УДК 517.91

М. В. Самойленко, асп. (Укр. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ)

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ В ОКОЛІ ІНВАРІАНТНОГО ТОРУ

We study the behavior of a discrete dynamical system in a neighborhood of an invariant torus in the case when the trajectories on the torus have an arbitrary structure. Conditions for reducing the system in such neighborhood to a canonical form are given.

Досліджується поведінка дискретної динамічної системи в околі інваріантного тору у випадку, коли траєкторії на ньому мають довільну структуру. Наведено умови, за яких система в такому околі зводиться до канонічного виду.

В роботі [1] розглянуто питання про зведення дискретної динамічної системи до канонічного виду в околі інваріантного тору, заповненого квазіперіодичними траєкторіями. Розглянемо аналогічну задачу у випадку, коли траєкторії на торі мають довільну структуру. При доведенні основного результату будемо використовувати метод інтегральних многовидів Крилова – Боголюбова – Митропольського [2, 3].

Нехай, як і в [1], E^q — q-вимірний евклідів простір, $\mathcal{T}_m$ — m-вимірний тор, $C^r(\mathcal{T}_m)$ — простір r разів неперервно диференційовних на $\mathcal{T}_m$ функцій.

Розглянемо дискретну динамічну систему

$$x = x(n, x_0), \quad x_0 \in E^q, \quad n \in Z,$$

задану як розв'язок системи різницевих рівнянь

$$x(n+1) - x(n) = X(x(n)), \quad x(0) = x_0, \quad n \in Z, \tag{1}$$

де $x \in E^q$, $X = X(x)$ — r разів неперервно диференційовна в E^q функція.

Нехай

$$\mathcal{M}: \; x = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{2}$$

— інваріантна множина системи (1), заповнена траєкторіями вигляду

$$x(n, f(\varphi)) = f(\varphi_n(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad n \in Z, \tag{3}$$

де функція $\varphi_n(\varphi)$ задовольняє різницеве рівняння

$$\varphi_{n+1}(\varphi) - \varphi_n(\varphi) = a(\varphi_n(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad n \in Z. \tag{4}$$

Тут f і a — функції простору $C^r(\mathcal{T}_m)$.

Нехай для f також виконується умова

$$\operatorname{rank} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = m, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{5}$$

Для розв'язків (3) системи (1) маємо

$$f(\varphi_{n+1}(\varphi)) - f(\varphi_n(\varphi)) = X(f(\varphi_n(\varphi))), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad n \in Z.$$

Якщо в останній рівності покласти $\psi = \varphi_n(\varphi)$, то умова інваріантності множини $\mathcal{M}$ з урахуванням (4) набуде вигляду

$$f(\psi + a(\psi)) = f(\psi) + X(f(\psi)), \quad \psi \in \mathcal{T}_m. \tag{6}$$

Згідно з [4, с. 40] з умови (5) випливає, що при $q = m+1$ або $q > 2m$ існує 2π-періодична відносно φ^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, матриця $B(\varphi)$ з лінійно незалежними для будь-якого $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m) \in \mathcal{T}_m$ стовпцями така, що

$$\det\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}, B(\varphi)\right] \neq 0, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{7}$$

Якщо при цьому $f \in C^r(\mathcal{T}_m)$, то $B(\varphi) \in C^{r-1}(\mathcal{T}_m)$.

Отже, з останньої рівності при $r \geq 2$ і достатньо малих значеннях h $(\|h\| \leq \leq \delta)$ випливає умова

$$\det\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (B(\varphi)h)}{\partial \varphi}, B(\varphi)\right] \neq 0, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Визначник у лівій частині цієї нерівності є якобіаном перетворення

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h, \tag{8}$$

яке дозволяє перейти в околі множини $\mathcal{M}$ від евклідових координат x до локальних координат (φ, h), де $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m) \in \mathcal{T}_m$, $h = (h^1, \ldots, h^{q-m}) \in K_\delta = \{h : \|h\| \leq \delta\}$. Це перетворення є гомеоморфним відображенням множини $\mathcal{T}_m \times K_\delta$ на деякий окіл множини $\mathcal{M} \subset E^q$.

