УДК 517.5

С. А. Пичугов, д-р физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

АППРОКСИМАЦИЯ СЖАТИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p, $p<1$*

Behavior of the best approximation of function compressions by trigonometric polynomials in $L_p, p<1$, is investigated.

Досліджується поведінка найкращого наближення стисків функцій тригонометричними поліномами у просторі $L_p, p<1$.

1. В теории приближения функций доказано ряд утверждений, показывающих, что если функция имеет некоторую симметрию, то и ее наилучшее приближение в нормированных пространствах реализуется на элементах, наследующих эту симметрию (см., например, [1]). Пусть, например, измеримая функция $f(x)$ из нормированного пространства $L_p[-1, 1]$, $1 \le p < \infty$, является четной или нечетной. Известно, что тогда ее наилучшее приближение полиномами заданной степени реализуется на множестве соответственно четных или нечетных полиномов.

Остается ли верным упомянутое свойство „сохранения симметрии" при аппроксимации в линейных метрических пространствах, если они ненормируемы?

Приведем пример, показывающий, что это, вообще говоря, не так.

Рассмотрим наилучшее приближение функции $f(x)=|x|$, $x \in [-1, 1]$, в пространстве $L_p[-1, 1]$, $0<p<1$, с метрикой

$$\rho(f, g)_p = \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^p \, dx$$

алгебраическими полиномами первой степени $Q_1(x)=ax+b$:

$$E_1(|x|)_p = \inf_{Q_1} \rho(|x|, Q_1)_p.$$

Допустим, что для приближения этой четной функции достаточно ограничиться только четными полиномами. Но четный полином первой степени может быть только константой. Значит,

$$E_1(|x|)_p = \inf_{\{Q_1 : Q_1(-x)=Q_1(x)\}} \rho(|x|, Q_1)_p = \inf_c \rho(|x|, c)_p =: E_0(|x|)_p.$$

Для вычисления $E_0(|x|)_p$ заметим, что достаточно ограничиться случаем $c \in [0, 1]$. Тогда

$$E_0(|x|)_p = 2 \inf_{0\le c\le 1} \left(\int_0^c (c-x)^p \, dx + \int_c^1 (x-c)^p \, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{p+1} \inf_{0\le c\le 1} (c^{p+1} + (1-c)^{p+1}) = \frac{2}{p+1} \left(\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} \right) = \frac{2^{1-p}}{p+1}.$$

Таким образом, из нашего предположения следует

$$E_1(|x|)_p = E_0(|x|)_p = \frac{2^{1-p}}{p+1}. \tag{1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

С другой стороны, для оценки сверху величины $E_1(|x|)_p$ выберем в качестве приближающего нечетный полином $Q_1(x)=x$:

$$E_1(|x|)_p \le \rho(|x|, x)_p = \int_0^1 (2x)^p dx = \frac{2^p}{p+1}. \tag{2}$$

Однако в случае $p \in (0, 1/2)$ соотношения (1) и (2) противоречивы.

Причиной такого различия в свойствах аппроксимации в нормированных L_p-пространствах, $p \ge 1$, и в метрических L_p-пространствах, $p \in (0, 1)$, является тот факт, что соответствующие операторы усреднения в случае $p \ge 1$ имеют единичную норму, а при $p < 1$ их норма больше единицы. Например, легко видеть, что оператор A, $(Af)(x) = 2^{-1}(f(x)+f(-x))$, имеет нормы

$$\| A : L_p[-1, 1] \to L_p[-1, 1] \| = 1, \quad p \ge 1,$$

$$\| A : L_p[-1, 1] \to L_p[-1, 1] \| = 2^{1-p}, \quad p \in (0, 1).$$

2. В дальнейшем функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, предполагаем измеримыми, 2π-периодическими. Рассмотрим их приближение в метрике $L_p[-\pi, \pi]$, $0 < p < 1$, тригонометрическими полиномами $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ степени не выше n:

$$E_n(f_p) := \inf_{T_n} \| f - T_n \|_p = \inf_{\{c_k\}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right|^p dx.$$

В случае приближения в нормированных пространствах $L_p[-\pi, \pi]$, $p \ge 1$, часто оказывается полезным следующий вариант свойства „сохранения симметрии"; если функция f является $2\pi/n$-периодической, то и ее полином наилучшего приближения имеет период $2\pi/n$. В частности,

$$E_{n-1}(f(n\cdot))_p = E_0(f(\cdot))_p, \quad p \ge 1. \tag{3}$$

Это соотношение является полезным для оценок снизу точных констант в теоремах Джексона [2].

