УДК 519.21

А. О. Погоруй (Житомир. ун-т)

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФАЗОВОГО УСЕРЕДНЕННЯ ПРОЦЕСУ ПЕРЕНОСУ

Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations of transport processes in the Markov medium and the semi-Markov medium are studied.

Исследуются асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений процессов переноса в марковской и полумарковской среде.

1. Вступ. Алгоритми фазового укрупнення марковських та напівмарковських процесів, а також фазового усереднення еволюційних систем дозволяють значно спростити аналіз складних систем, але при цьому виникають питання точності таких апроксимацій. Уперше асимптотичний аналіз у випадку напівмарковських процесів виконав В. С. Королюк, який запропонував метод, що дозволяв досліджувати асимптотичну поведінку часу перебування напівмарковського процесу в фіксованій множині станів [1 – 5]. Альтернативний метод для асимптотичного аналізу сингулярно збурених півгруп розробив А. Ф. Турбін [1, 6, 7].

Асимптотичний аналіз фазового усереднення напівмарковських еволюцій, що ґрунтується на методі В. С. Королюка, описано у [8 – 10]. У даній роботі такий метод використано для марковського випадку в п. 2, а в п. 3 для напівмарковського випадку запропоновано підхід з використанням результатів А. Ф. Турбіна. Такий підхід дає можливість записати коефіцієнти асимптотичного розкладу відразу в явній формі, оминаючи рекурсивні обчислення.

2. Асимптотичний розклад розв'язку сингулярно збуреного рівняння процесу переносу в марковському середовищі. Розглянемо у вимірному фазовому просторі $(E, \mathcal{F})$ марковський процес $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon > 0$, який задається напівмарковським ядром

$$Q(x, B, t) = P_\varepsilon(x, B)\left[1 - e^{-\lambda(x)t}\right], \quad x \in E, \quad B \in \mathcal{F}.$$

Імовірності переходу $P_\varepsilon(x, B)$ вкладеного ланцюга Маркова ξ_n^ε, $n \geq 0$, залежать від ε:

$$P_\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Далі припускаємо, що фазовий простір станів $(E, \mathcal{F})$ є зведеним і має вигляд

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad E_i \in \mathcal{F}, \quad E_i \bigcap E_j = \varnothing, \quad i \neq j,$$

а функція $P(x, B)$ є стохастичним ядром, яке визначає опорний вкладений ланцюг Маркова ξ_n, $n \geq 0$, у $(E, \mathcal{F})$, до того ж це ядро задовольняє умову
$$P(x, E_i) = \begin{cases} 1, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i. \end{cases}$$

Позначимо через $\mathcal{B}$ банаховий простір вимірних обмежених функцій на $(E, \mathcal{F})$ з супремум-нормою $\|\varphi\| = \sup_{x \in E} \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{B}$.

Будемо вимагати виконання умови

У$_1$) вкладений ланцюг Маркова ξ_n рівномірно ергодичний у кожному класі станів E_i, $i = 1, \ldots, k$, із стаціонарними розподілами

$$\rho_i(A) = \int\limits_{E_i} \rho_i(dx)\, P(x, A), \quad \rho_i(E_i) = 1.$$

У цьому випадку опорний марковський процес $\xi(t)$, $t \geq 0$, що задається породжуючим оператором

$$Q\varphi(x) = \lambda(x) \int\limits_E P(x, dy)\, \varphi(y) - \lambda(x)\, \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{B},$$

також має стаціонарний розподіл $\pi_i(A) = \int_A \lambda(x)\, \rho(dx)/\lambda_i$, де $\lambda_i = \int_{E_i} \lambda(x) \times \rho_i(dx)$, $i = 1, \ldots, k$.

Розглянемо оператор $\Pi\varphi = \sum_{i=1}^{k} \hat{\varphi}_i I_i(x)$, $\hat{\varphi}_i = \int_{E_i} \varphi(x)\, \pi_i(dx)$, $I_i(x)$ — індикатор множини E_i. Відомо [1], що Π — проектор на ядро $\ker(Q)$ оператора Q; неважко переконатись, що

$$\Pi Q = Q\Pi = 0.$$

У роботах [1, 5] доведено, що існує обмежений оператор $\boldsymbol{R}_0 = (Q + \Pi)^{-1} - \Pi$, який називається узагальненим потенціалом $\xi(t)$ і задовольняє умови

$$\Pi \boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{R}_0 \Pi = 0,$$

$$\boldsymbol{R}_0 Q = Q \boldsymbol{R}_0 = I - \Pi.$$

Запишемо оператор Q_ε у вигляді $Q_\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1$, де $Q_1\varphi(x) = \lambda(x) \int_E P_1(x, dy)\, \varphi(y)$ — оператор збурення. Неважко переконатись, що

$$\Pi Q_1 \Pi\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \hat{\varphi}_j \sum_{i=1}^{k} I_i(x)\, \lambda_i \int\limits_{E_i} P_1(x, E_j)\, \rho_i(dx).$$