Покажемо, що система (1) в околі множини $\mathcal{M}$ зводиться до системи в локальних координатах (φ, h) на $\mathcal{T}_m \times K_\delta$ вигляду

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) - \varphi(n) &= a(\varphi(n)) + A(\varphi(n), h(n))h(n), \\ h(n+1) - h(n) &= P(\varphi(n), h(n))h(n), \end{aligned} \tag{9}$$

де матриці $A(\varphi, h)$, $P(\varphi, h)$ — 2π-періодичні по φ^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, певного порядку гладкості.

Для знаходження матриць $A(\varphi, h)$, $P(\varphi, h)$ перепишемо систему (1), враховуючи заміну (8):

$$f(\varphi(n+1)) + B(\varphi(n+1))h(n+1) - f(\varphi(n)) - B(\varphi(n))h(n) = $$
$$= X(f(\varphi(n)) + B(\varphi(n))h(n)).$$

Покладаючи $\varphi = \varphi(n)$, $h = h(n)$ та враховуючи (9), маємо

$$f(\varphi + a(\varphi) + A(\varphi, h)h) + B(\varphi + a(\varphi) + A(\varphi, h)h)(h + P(\varphi, h)h) - f(\varphi) -$$
$$- B(\varphi)h = X(f(\varphi) + B(\varphi)h).$$

З останньої рівності та умови інваріантності (6) множини $\mathcal{M}$ одержуємо відносно матриць $A = A(\varphi, h)$ та $P = P(\varphi, h)$ рівняння

$$f(\varphi + a(\varphi) + Ah) - f(\varphi + a(\varphi)) + B(\varphi + a(\varphi) + Ah)(h + Ph) - B(\varphi)h =$$
$$= X(f(\varphi) + B(\varphi)h) - X(f(\varphi)),$$

з якого після „ділення" на h випливає рівняння

$$\frac{\partial f(\varphi + a)}{\partial \varphi} + B(\varphi + a + Ah)P = \int_0^1 \frac{\partial X(f(\varphi) + tB(\varphi)h)}{\partial x}\, dt B(\varphi) -$$

$$- \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial f(\varphi + a + tAh)}{\partial \varphi} - \frac{\partial f(\varphi + a)}{\partial \varphi} \right] dt\, A \; + \right.$$

$$\left. + \left[B(\varphi + a + Ah) - B(\varphi + a) \right] + \left[B(\varphi + a) - B(\varphi) \right] \right\}. \tag{10}$$

Позначимо праву частину рівності (10) через $Q(\varphi, h, A)$. З умови (7) випливає, що для фіксованого $M > 0$ існує таке $\delta = \delta(M) > 0$, що

$$\det \left[\frac{\partial f(\varphi + a)}{\partial \varphi}, B(\varphi + a + Ah) \right] \neq 0 \tag{11}$$

для будь-яких (φ, h) з $\mathcal{T}_m \times K_\delta$ та довільної матриці A, що задовольняє умову

$$\| A \| \leq M. \tag{12}$$

Виконання умови (11) дозволяє розв'язати рівняння (10) відносно матриць $A = A(\varphi, h)$ і $P = P(\varphi, h)$ у вигляді

$$\begin{aligned} A &= L_1(\varphi, Ah) Q(\varphi, h, A), \\ P &= L_2(\varphi, Ah) Q(\varphi, h, A) \end{aligned} \tag{13}$$

для будь-яких $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times K_\delta$ та A з області (12); тут $L_1(\varphi, Ah)$, $L_2(\varphi, Ah)$ — блоки матриці, оберненої до $[\partial f(\varphi + a) / \partial \varphi, B(\varphi + a + Ah)]$.

