УДК 517.986+519.95

А. Ф. Зарицкий, докторант (Киев. воен. ин-т управления и связи)

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

Irreducible nonorthogonal decompositions of the identity are studied. The given results show that, in contrast to traditional limitations of "independent measurements" type, the factor of noncommutativity gives a more precise description of informational systems.

Вивчаються незвідні неортогональні розклади одиниці. Наведені результати показують, що на відміну від традиційних обмежень типу „незалежні виміри" врахування некомутативності важливе при опису інформаційних систем.

В математической теории нейрокомпьютинга используются статистические модели квантовой механики, основанные на операторном алгебраическом подходе и некоммутативной теории вероятностей (см., например, [1, 2]). При этом результаты отображения информации в нейронных сетях в общем случае описываются неортогональными разложениями единицы: неотрицательными операторами M_k, $k=1, \ldots, m$, в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ такими, что

$$\sum_{k=1}^{m} M_k = \mathrm{I}. \tag{1}$$

Из спектральных разложений операторов M_k, $k=1, \ldots, m$, следуют неортогональные разложения единицы

$$\sum_{j=1}^{n} a_j P_j = \mathrm{I}; \quad 0 < a_j \le 1, \quad P_j \ne 0; \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где P_j — ортопроекторы.

В данной статье изучается возможность описания неортогональных разложений (2) в зависимости от n с точностью до унитарной эквивалентности.

***Определение* 1.** *Два набора ортопроекторов* $(P_j)_{j=1}^n$ *в* $\mathcal{H}$ *и* $(\tilde{P}_j)_{j=1}^n$ *в* $\tilde{\mathcal{H}}$ *унитарно эквивалентны, если существует унитарный оператор* $\mathcal{U}: \mathcal{H} \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ *такой, что* $\mathcal{U}P_j = \tilde{P}_j \mathcal{U}$, $j = 1, \ldots, n$.

Из унитарной эквивалентности наборов ортопроекторов вытекает тождественность отображения информации из внешней среды в нейросетевую структуру.

Как обычно в теории представлений эта задача сводится к унитарному описанию неприводимых решений уравнения (2).

***Определение* 2.** *Семейство* $(P_j)_{j=1}^n$ *неприводимо, если из* $[A, P_j] = AP_j - P_j A = 0$; $\forall j = 1, \ldots, n$ $(A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}))$ *следует* $A = \lambda \mathrm{I}$.

Для систем нейронного типа неприводимые представления $(P_j)_{j=1}^n$ соответствуют элементарным информативным компонентам системы.

При $n = 2$ неприводимые представления (2), естественно, одномерны.

Утверждение 1. *При* $n = 3$ *неприводимые решения* (2) *одномерны или двумерны.*

При $n = 4$ описание решений (2) следует [3].

© А. Ф. ЗАРИЦКИЙ, 1995

Утверждение 2. *При каждом* $0 < a_1, a_2, a_3, a_4 \leq 1$ C^**-алгебра, порожденная ортопроекторами* P_1, P_2, P_3, P_4 *такими, что* $\sum_{j=1}^{4} a_j P_j = \mathrm{I}$ — *алгебра типа* I.

При любом $k = 1, 2, \ldots$ существуют a_1, a_2, a_3, a_4 и неприводимый набор ортопроекторов P_1, P_2, P_3, P_4 в $\mathcal{H}$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{4} a_j P_j = \mathrm{I}; \quad \dim \mathcal{H} = k.$$

Утверждение 3. *При* $n \geq 5$ *существуют* $0 < a_j \leq 1$, $j = 1, \ldots, n$, *такие, что задача описания решений* (2) *принадлежит классу „диких" задач.*

(Определение диких задач $*$-представлений содержится в [4]).

Таким образом, в отличие от традиционных ограничений типа „независимости измерений (испытаний)" [1], учет некоммутативности при $n \geq 3$ приводит к адекватному описанию информационной системы.

Автор благодарен Ю. Н. Беспалову и Ю. С. Самойленко за консультации по теории представлений $*$-алгебр и полезные советы.

1. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой механики. – М.: Наука, 1980. – 137 с.
2. *Zaritski A. F.* Probabilistic-operator measures in neuronal struktures // Numerical Methodes of Analis. – Moskow University, 1995. – P. 105–115
3. *Беспалов Ю. Н.* Наборы ортопроекторов, связанных соотношениями // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 309–317.
4. *Пирятинская А. Ю., Самойленко Ю. С.* Дикие задачи теории представлений $*$-алгебр, порожденных образующими и соотношениями // Там же. – 1995. – **47**, № 1. – С. 70–78.

Получено 01.09.93