Алгоритм укрупнення марковського процесу $\xi(t)$ задає укрупнений марковський процес $\hat{\xi}(t)$, $t \geq 0$, в укрупненому фазовому просторі станів $\hat{E} = \{1, 3, \ldots, k\}$, з породжуючою матрицею $\hat{Q} = \left[q_{ij},\, i, j \in \hat{E} \right]$, де $p_{ij} = \int_{E_i} P_1(x, E_j)\, \rho_i(dx)$, $q_{ij} = \lambda_i p_{ij}$, $i \neq j$, $q_{ii} = -\lambda_i$.

Розглянемо функцію $m: E \to \hat{E}$, $m(x) = i$, $x \in E_i$. За виконання умови У$_1$ має місце слабка збіжність [1, 5]

$$m\big(\xi_\varepsilon(t/\varepsilon)\big) \Rightarrow \hat{\xi}(t), \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Нехай функція $C(u, x)$, $u \in \mathbb{R}$, $x \in E$, задовольняє умову однозначної розв'язності еволюційного рівняння

$$\frac{du(t, x)}{dt} = C\big(u(t, x), x\big), \quad u(0, x) = u_0,$$

для кожного фіксованого $x \in E$. Крім того, будемо припускати, що існують обмежені похідні $\partial C(u, x)/\partial u$.

Розглянемо стохастичний процес переносу $u_\varepsilon(t)$ у марковському середовищі $\xi_\varepsilon(t)$, який визначається рівнянням

$$\frac{du_\varepsilon(t)}{dt} = C\big(u_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t/\varepsilon)\big), \quad u_\varepsilon(0) = u. \tag{1}$$

Алгоритм фазового укрупнення, застосований до динамічної системи (1), приводить до усереднення стохастичної системи [9 – 11]

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \hat{C}\Big(\hat{u}(t), \hat{\xi}(t)\Big), \quad \hat{u}(0) = u, \tag{2}$$

де $\hat{C}(u, i) = \int_{E_i} C(u, x)\pi_i(dx)$, тобто має місце слабка збіжність $u_\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(t)$, $\varepsilon \downarrow 0$.

Наша мета полягає у проведенні асимптотичного аналізу цієї збіжності.

Нехай $f(u, t)$ — нескінченно диференційовна по u і t функція. Розглянемо $f_i^\varepsilon(u, t) = E\big(f\big(u_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t/\varepsilon)\big) \,|\, u_\varepsilon(0) = u, \ \xi_\varepsilon(0) = i\big)$ і позначимо $\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t) = \Big\{f_i^\varepsilon(u, t), i \in E\Big\}$. Відомо [1 – 3, 8, 9], що $\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t) = \frac{1}{\varepsilon}(Q + \varepsilon Q_1)\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t) + \mathbb{C}(u)\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t), \tag{3}$$

де $\mathbb{C}(u) = \operatorname{diag}\left[C(u, i)\frac{\partial}{\partial u}, i \in E\right]$.

Для знаходження асимптотичного розкладу для розв'язку (3) скористаємось методом, описаним, наприклад, в [1 – 5, 8], згідно з яким $\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t)$ зображується у вигляді

$$\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t) = \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\Big(\boldsymbol{f}^{(n)}(u, t) + \boldsymbol{g}^{(n)}(u, t/\varepsilon)\Big). \tag{4}$$

Доданки $\boldsymbol{f}^{(n)}(u, t)$ будемо називати регулярними, а $\boldsymbol{g}^{(n)}(u, t/\varepsilon)$ — сингулярними. Підставляючи розклад (4) для $\boldsymbol{f}^\varepsilon(u, t)$ у формулу (3), отримуємо для регулярних членів систему рівнянь

$$\begin{gathered} Q\boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{f}^{(k)}(u, t) = Q\boldsymbol{f}^{(k+1)}(u, t) + Q_1\boldsymbol{f}^{(k)}(u, t) + \mathbb{C}(u)\boldsymbol{f}^{(k)}(u, t), \\ k = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{5}$$

