varphi_2}$. Позначимо через $V(\varphi)$ оператор

$$V(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & -e^{i\varphi/2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді для всіх $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$ будемо мати

$$T(\mathbf{1}_2 \otimes V^*(\varphi_2))a_i\left(0, \frac{1}{2}, 0, \varphi_2\right)(\mathbf{1}_2 \otimes V(\varphi_2))T =$$

$$= \delta^{(2)}_{\varphi_2/2}(a_i) \oplus \delta^{(2)}_{\varphi_2/2+\pi}(a_i), \quad i = 1, 2.$$

Позначимо $W(\varphi)\colon \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$,

$$W(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 & -e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & -e^{i\varphi/2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Тоді для всіх $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ одержимо

$$W^*(\varphi_1)a_i\left(\frac{1}{2}, 0, \varphi_1, 0\right) = \delta^{(1)}_{\varphi_1/2}(a_i) \oplus \delta^{(1)}_{\varphi_1/2+\pi}(a_i), \quad i = 1, 2.$$

5. Залишилось розглянути серію $\pi_{\varphi_1,\varphi_2}$. Позначимо через $\widetilde{U}(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, оператор

$$\widetilde{U}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Тоді для $i = 1, 2$ та всіх $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\widetilde{U}^*\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)(\mathbf{1}_2 \otimes V^*(2\varphi_2))a_i\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi_1}{2}, 2\varphi_2\right)(\mathbf{1}_2 \otimes V(2\varphi_2))\widetilde{U}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) =$$

$$= \pi_{\varphi_1,\varphi_2}(a_i).$$

Автори щиро вдячні професору Ю. С. Самойленку за увагу до цієї роботи.

1. *Marcinek W.* On commutation relations for quons // Rept. Math. Phys. – 1998. – **41**, № 2. – P. 155 – 172.
2. *Marcinek W., Ralowski R.* On Wick algebras with braid relations // J. Math. Phys. – 1995. – **36**, № 6. – P. 2803 – 2812.
3. *Proskurin D.* Stability of a special class of q_{ij}-CCR and extensions of higher-dimensional noncommutative tori // Lett. Math. Phys. – 2000. – **52**, № 2. – P. 165 – 175.
4. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras, I: Representations by bounded operators. – London: Gordon and Breach Publ. Group, 1999. – 261 p.
5. *Proskurin D., Savchuk Yu., Turowska L.* On C^*-algebras generated by some deformations of CAR relations // Noncommutative Geometry and Representation Theory in Math. Phys., Contemp. Math. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. – **391**. – P. 297 – 312.
6. *Albeverio S., Proskurin D., Turowska L.* On $*$-representations of a deformation of a wick analogue of the CAR algebra // Rept. Math. Phys. – 2005. – **56**, № 2. – P. 175 – 196.
7. *Каблучко З. Л., Проскурин Д. П., Самойленко Ю. С.* О C^*-алгебрах, порожденных деформациями CCR // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1813 – 1827.

Одержано 07.09.09