Для матриці $Q(\varphi, h, A)$ маємо зображення

$$Q(\varphi, h, A) = B(\varphi + a) - B(\varphi) + \frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x} B(\varphi) + Q_1(\varphi, h, A),$$

де

$$Q_1(\varphi, h, A) = \int_0^1 \left[\frac{\partial X(f(\varphi) + tB(\varphi)h)}{\partial x} - \frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x} \right] dt B(\varphi) \; -$$

$$- \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial f(\varphi + a + tAh)}{\partial \varphi} - \frac{\partial f(\varphi + a)}{\partial \varphi} \right] dt A + \left[B(\varphi + a + Ah) - B(\varphi + a) \right] \right\}.$$

Матриця $Q_1(\varphi, h, A)$ визначена для всіх (φ, h) з $\mathcal{T}_m \times K_\delta$ і A з області (12), $r - 1$ раз неперервно диференційовна за всіма своїми аргументами і задовольняє умову $Q_1(\varphi, 0, A) = 0$. Аналогічні властивості мають і матриці $L_1 = L_1(\varphi, Ah)$ та $L_2 = L_2(\varphi, Ah)$; до того ж $L_1(\varphi, 0)$ і $L_2(\varphi, 0)$ є блоками матриці, оберненої до $[\partial f(\varphi + a) / \partial \varphi, B(\varphi + a)]$.

Як і в [1], позначимо через $C_{\text{lip}}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$ простір матричних функцій, які визначені на $\mathcal{T}_m \times K_\mu$, $K_\mu = \{ h : \| h \| \leq \mu \}$, і задовольняють за (φ, h) умову Ліпшица. В цьому просторі виділимо підмножину $C(M, K)$ матричних функцій $A = A(\varphi, h)$, для яких виконуються нерівності

$$\| A(\varphi, h) \| \leq M, \quad \| A(\varphi', h') - A(\varphi, h) \| \leq K(\| \varphi' - \varphi \| + \| h' - h \|)$$

для довільних (φ, h), (φ', h') з області $\mathcal{T}_m \times K_\mu$.

Можна довести, що рівняння $A = L_1(\varphi, Ah) Q(\varphi, h, A)$ має єдиний розв'язок в $C(M, K)$ при $r \geq 2$, достатньо малому значенні $\mu > 0$ і досить великих додатних M і K (доведення аналогічне доведенню відповідного твердження в [1]). За теоремою про неявну функцію A є елементом простору $C^{r-1}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$. З другого рівняння системи (13) за відомою матрицею $A = A(\varphi, h)$ однозначно знайдеться матриця $P = P(\varphi, h)$; P також належить простору $C^{r-1}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$.

Таким чином, в'малому околі інваріантної множини $\mathcal{M}$ динамічну систему (1) можна звести до системи (9) на $\mathcal{T}_m \times K_\mu$ з матрицями $A = A(\varphi, h)$ і $P = P(\varphi, h)$, що належать простору $C^{r-1}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$, $r \geq 2$.

Задача полягає в тому, щоб вказати умови існування заміни змінних $\varphi \to \psi$, яка зводить систему (9) до системи вигляду

$$\begin{aligned} \psi(n+1) - \psi(n) &= a(\psi(n)), \\ h(n+1) - h(n) &= R(\psi(n), h(n))h(n). \end{aligned} \tag{14}$$

Теорема. *Нехай $r \geq 2$ і існують додатні сталі d_0, $p_0 < 1$, $\gamma_0 < 1$ такі, що*

$$\left\| \left[E + \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi} \right]^{-1} \right\| \leq d_0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{15}$$

$$\| E + P(\varphi, 0) \| \leq p_0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{16}$$

$$d_0 p_0 \left(1 + \max_{\mathcal{T}_m} \left\| \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \right) \leq \gamma_0. \tag{17}$$

Тоді можна вказати такі $\mu > 0$ та матрицю $U(\varphi, h)$ з простору $C_{\mathrm{lip}}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$, що заміна змінних

$$\varphi = \psi + U(\psi, h)h \tag{18}$$

приводить систему (9) *до системи* (14) *з матрицею*

$$R(\psi, h) = P(\psi + U(\psi, h)h, h). \tag{19}$$

Доведення. Переходячи до доведення цього твердження, визначимо заміну змінних $\varphi \to \psi$ згідно з формулою

$$\psi = \varphi + V(\varphi, h)h, \tag{20}$$

де матриця $V(\varphi, h)$ належить простору $C(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$.