Для сингулярних членів розкладу (4) маємо

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{g}^{(1)}(u, \tau) = Q\boldsymbol{g}^{(1)}(u, \tau), \\ \frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{g}^{(k+1)}(u, \tau) = Q\boldsymbol{g}^{(k+1)}(u, \tau) + Q_1\boldsymbol{g}^{(k)}(u, \tau) + \mathbb{C}(u)\boldsymbol{g}^{(k)}(u, \tau), \\ k = 1, 2, 3, \ldots. \end{gathered} \tag{6}$$

Із першого рівняння системи (5) випливає, що $\boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) \in \ker(Q)$. Звідси одержуємо

$$\Pi\boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) = \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t). \tag{7}$$

Із системи (5) з урахуванням (7) при $k = 0$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) = \Pi Q_1 \Pi \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) + \Pi \mathbb{C}(u) \Pi \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t). \tag{8}$$

Тут ми скористались тим, що $\Pi Q \boldsymbol{f}^{(1)}(u, t) = 0$.

Неважко переконатись, що оператор $\Pi Q_1 \Pi + \Pi \mathbb{C}(u) \Pi$ із правої частини (8) є інфінітезимальним оператором двокомпонентного процесу $\zeta(t) = \Big(\hat{u}(t), \hat{\xi}(t)\Big)$, де $\hat{u}(t)$ описується рівнянням (2), $\hat{\xi}(t)$ — укрупнений марковський процес. Отже, розв'язком (8) є півгрупа операторів, що породжена марковським процесом $\zeta(t)$.

Із (8) при $k = 0$ випливає

$$\boldsymbol{f}^{(1)}(u, t) = -\Big(\boldsymbol{R}_0 Q_1 \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) + \boldsymbol{R}_0 \mathbb{C}(u) \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t)\Big) + r^{(1)}(u, t), \tag{9}$$

де $r^{(1)}(u, t) \in \ker(Q)$.

Використовуючи рівняння (9), із (5) отримуємо рекурентне співвідношення у вигляді системи рівнянь

$$\boldsymbol{f}^{(k)}(u, t) = \boldsymbol{R}_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{f}^{(k-1)}(u, t) - Q_1 \boldsymbol{f}^{(k-1)}(u, t) - \mathbb{C}(u) \boldsymbol{f}^{(k-1)}(u, t) \right) + $$
$$+ \; r^{(k)}(u, t),$$
$$r^{(k)}(u, t) \in \ker(Q), \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{10}$$

Із (10) $\boldsymbol{f}^{(k)}$ визначаються рекурентно з точністю до доданків $r^{(k)}(u, t) \in$ $\in \ker(Q)$.

Рівняння $\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{f}^{(k)}(u, t) = Q \boldsymbol{f}^{(k+1)}(u, t) + Q_1 \boldsymbol{f}^{(k)}(u, t) + \mathbb{C}(u) \boldsymbol{f}^{(k)}(u, t)$ множимо на проектор Π зліва і з урахуванням (10) одержуємо рівняння для $r^{(k)}(u, t)$, а саме,

$$\frac{\partial}{\partial t} r^{(k)}(u, t) = \Pi Q_1 \Pi \boldsymbol{r}^{(k)}(u, t) + \Pi \mathbb{C}(u) \Pi \boldsymbol{r}^{(k)}(u, t), \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Вибір $r^{(k)}(u, t)$, $k = 1, 2, \ldots,$ узгоджується з граничною умовою (1).

Щодо сингулярних членів розкладу (4), то із (6) маємо

$$\boldsymbol{g}^{(1)}(u, t/\varepsilon) = \boldsymbol{g}^{(1)}(u, 0) \big(\exp(Qt/\varepsilon) - \Pi\big). \tag{11}$$

Тут ми скористались тим, що для рівномірно ергодичного марковського процесу $\lim_{t \to +\infty} \exp(Qt) = \Pi$ [1, 5, 12].