Покажем, что при аппроксимации в метрических пространствах $L_p[-\pi, \pi]$, $0 < p < 1$, остается верным некоторый ослабленный вариант соотношения типа (3). Через $\Delta_t T(x)$ обозначим разность функции $T(x)$ с шагом t: $\Delta_t T(x) = T(x+t/2) - T(x-t/2)$.

Теорема. *Пусть $p \in (0, 1)$. Тогда для любой функции $f \in L_p[-\pi, \pi]$ и любых натуральных l и n выполняются неравенства*

$$E_0(f(\cdot))_p - \sup_{\{T_l : \|T_l\|_p \le 2E_0((\cdot))_p\}} \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} \| \Delta_t T_l \|_p dt \le E_l(f(n\cdot))_p \le E_0(f(\cdot))_p. \tag{4}$$

Доказательство. Правое неравенство очевидно:

$$E_l(f(n\cdot))_p \le E_0(f(n\cdot))_p = \inf_c \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(nx) - c|^p dx =$$

$$= \inf_c \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - c|^p dx = E_0(f(\cdot))_p.$$

Докажем левое неравенство. Пусть заданы n и l и $T_l \equiv T$ — полином степени l наилучшего приближения функции $f(n\cdot)-c$, где c — константа наилучшего приближения $f(n\cdot)$. Тогда

$$\|T_l\|_p \le \|T_l - f(n\cdot)-c\|_p + \|f(n\cdot)-c\|_p =$$
$$= E_l(f(n\cdot))_p + E_0(f(n\cdot))_p \le 2E_0(f(n\cdot))_p.$$

Для точек периода $x_k = k2\pi/n$, $k = 0, \ldots, n-1$, рассмотрим их сдвиг $x_k + t$ на произвольный параметр t и по значениям $T(x_k+t)$ определим 2π-периодическую кусочно-постоянную функцию $S_t(x)$: для $x \in [x_k+t, x_{k+1}+t)$ положим $S_t(x) = T(x_k+t)$. Оценим снизу уклонение $f(nx)$ от $S_t(x)$:

$$\|f(n\cdot)-S_t(\cdot)\|_p = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{x_k+t}^{x_{k+1}+t}|f(nx)-T(x_k+t)|^p\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi n}\int_{2k\pi+nt}^{2(k+1)\pi+nt}|f(y)-T(x_k+t)|^p\,dy \ge \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}E_0(f(\cdot))_p = E_0(f(\cdot))_p. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим уклонение S_t от T, усредненное по всевозможным сдвигам t:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|S_t-T\|_p\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{x_k+t}^{x_{k+1}+t}|T(x_k+t)-T(x)|^p\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/n}|T(t+x_k)-T(t+x_k+y)|^p\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|T(t+x_k)-T(t+x_k+y)|^p\,dy\,dt = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi/n}\|\Delta_y T\|_p\,dy.$$

Отсюда следует, что найдется сдвиг t_1 такой, что

$$\|S_{t_1}-T_l\|_p \le \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi/n}\|\Delta_y T_l\|_p\,dy. \tag{6}$$

Тогда из (5) и (6) вытекает

$$E_l(f(n\cdot))_p = \|f(n\cdot)-T_l(\cdot)\|_p \ge \|f(n\cdot)-S_{t_1}(\cdot)\|_p - \|S_{t_1}(\cdot)-T_l(\cdot)\|_p \ge$$

$$\ge E_0(f(\cdot))_p - \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi/n}\|\Delta_y T_l\|_p\,dy,$$

откуда следует (4).