Враховуючи (20), перше рівняння системи (14) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) + V(\varphi(n+1), h(n+1))h(n+1) - \varphi(n) - \\ - V(\varphi(n), h(n))h(n) = a(\varphi(n) + V(\varphi(n), h(n))h(n)) \end{aligned}$$

або, оскільки $\varphi(n+1)$, $\varphi(n)$, $h(n+1)$, $h(n)$ пов'язані рівняннями системи (9),

$$\begin{aligned} \varphi(n) + a(\varphi(n)) + A(\varphi(n), h(n))h(n) + V(\varphi(n) + a(\varphi(n)) + \\ + A(\varphi(n), h(n))h(n), h(n) + P(\varphi(n), h(n))h(n))(h(n) + P(\varphi(n), h(n))h(n)) - \\ - \varphi(n) - V(\varphi(n), h(n))h(n) = a(\varphi(n) + V(\varphi(n), h(n))h(n)). \end{aligned}$$

Поклавши $\varphi = \varphi(n)$, $h = h(n)$, $P_1(\varphi, h) = E + P(\varphi, h)$, перепишемо останню рівність у вигляді

$$a(\varphi) + A(\varphi, h)h + V(\varphi + a(\varphi) + A(\varphi, h)h, P_1(\varphi, h)h)P_1(\varphi, h)h - V(\varphi, h)h =$$
$$= a(\varphi + V(\varphi, h)h).$$

Це рівняння відносно $V = V(\varphi, h)$ після „ділення" на h набуде вигляду

$$\left[E + \int_0^1 \frac{\partial a(\varphi + tVh)}{\partial \varphi} dt \right] V(\varphi, h) =$$

$$= A(\varphi, h) + V(\varphi + a(\varphi) + A(\varphi, h)h, P_1(\varphi, h)h)P_1(\varphi, h).$$

Якщо матриця $V = V(\varphi, h)$ задовольняє умову

$$\| V(\varphi, h) \| \leq M_1, \quad (\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times K_\mu, \tag{21}$$

то при достатньо малих значеннях $\mu > 0$ умова (15) забезпечує існування матриці $D = D(\varphi, V(\varphi, h)h)$, оберненої до

$$\left[E + \int_0^1 \frac{\partial a(\varphi + tVh)}{\partial \varphi} dt \right].$$

Тоді останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$V(\varphi, h) = D(\varphi, V(\varphi, h)h)[A(\varphi, h) + V(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h))P_1(\varphi, h)], \tag{22}$$

де $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi, h) = \varphi + a(\varphi) + A(\varphi, h)h$, $h_1 = h_1(\varphi, h) = P_1(\varphi, h)h$.

Розглянемо множину $C(M_1)$ неперервних на $\mathcal{T}_m \times K_\mu$ матричних функцій $V = V(\varphi, h)$, які задовольняють умову (21). Ця множина буде повним метричним простором, якщо для будь-яких її елементів V_1 і V_2 покласти

$$\rho(V_1, V_2) = \max_{\mathcal{T}_m \times K_\mu} \| V_1(\varphi, h) - V_2(\varphi, h) \|.$$

Покажемо, що при достатньо малих $\mu > 0$ та досить великому $M_1 > 0$ рівняння (22) має єдиний розв'язок в $C(M_1)$. Для цього означимо на $C(M_1)$ оператор $S: V \to SV$, поклавши

$$(SV)(\varphi, h) = D(\varphi, V(\varphi, h)h)[A(\varphi, h) + V(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h))P_1(\varphi, h)].$$

Якщо $r \geq 2$, то S відображає $C(M_1)$ в підмножину простору $C(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$. З умов (15) – (17) також випливає існування додатних сталих d, $p < 1$ таких, що при достатньо малому значенні $\mu > 0$ будуть виконуватись нерівності

$$\| D(\varphi, V(\varphi, h)h) \| < d, \quad (\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times K_\mu,$$
$$\| P_1(\varphi, h) \| < p, \quad (\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times K_\mu, \tag{23}$$
$$dp < 1$$

і вектор $P_1(\varphi, h)h$ буде належати K_μ.

Оскільки $A \in C(M, K)$, то при виконанні умов (21), (23) правильна оцінка

$$\| (SV)(\varphi, h) \| \leq d(M + M_1 p) \leq M_1, \quad (\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times K_\mu, \tag{24}$$

якщо M_1 — достатньо велике додатне число.