Отже, в цьому випадку $\boldsymbol{g}^{(1)}(u, t/\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Далі, розв'язуючи рівняння (6) для $k > 1$, отримуємо рекурентне співвідношення

$$\boldsymbol{g}^{(k+1)}(u, t/\varepsilon) = \boldsymbol{g}^{(k+1)}(u, 0) \big(\exp(Qt/\varepsilon) - \Pi\big) +$$
$$+ \int_0^{t/\varepsilon} \Big(\exp\big(Q(t/\varepsilon - s)\big) - \Pi\Big)\big(Q_1 + \mathbb{C}(u)\big) \boldsymbol{g}^{(k)}(u, s)\, ds .$$

Позначимо

$$\boldsymbol{f}_N^{\varepsilon}(u, t) \;=\; \boldsymbol{f}^{(0)}(u, t) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n\Big(\boldsymbol{f}^{(n)}(u, t) + \boldsymbol{g}^{(n)}(u, t/\varepsilon)\Big).$$

Оцінку для залишкового члена асимптотичного розкладу (4) встановлено в [1, 8]:

$$\Big\|\boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}(u, t) - \boldsymbol{f}_N^{\varepsilon}(u, t)\Big\| \;\le\; C\varepsilon^{N+1}.$$

Зауваження. Інколи, наприклад для еволюцій руху частинки, нас більше цікавить розподіл не $\boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}(u, t)$, а $f^{(\varepsilon)}(u, t) = \boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}(u, t)\mathbb{I} = \sum_{i \in E} f_i^{\varepsilon}(u, t)$. З вигляду $\boldsymbol{g}^{(k)}(u, t/\varepsilon)$ неважко переконатись, що $g^{(n)}(u, t/\varepsilon) = \boldsymbol{g}^{(n)}(u, t/\varepsilon)\mathbb{I} = \sum_{i \in E} g_i^{(n)}(u, t) = 0$.

Отже, асимптотичний розклад для $f^{(\varepsilon)}(u, t)$ містить лише регулярні члени.

3. Асимптотичний розклад розв'язку сингулярно збуреного рівняння процесу переносу в напівмарковському середовищі. У статті [8] проведено асимптотичний аналіз для фазового укрупнення напівмарковських випадкових еволюцій. У даному пункті ми пропонуємо інший підхід для дослідження цієї задачі.

Розглянемо випадок, коли $\xi_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, — напівмарковський процес у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon > 0$, який задається на фазовому просторі станів $(E, \mathcal{F})$ напівмарковським ядром

$$Q(x, B, t) \;=\; P_\varepsilon(x, B)\, G_x(t), \quad B \in \mathcal{F},$$

де, як і у марковському випадку, $P_\varepsilon(x, dy) = P(x, dy) + \varepsilon P_1(x, dy)$ — ймовірності переходу вкладеного ланцюга Маркова ξ_n^{ε}, $n \ge 0$, а $G_x(t)$ — функція розподілу часу перебування $\xi_\varepsilon(t)$ у стані x.

За таких умов процес переносу $u_\varepsilon(t, x)$, що описується рівнянням (1), є випадковою еволюцією у напівмарковському середовищі $\xi_\varepsilon(t)$ [8 – 13].

Позначимо $g(t) = \{g_x(t), x \in E\}$, $M_1 h(x) = m_x h(x)$, $M_1^{-1} h(x) = \dfrac{h(x)}{m_x}$, $M_k h(x) = m_x^{(k)} h(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

У подальшому будемо вимагати виконання умов:

У$_2$) опорний марковський процес $\xi_0(t)$ рівномірно ергодичний, тобто існує оператор $\Pi \ne 0$ такий, що

$$\lim_{t \to \infty} L_0(u) \;=\; 0,$$

де $L_0(u) = \Psi(t) - \Pi$, $\Psi(t)\, h(x) = \int_E P\big(\xi_0(t) \in dy / \xi_0(0) = x\big)\, h(y)$;

У$_3$) існують щільності $g_x(t) = \dfrac{d}{dt} G_x(t)$ і момент $m_x = \int_0^{+\infty} t g_x(t)\, dt$, $m_x^{(2)} = \int_0^{+\infty} t^2 g_x(t)\, dt$, $m_x^{(3)} = \int_0^{+\infty} t^3 g_x(t)\, dt$, для всіх $x \in E$;

У$_4$) оператори M_1, M_1^{-1}, M_2, M_3 обмежені й існує

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t u R_0(u) \;=\; du \;=\; R_1, \quad \| R_1 \| < \infty,$$

де $R_0(u) = R(u) - M_1^{-1}$, $R(u) = g(t) + g^2(t) + g^3(t) + \ldots$, $g^{(k)}(t) = \int_0^\infty g^{(k-1)}(s) g(t-s)\, ds$.