***Следствие* 1.** *Для любой функции f из $L_p[-\pi,\pi]$, $0<p<1$, и последовательности номеров l_n такой, что $l_n = o(n)$, $n\to\infty$, у последовательности $E_{l_n}(f(n\cdot))_p$ существует предел и выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} E_{l_n}(f(n\cdot))_p = E_0(f(\cdot))_p. \tag{7}$$

Доказательство. Используем неравенство С. Н. Бернштейна для операторов приращения в метрике L_p, $p\in(0,1)$ [3, 4]: $\|\Delta_t T_n\|_p \le (c_1 n|t|)^p\|T_n\|_p$, где константа c_1 зависит лишь от p.

Тогда

$$\sup_{\left\{T_{l_n}:\ \|T_{l_n}\|_p \le 2E_0(f(\cdot))_p\right\}} \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} \|\Delta_y T_{l_n}\|_p dy \le$$

$$\le \sup_{\left\{T_{l_n}:\ \|T_{l_n}\|_p \le 2E_0(f(\cdot))_p\right\}} \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} c_1^{1-p} l_n y^p \|T_{l_n}\|_p dy \le c_2 E_0(f(\cdot))_p \frac{l_n}{n^p} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

так как константы c_1, c_2 не зависят от n. Теперь (7) получается предельным переходом из (4).

Применим соотношение (7) для оценки снизу точной константы в теореме Джексона в $L_p[-\pi, \pi]$, $0 < p < 1$. В [5] в частности, доказано, что

$$\sup_{f\in L_p[-\pi,\pi]} \frac{E_0(f)_p}{\omega(f,\pi)_p} = 1,$$

где $\omega(f, h)_p = \sup\{\|\Delta_t f\|_p; |t| \le h\}$ — значение модуля непрерывности функции f в точке h. При этом в оценках снизу использовались функции В. А. Юдина $f_q(x)$, имеющие следующие свойства:

$$E_0(f_q)_p = 2^{p-1}(1-1/q) + 1/q, \tag{8}$$

$$\omega(f_q, h)_p = 2^{p-1} \quad \text{при} \quad 2\pi/q \le h \le 2\pi. \tag{9}$$

Здесь q — произвольное простое число.

Следствие 2. *Для любого фиксированного* $c > 0$, $p \in (0, 1)$ *и* $l = 1, 2, \ldots$ *выполняется соотношение*

$$\sup_{f\in L_p[-\pi,\pi]} \frac{E_l(f)_p}{\omega(f, c\pi/(l+1))_p} \ge 1. \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем l. Для произвольного малого $\varepsilon > 0$ сначала в соответствии с (8) выберем q так, чтобы выполнялось неравенство $E_0(f_q)_p > 2^{p-1} - \varepsilon/2$. Далее, из (7) следует, что можно выбрать n больше l так, чтобы $E_l(f_q(n\cdot))_p > E_0(f_q(n\cdot))_p - \varepsilon/2$. Кроме того, из (9) следует

$$\omega\left(f_q(n\cdot), \frac{c\pi}{l+1}\right)_p \le 2^{p-1}.$$

Поэтому

$$\sup_{f\in L_p[-\pi,\pi]} \frac{E_l(f)_p}{\omega(f, c\pi/(l+1))_p} \ge \frac{E_l\left(f_q(n\cdot)\right)_p}{\omega\left(f_q(n\cdot), c\pi/(l+1)\right)_p} \ge \frac{2^{p-1}-\varepsilon}{2^{p-1}}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем (10).

1. *Ганзбург М. И., Пичугов С. А.* Об инвариантности элементов наилучшего приближения и одной теореме Глезера // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 664–667.
2. *Бердышев В. И.* О теореме Джексона в L_p // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 3–16.
3. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641–658.
4. *Освальд П.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов в метрике L_p, $0 < p < 1$ // Изв. вузов. Сер. мат. – 1976. – **7**. – С. 65–75.
5. *Пичугов С. А.*. Приближение константой периодических функций в метрических пространствах $\varphi(L)$ // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1095–1098.

Получено 22.12.94