Розглянемо різницю $(SV_1)(\varphi, h) - (SV_2)(\varphi, h)$, де V_1 і V_2 — елементи простору $C(M_1)$. Для неї справедлива нерівність

$$\| (SV_1)(\varphi, h) - (SV_2)(\varphi, h) \| \le$$
$$\le \mu C_1 (M + M_1 p) \| V_1(\varphi, h) - V_2(\varphi, h) \| + dp \| V_1(\varphi_1, h_1) - V_2(\varphi_1, h_1) \|,$$

з якої випливає

$$\rho(SV_1, SV_2) \le [\mu C_1 (M + M_1 p) + dp] \rho(V_1, V_2),$$

де C_1 — додатна стала, яка не залежить від μ і M_1.

Оскільки $dp < 1$, то при досить малих $\mu > 0$ виконується нерівність

$$\mu C_1 (M + M_1 p) + dp \le \gamma < 1.$$

З цієї умови і нерівності (24) випливає, що S відображає $C(M_1)$ в себе і є оператором стиску в цьому просторі при достатньо малому значенні $\mu > 0$ і досить великих $M_1 > 0$, а рівняння (22) має єдиний розв'язок в $C(M_1)$. Цей розв'язок можна знайти як границю послідовних наближень $V_i(\varphi, h)$, $i = 0, 1, 2 \ldots$, де $V_0(\varphi, h) \equiv 0$ і

$$V_{i+1}(\varphi, h) = D(\varphi, V_i(\varphi, h)h)[A(\varphi, h) + V_i(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h)) P_1(\varphi, h)]. \quad (25)$$

Покажемо, що розв'язок рівняння (22) — функція $V = V(\varphi, h)$ — при виконанні умов (15) – (17) є елементом простору $C_{\text{lip}}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$. Для цього розглянемо функцію $W = W(\varphi, h, \mu) = V(\varphi, \mu h)$, де μ — достатньо мале додатне число і $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times K_1$. Ця функція задовольняє рівняння

$$W(\varphi, h, \mu) =$$
$$= D(\varphi, \mu W(\varphi, h, \mu) h)[A(\varphi, \mu h) + W(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) P(\varphi, \mu h)]$$

і є границею послідовних наближень

$$W_0(\varphi, h, \mu) \equiv 0,$$
$$W_1(\varphi, h, \mu) = D(\varphi, 0) A(\varphi, \mu h),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$W_{i+1}(\varphi, h, \mu) = D(\varphi, \mu W_i(\varphi, h, \mu) h)[A(\varphi, \mu h) +$$
$$+ W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) P_1(\varphi, \mu h)], \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Для перших похідних від ітерацій $W_0, W_1, \ldots, W_i, \ldots$ маємо рівності

$$\frac{\partial W_0(\varphi, h, \mu)}{\partial \varphi^\nu} \equiv 0, \quad \frac{\partial W_0(\varphi, h, \mu)}{\partial h^\nu} \equiv 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, \mu)}{\partial \varphi^\nu} =$$
$$= \frac{\partial D(\varphi, \mu W_i(\varphi, h, \mu) h)}{\partial \varphi^\nu} [A(\varphi, \mu h) + W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) P_1(\varphi, \mu h)] +$$
$$+ D(\varphi, W_i(\varphi, h, \mu) \mu h) \left\{ \frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu} + \right.$$
$$+ \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)}{\partial \varphi_1^j} \frac{\partial \varphi_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{q-m} \frac{\partial W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)}{\partial h_1^j} \frac{\partial h_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu} \Bigg] P_1(\varphi, \mu h) +$$

$$+ W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) \frac{\partial P_1(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu} \Bigg\},$$

$$\frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, \mu)}{\partial h^\nu} = \tag{26}$$

$$= \frac{\partial D(\varphi, W_i(\varphi, h, \mu)\mu h)}{\partial h^\nu} [A(\varphi, \mu h) + W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) P_1(\varphi, \mu h)] +$$

$$+ \mu D(\varphi, W_i(\varphi, h, \mu)\mu h) \Bigg\{ \frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)^\nu} +$$

$$+ \Bigg[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)}{\partial \varphi_1^j} \frac{\partial \varphi_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)^\nu} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q-m} \frac{\partial W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)}{\partial h_1^j} \frac{\partial h_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)^\nu} \Bigg] P_1(\varphi, \mu h) +$$

$$+ W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) \frac{\partial P_1(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)^\nu} \Bigg\}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