Позначимо $r_x(t) = \dfrac{g_x(t)}{1 - G_x(t)}$, $\tau_\varepsilon(t) = t - \sup\{u \le t : \xi_\varepsilon(u) \ne \xi_\varepsilon(t)\}$.

Відомо, що трикомпонентний процес $\zeta_\varepsilon(t) = \big(u_\varepsilon(t, x), \xi_\varepsilon(t/\varepsilon), \tau_\varepsilon(t/\varepsilon)\big)$ є марковським на фазовому просторі $\mathbb{R} \times E \times [0, \infty)$ з інфінітезимальним оператором

$$A_\varepsilon \varphi(u, x, \tau_\varepsilon) \;=\; C(u, x) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, x, \tau_\varepsilon) \;+$$

$$+\; \frac{1}{\varepsilon} r_x(\tau_\varepsilon) \left[P_\varepsilon \varphi(u, x, 0) - \varphi(u, x, \tau_\varepsilon) \right] \;+\; \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau_\varepsilon} \varphi(u, x, \tau_\varepsilon),$$

де $P_\varepsilon \varphi(u, z, 0) = \int_E P_\varepsilon(z, dy)\, \varphi(u, y, 0)$, а $\varphi(u, z, \tau)$ — неперервно диференційовна по u і τ функція з обмеженими похідними [1, 5, 12].

Отже, обернене рівняння Колмогорова для процесу $\zeta_\varepsilon(t)$ має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon) \;=\; A_\varepsilon \varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon) \;=$$

$$=\; C(u, x) \frac{\partial}{\partial u} \varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} r_x(\tau_\varepsilon) \left[P_\varepsilon \varphi_\varepsilon(t, u, x, 0) - \varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon) \right] \;+$$

$$+\; \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon), \tag{12}$$

$$\varphi_\varepsilon(0, u, x, \tau_\varepsilon) = \varphi_\varepsilon^{(0)}.$$

Тут $\varphi_\varepsilon(t, u, z, \tau)$ — неперервно диференційовна по t, u і τ функція з обмеженими похідними.

Позначимо через $U_\varepsilon(t)\varphi_\varepsilon^{(0)} = \varphi_\varepsilon(t, u, z, \tau)$ півгрупу операторів марковського процесу $\zeta_\varepsilon(t)$. Далі, $\big(\xi_\varepsilon(t/\varepsilon), \tau_\varepsilon(t/\varepsilon)\big)$ також є марковським процесом з інфінітезимальним оператором $Q_\varepsilon \varphi(x, \tau_\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon} r_x(\tau_\varepsilon) \left[P_\varepsilon \varphi(x, 0) - \varphi(x, \tau_\varepsilon) \right] + \dfrac{1}{\varepsilon} \dfrac{\partial}{\partial \tau_\varepsilon} \varphi(x, \tau_\varepsilon)$. Для нього обернене рівняння Колмогорова має вигляд [1, 5, 13]

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\varepsilon(t, x, \tau_\varepsilon) \;=\; Q_\varepsilon \varphi_\varepsilon(t, x, \tau_\varepsilon) \;=$$

$$=\; \frac{1}{\varepsilon} r_x(\tau_\varepsilon) \left[P_\varepsilon \varphi_\varepsilon(t, x, 0) - \varphi(t, x, \tau_\varepsilon) \right] \;+\; \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t, x, \tau_\varepsilon), \tag{13}$$

$$\varphi_\varepsilon(0, x, \tau_\varepsilon) = \tilde{\varphi}_\varepsilon^{(0)},$$

де $\varphi(t, x, \tau)$ — неперервно диференційовна по t і τ функція з обмеженими похідними.

Розв'язок рівняння (13) є півгрупою операторів $T_\varepsilon(t)\tilde{\varphi}_\varepsilon^{(0)} = \varphi_\varepsilon(t, x, \tau_\varepsilon)$ з інфінітезимальним оператором $Q_\varepsilon(x, \tau_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} r_x(\tau_\varepsilon) \left[P_\varepsilon \varphi_\varepsilon(x, 0) - \varphi_\varepsilon(x, \tau_\varepsilon) \right] + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x, \tau_\varepsilon)$.

