УДК 517.9

В. И. Савкин, канд физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

КРИТЕРИЙ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ БАНАХОВА МНОГООБРАЗИЯ

The results obtained in [1] are extended to the case of arbitrary Banach spaces and manifolds. An example of a continuous bijective mapping which differs from the identical mapping only on the open unit ball and has a discontinuous inverse in a Banach space, is given. A criterion for a Banach manifold be finite – dimensional is obtained in terms of continuity of inverse mapping.

Результати, які одержані в роботі [1], розповсюджуються на випадок довільних банахових просторів і многовидів. Наведено приклад неперервного бієктивного відображення з розривним оберненим, яке діє у банаховому просторі і відрізняється від тотожного лише у відкритій одиничній кулі. Одержано критерій скінченномірності банахового многовиду в термінах неперервності обернених операторів.

Здесь мы будем пользоваться той же терминологией, что и в статье [1]. Следующее утверждение является обобщением основного результата из упомянутой выше работы.

Лемма. *В любом бесконечномерном гильбертовом пространстве H действует непрерывное биективное отображение χ_r, $r > 0$, имеющее свойства:*

а) $\chi_r(\theta) = \theta$;

б) $\chi_r(x) = x \;\; \forall x \in H \setminus S_r(\theta)$, *где* $S_r(\theta) = \{x \in H : \|x\| < r\}$;

в) χ_r^{-1} *разрывно в нуле.*

Доказательство. Выберем в H бесконечномерное замкнутое сепарабельное подпространство H_0 (если H является сепарабельным пространством, то в качестве H_0 возьмем H). Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве H_0, $P : H \to H_0$ — ортопроектор пространства H на H_0, I — тождественный оператор в H. Положим $x_k = (x, e_k)$, $k \in N \;\; \forall x \in H$. Тогда в этих обозначениях оператор χ_r определим следующим образом:

$$\chi_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{rn}(\|x\|) x_n e_n + (I - P)(x),$$

где

$$q_{rn}(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta \le 0; \\ \dfrac{2}{r(n+1)}\eta, & \text{если } 0 \le \eta \le r/2; \\ \dfrac{2n}{r(n+1)}\eta - \dfrac{n-1}{n+1}, & \text{если } r/2 \le \eta \le r; \\ 1, & \text{если } \eta \ge r \quad \forall n \in N. \end{cases}$$

Проверка свойств отображения χ_r осуществляется аналогично проверке свойств отображения χ в статье [1].

Лемма доказана.

Следствие. *В любом бесконечномерном гильбертовом пространстве H действует непрерывное биективное отображение $\chi_r^{x_0}$, $r > 0$, $x_0 \in H$, имеющее следующие свойства:*

а) $\chi_r^{x_0}(x_0) = x_0$;

б) $\chi_r^{x_0}(x_0) = x$ *для любого* $x \in H \setminus S_r(x_0)$, *где*

© В. И. САВКИН, 1995

$$S_r(x_0) = \{x \in H : \|x - x_0\| < r\};$$

в) $\left(\chi_r^{x_0}\right)^{-1}$ *разрывно в точке* x_0.

Действительно, пусть $x_0 \in H$ и $\varphi_{x_0}(x) = x - x_0$ для любого $x \in H$. Тогда в качестве $\chi_r^{x_0}$ можно взять отображение $\varphi_{x_0}^{-1}\chi_r\varphi_{x_0}$.

Символом $S(X)$ будем обозначать плотность топологического пространства X, т. е. наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями всюду плотных в X множеств.

Теорема 1. *Пусть E — бесконечномерное банахово пространство. Тогда для любого топологического E-многообразия X существует непрерывное биективное отображение A, действующее в этом многообразии, такое, что обратное отображение A^{-1} не является непрерывным.*

Доказательство. В силу результатов Г. Торунчика [2] существует гильбертово пространство H с плотностью $S(E)$, гомеоморфное пространству E. Следовательно, можно считать, что моделью для многообразия X служит гильбертово пространство H. Пусть x_0 — произвольная точка из X; существует открытая окрестность $W(x_0)$ этой точки и гомеоморфизм $\psi_{x_0} : W(x_0) \to H$, $\psi_{x_0}(x_0) = y_0$ этой окрестности на H. Тогда легко видеть (см. [3, с. 113], теорема 3), что искомым отображением будет любое отображение, определяемое формулой

$$A_r^{x_0}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in X \setminus \psi_{x_0}^{-1}[S_r(y_0)]; \\ \psi_{x_0}^{-1}\chi_r^{y_0}\psi_{x_0}(x), & \text{если } x \in \psi_{x_0}^{-1}[S_r(y_0)], \end{cases}$$

где $\chi_r^{y_0}$ — отображение из следствия леммы.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Топологическое E-многообразие X, моделью для которого служит банахово пространство E, будет конечномерным тогда и только тогда, когда для всякого непрерывного биективного отображения $A : X \to X$, действующего в X, обратное отображение A^{-1} является также непрерывным отображением.*

Доказательство следует из леммы 1 работы [1] и теоремы 1.

1. *Савкин В. И.* Критерий конечномерности банахова многообразия с сепарабельной моделью // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1099–1103.
2. *Torunczyk H.* Characterizing Hilbert space topology // Fund. math. – 1981. – **111**, № 3. – P. 247–262.
3. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 596 с.

Получено 30.11.94