....,

де

$$\frac{\partial D(\varphi, W_i(\varphi, h, \mu)\mu h)}{\partial \varphi^\nu} = \frac{\partial D(\varphi, W_i \mu h)}{\partial \varphi^\nu} +$$

$$+ \mu \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial D(\varphi, W_i(\varphi, h, \mu)\mu h)}{\partial (\mu W_i h)^j} \frac{\partial (W_i(\varphi, h, \mu)h)^j}{\partial \varphi^\nu},$$

$$\frac{\partial D(\varphi, W_i(\varphi, h; \mu)\mu h)}{\partial h^\nu} = \tag{27}$$

$$= \mu \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial D(\varphi, W_i(\varphi, h, \mu)\mu h)}{\partial (\mu W_i h)^j} \frac{\partial (W_i(\varphi, h, \mu)h)^j}{\partial h^\nu},$$

$(\mu h)^\nu = \mu h^\nu$ і φ_1^j, h_1^j, $(\mu W_i h)^j$ — j-ті координати векторів відповідно $\varphi_1(\varphi, \mu h)$, $h_1(\varphi, \mu h)$, $\mu W_i(\varphi, h, \mu)h$.

Формули (26) можна записати у вигляді матричних рівностей

$$W'_{i+1}(\varphi, h, \mu) = D'_1(\varphi, h, \mu) G(\varphi, h, \mu) +$$

$$+ D(\varphi, \mu W_i(\varphi, h, \mu)h) [\, W'_i(\varphi_1, h_1, \mu) R_1(\varphi, h, \mu) P_2(\varphi, h, \mu) +$$

$$+ W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) P'_1(\varphi, h, \mu) + A'(\varphi, h, \mu)\,], \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

де W_0, W'_0 — нульові матриці,

$$W'_{i+1}(\varphi, h, \mu) = \left[\frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, \mu)}{\partial \varphi^1}, \ldots, \frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, \mu)}{\partial h^{q-m}}\right],$$

$$W'_i(\varphi_1, h_1, \mu) = \left[\frac{\partial W_i(\varphi_1, h_1, \mu)}{\partial \varphi_1^1}, \ldots, \frac{\partial W_i(\varphi_1, h_1, \mu)}{\partial h_1^{q-m}}\right],$$

$$D'_1(\varphi, h, \mu) = \left[\frac{\partial D(\varphi, \mu W_i(\varphi, h, \mu)h)}{\partial \varphi^1}, \ldots, \frac{\partial D(\varphi, \mu W_i(\varphi, h, \mu)h)}{\partial h^{q-m}}\right],$$

G, R_1, P_2, P'_1, A' — неперервні матричні функції змінних $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $h \in K_1$, $\mu \in \in [0; \mu_0]$ (μ_0 — достатньо мале додатне число), що мають вигляд

$$G(\varphi, h, \mu) = \operatorname{diag}\{A(\varphi, \mu h) + W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)P_1(\varphi, \mu h), \ldots,$$
$$A(\varphi, \mu h) + W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)P_1(\varphi, \mu h)\},$$

$$P_2(\varphi, h, \mu) = \operatorname{diag}\{P_1(\varphi, \mu h), \ldots, P_1(\varphi, \mu h)\},$$

$$P'_1(\varphi, h, \mu) = \left[\frac{\partial P_1(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^1}, \ldots, \frac{\partial P_1(\varphi, \mu h)}{\partial h^{q-m}}\right],$$

$$A'(\varphi, h, \mu) = \left[\frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^1}, \ldots, \frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial h^{q-m}}\right],$$