Зауважимо, що при фіксованому t оператор $T_\varepsilon(t)$ діє по змінних x, τ_ε. Будемо позначати $T_\varepsilon(t)\, \varphi_\varepsilon(0, u, x, \tau_\varepsilon) = \varphi_\varepsilon^1(t, u, x, \tau_\varepsilon)$. Неважко переконатись, що

$$\frac{\partial}{\partial t} T_\varepsilon(t)\, \varphi_\varepsilon(0, u, x, \tau_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} r_x(\tau_\varepsilon) \left[P_\varepsilon \varphi_\varepsilon(t, u, x, 0) - \varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon) \right] + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon).$$

Розв'язок рівняння $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, u, x, \tau_\varepsilon) - C(u, x) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(t, u, x, \tau_\varepsilon) = 0$ також є півгрупою операторів [8 – 10], яку ми позначимо через $V(t)\varphi^{(2)}(0, u, x, \tau_\varepsilon) = \varphi^{(2)}(t, u, x, \tau_\varepsilon)$.

Неважко перевірити, що розв'язок рівняння (12) можна подати у вигляді

$$\varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon) = \varphi_\varepsilon^{(1)}(t, u, x, \tau_\varepsilon)\, \varphi^{(2)}(t, u, x, \tau_\varepsilon). \tag{14}$$

Тобто $U_\varepsilon(t)\varphi_\varepsilon^{(0)} = T_\varepsilon(t)\varphi_\varepsilon^{(1)}(0, u, x, \tau_\varepsilon)\; V(t)\varphi^{(2)}(0, u, x, \tau_\varepsilon)$, де $\varphi_\varepsilon^{(0)} = \varphi_\varepsilon^{(1)}(0, u, x, \tau_\varepsilon)\; \varphi^{(2)}(0, u, x, \tau_\varepsilon)$. Для напівгрупи $T_\varepsilon(t)$, а отже і для $\varphi_\varepsilon^{(1)}(t, u, x, \tau_\varepsilon)$, асимптотичний розклад [1, 6] є відомим. Позначимо $A_1 = -\Pi M_1^{-1} P_1 \Pi$, $\boldsymbol{R}_0 = \left(M_1^{-1}(P_0 - I) + \Pi \right)^{-1} - \Pi$.

При виконанні умов У$_1$ – У$_4$ має місце асимптотичний розклад [1, 6]

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(t) = {} & e^{A_1 t}\Pi + \varepsilon \Bigg[\boldsymbol{R}_0 M_1^{-1} P_1 e^{A_1 t}\Pi + \left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-1} - M_1 \right) (I - \Pi)\, M_1^{-1} P_1 e^{A_1 t} \Pi - \\ & - e^{A_1 t}\Pi \left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-2} - I \right) P_1 \Pi - \int_0^t e^{A_1 (t-u)} \Pi \left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-2} - I \right) P_1 e^{A_1 t} \Pi\, du - \\ & - \int_0^t e^{A_1 (t-u)} \Pi M_1^{-1} P_1 \left(\boldsymbol{R}_0 + \left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-1} - M_1 \right) (I - \Pi) \right) M_1^{-1} P_1 e^{A_1 u} \Pi\, du \Bigg] + \\ & + \varepsilon \Bigg[\int_{t/\varepsilon}^{\infty} L_0(u)\, \Pi M_1^{-1} e^{A_1 t} \Pi\, du + \int_{t/\varepsilon}^{\infty} e^{A_1 t} \Pi R_0(u)\, P_1\, \Pi\, du + \\ & + \int_0^t \int_{u/\varepsilon}^{\infty} e^{A_1 (t-u)} \Pi R_0(u) P_1 A_1 e^{A_1 u}\, \Pi\, du - \end{aligned}$$

$$- \int_0^t \int_{u/\varepsilon}^{\infty} e^{A_1(t-u)} \Pi M_1^{-1} P_1 L_0(u) M_1^{-1} P_1 e^{A_1 u} \Pi \, du \Bigg] + O(\varepsilon^2)$$

рівномірно по $t \in [\delta, T], 0 < \delta < T < +\infty$.

Звідси одержуємо асимптотичний розклад для $\varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon)$.

Теорема. *Нехай крім умов* $У_1 – У_4$ *виконується умова*

$У_5$) *функція* $C(u, s)$ *така, що рівняння* $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, u, x, \tau_\varepsilon) - C(u, x)\frac{\partial}{\partial u}\varphi(t, u, x, \tau_\varepsilon) = 0$ *має обмежений розв'язок* $V(t)\varphi^{(2)}(0, u, x, \tau_\varepsilon) = \varphi^{(2)}(t, u, x, \tau_\varepsilon)$ *на* $[0, T]$. *Тоді рівномірно по* $t \in [\delta, T], 0 < \delta < T < +\infty$,

$$\varphi_\varepsilon(t, u, x, \tau_\varepsilon) = T_\varepsilon(t)\varphi_\varepsilon^{(1)}(0, u, x, \tau_\varepsilon) V(t)\varphi^{(2)}(0, u, x, \tau_\varepsilon) =$$

$$= e^{A_1 t}\Pi V(t)\varphi_\varepsilon^{(0)} + \varepsilon\Bigg[\boldsymbol{R}_0 M_1^{-1} P_1 e^{A_1 t}\Pi + \left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-1} - M_1\right)(I - \Pi) \times$$

$$\times M_1^{-1} P_1 e^{A_1 t}\Pi - e^{A_1 t}\Pi\left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-2} - I\right) P_1 \Pi -$$

$$- \int_0^t e^{A_1(t-u)}\Pi\left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-2} - I\right) P_1 e^{A_1 t}\Pi \, du - \int_0^t e^{A_1(t-u)}\Pi M_1^{-1} P_1 \times$$

$$\times \left(\boldsymbol{R}_0 + \left(\frac{1}{2} M_2 M_1^{-1} - M_1\right)(I - \Pi)\right) M_1^{-1} P_1 e^{A_1 u}\Pi \, du \Bigg] V(t)\varphi_\varepsilon^{(0)} +$$

$$+ \varepsilon\Bigg[\int_{t/\varepsilon}^{\infty} L_0(u)\Pi M_1^{-1} e^{A_1 t}\Pi \, du + \int_{t/\varepsilon}^{\infty} e^{A_1 t}\Pi R_0(u) P_1 \Pi \, du +$$

$$+ \int_0^t \int_{u/\varepsilon}^{\infty} e^{A_1(t-u)}\Pi R_0(u) P_1 A_1 e^{A_1 u}\Pi \, du -$$

$$- \int_0^t \int_{u/\varepsilon}^{\infty} e^{A_1(t-u)}\Pi M_1^{-1} P_1 L_0(u) M_1^{-1} P_1 e^{A_1 u}\Pi \, du \Bigg] V(t)\varphi_\varepsilon^{(0)} + O(\varepsilon^2).$$

Зауважимо, що перший член $e^{A_1 t}\Pi V(t)$ цього розкладу відповідає усередненій марковській еволюції алгоритму фазового усереднення процесу $\xi_\varepsilon(t)$.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 220 с.
2. *Королюк В. С., Пенев И. П., Турбин А. Ф.* Асимптотическое разложение для распределений времени поглощения цепи Маркова // Кибернетика. – 1973. – **4**. – С. 133 – 135.
3. *Королюк В. С., Таджиев А.* Асимптотическое разложение для распределения времен поглощения полумарковского процесса // Докл. АН УССР. – 1977. – № 12. – С. 133 – 135.
4. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. – Киев: Наук. думка, 1981. – 234 с.
5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – Киев: Наук. думка, 1982. – 234 с.

6. *Турбин А. Ф., Левинский Б. Г.* Метод асимптотического анализа полумарковских процессов в схеме фазового укрупнения // Аналитические методы в теории вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 133 – 147.
7. *Турбин А. Ф.* Предельные теоремы для возмущенных полугрупп и марковских процессов в схеме асимптотического фазового укрупнения. – Киев, 1981. – С. 133 – 147. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 80.18).
8. *Albeverio S., Koroliuk V., Samoilenko I.* Asymptotic expansion of semi-Markov random evolutions. – Bonn, 2006. – 26 p. – Preprint № 277, SFB611.
9. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Sci. Publ., 2005. – 330 p.
10. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
11. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Kluwer Acad. Publ., 1999. – 183 p.
12. *Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. М., Турбин А. Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 276 с.
13. *Pinsky M. A.* Lectures on random evolution. – New Jersey: World Sci. Publ., 1991. – 136 p.

Одержано 12.02.09,
після доопрацювання — 19.11.09