а матриця $R(\varphi, h, \mu)$ — блочна; її $j\nu$-й блок має вигляд

$$\operatorname{diag}\left\{\frac{\partial \varphi_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu}, \ldots, \frac{\partial \varphi_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu}\right\}, \quad \text{якщо} \quad j = 1, \ldots, m, \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

$$\operatorname{diag}\left\{\frac{\partial \varphi_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial h^{\nu-m}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_1^j(\varphi, \mu h)}{\partial h^{\nu-m}}\right\}, \quad \text{якщо} \quad j = 1, \ldots, m, \quad \nu = m+1, \ldots, q,$$

$$\operatorname{diag}\left\{\frac{\partial h_1^{j-m}(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu}, \ldots, \frac{\partial h_1^{j-m}(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi^\nu}\right\},$$
$$\text{якщо} \ j = m+1, \ldots, q, \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

$$\operatorname{diag}\left\{\frac{\partial h_1^{j-m}(\varphi, \mu h)}{\partial h^{\nu-m}}, \ldots, \frac{\partial h_1^{j-m}(\varphi, \mu h)}{\partial h^{\nu-m}}\right\},$$
$$\text{якщо} \ j = m+1, \ldots, q, \quad \nu = m+1, \ldots, q.$$

Розглянемо добуток $R_1(\varphi, h, \mu)P_2(\varphi, h, \mu)$. При $\mu = 0$ його $j\nu$-й блок, якщо $j, \nu = 1, \ldots, m$, має вигляд

$$\operatorname{diag}\left\{\delta_{j\nu} + \frac{\partial a^j(\varphi)}{\partial \varphi^\nu}, \ldots, \delta_{j\nu} + \frac{\partial a^j(\varphi)}{\partial \varphi^\nu}\right\} P_1(\varphi, 0),$$

а інші блоки — нульові. Тому для $R_1(\varphi, h, 0)P_2(\varphi, h, 0)$ маємо оцінку

$$\| R_1(\varphi, h, 0)P_2(\varphi, h, 0) \| \le p_0\left(1 + \max_{\mathcal{T}_m}\left\|\frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi}\right\|\right),$$

яка гарантує для добутку $R(\varphi, h, \mu)P_2(\varphi, h, \mu)$ виконання нерівності

$$\| R_1(\varphi, h, \mu)P_2(\varphi, h, \mu) \| \le p(\mu), \tag{29}$$

де $p(\mu) \to p_0\left(1 + \max_{\mathcal{T}_m}\left\| \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi} \right\|\right)$, якщо $\mu \to 0$.

З умови (15) випливає

$$\| D(\varphi, W_i(\varphi, h, \mu)\mu h) \| \le d(\mu), \tag{30}$$

де $d(\mu) \to d_0$, якщо $\mu \to 0$.

Тому при достатньо малому μ_0 умова (17) забезпечує виконання нерівності

$$d(\mu)p(\mu) \le \gamma_1 < 1 \tag{31}$$

для будь-яких $\mu \in [0; \mu_0]$.

З рівностей (27) для матриці $D_1'(\varphi, h, \mu)$ маємо оцінку

$$\| D_1'(\varphi, h, \mu) \| \le C_1 + \mu C_2 \| W_i(\varphi, h, \mu) \| + \mu C_3 \| W_i'(\varphi, h, \mu) \|.$$

З рівностей (26), нерівностей (29) – (31) та останньої оцінки випливає

$$\max_{\mathcal{T}_m \times K_1 \times [0; \mu_0]} \| W_i'(\varphi, h, \mu) \| \le C_4 + (\mu C_5 + \gamma_1) \max_{\mathcal{T}_m \times K_1 \times [0; \mu_0]} \| W_i'(\varphi, h, \mu) \|,$$

де C_4 і C_5 — деякі додатні сталі.

Звідси, якщо взяти $\mu_0 \le (1 - \gamma_1)/(2C_5)$, то для всіх $i = 1, 2, \ldots$

$$\max_{\mathcal{T}_m \times K_1 \times [0; \mu_0]} \| W_i'(\varphi, h, \mu) \| \le \frac{2C_4}{1 - \gamma_1}.$$

Це значить, що

$$\max_{\nu, j} \left\{ \left\| \frac{\partial W_i(\varphi, h, \mu)}{\partial \varphi^\nu} \right\|, \left\| \frac{\partial W_i(\varphi, h, \mu)}{\partial h^j} \right\| \right\} \le \frac{2C_4}{1 - \gamma_1}.$$

З останньої нерівності випливає, що для всіх $i = 1, 2, \ldots$

$$\max_{\nu, j} \left\{ \left\| \frac{\partial V_i(\varphi, h)}{\partial \varphi^\nu} \right\|, \left\| \frac{\partial V_i(\varphi, h)}{\partial h^j} \right\| \right\} \le \frac{2C_4}{\mu_0(1 - \gamma_1)},$$

тобто послідовність перших похідних наближень (25) рівномірно обмежена. Цього достатньо для того, щоб функція $V = V(\varphi, h)$ була елементом простору $C_{\text{lip}}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$, тобто існує така стала K_1, що

$$\| V(\varphi', h') - V(\varphi, h) \| \le K_1(\| \varphi' - \varphi \| + \| h' - h \|)$$

для довільних (φ, h), (φ', h') з $\mathcal{T}_m \times K_\mu$.

Для завершення доведення теореми розв'яжемо (20) як рівняння відносно φ:

$$\varphi = \psi + U(\psi, h)h, \tag{32}$$

де $U = U(\psi, h)$ — матрична функція з простору $C_{\text{lip}}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$.

Підставляючи (32) в (20), одержуємо рівняння відносно U вигляду

$$U = -V(\psi + Uh, h). \tag{33}$$

В просторі $C_{\text{lip}}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$ виділимо підпростір $C(M_2, K_2)$ матричних функцій $U = U(\psi, h)$, які для довільних (ψ, h), (ψ', h') з $\mathcal{T}_m \times K_\mu$ задовольняють умови

$$\| U(\psi, h) \| \le M_2, \quad \| U(\psi', h') - U(\psi, h) \| \le K_2(\| \psi' - \psi \| + \| h' - h \|).$$

Простір $C(M_2, K_2)$ буде повним метричним простором, якщо

$$\rho(U_1, U_2) = \max_{\mathcal{T}_m \times K_\mu} \| U_1(\psi, h) - U_2(\psi, h) \|, \quad U_1, U_2 \in C(M_2, K_2).$$

Означимо на $C(M_2, K_2)$ оператор $S_1 : U \to S_1 U$, поклавши

$$(S_1 U)(\psi, h) = -V(\psi + U(\psi, h)h, h).$$

Оскільки для довільних (ψ, h), (ψ', h') з $\mathcal{T}_m \times K_\mu$, U з $C(M_2, K_2)$ виконуються нерівності

$$\| (S_1 U)(\psi, h) \| \leq M_1,$$

$$\| (S_1 U)(\psi', h') - (S_1 U)(\psi, h) \| \leq K_1(1 + \mu K_2 + M_2)(\| \psi' - \psi \| + \| h' - h \|),$$

то при достатньо малих $\mu > 0$ та досить великих $M_2 > 0$ і $K_2 > 0$ оператор S_1 відображає простір $C(M_2, K_2)$ в себе.

Маємо також для довільних U_1, U_2 з $C(M_2, K_2)$ оцінку

$$\| (S_1 U_1)(\psi, h) - (S_1 U_2)(\psi, h) \| \leq \mu K_1 \| U_1(\psi, h) - U_2(\psi, h) \|,$$

з якої випливає, що при достатньо малих $\mu > 0$ оператор S_1 є оператором стиску в $C(M_2, K_2)$.

Таким чином, рівняння (33) при достатньо малому $\mu > 0$ і досить великих $M_2 > 0$, $K_2 > 0$ має єдиний розв'язок в $C(M_2, K_2)$, який є підпростором $C_{\text{lip}}(\mathcal{T}_m \times K_\mu)$. Це забезпечує можливість розв'язати рівняння (20) у вигляді (32).

Для матриці $R(\psi, h)$ одержуємо вираз (19), якщо в матриці $P(\varphi, h)$ другого рівняння системи (9) замінити φ його значенням (32), що завершує доведення теореми.

1. *Самойленко А. М.* Исследование дискретной динамической системы в окрестности квазипериодической траектории // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 12. – С. 1702–1711.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 212 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 303 с.

Одержано 11.04.95