УДК 517.946

В. В. Маринець, канд. фіз.-мат. наук (Ужгород. ун-т)

ДЕЯКІ ПІДХОДИ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМ ВИЗНАЧЕНИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З АРГУМЕНТОМ, ЩО ВІДХИЛЯЄТЬСЯ

We construct and study monotone and alternating rapidly converging two-sided methods for approximate integration of the generalized Goursat problem. We prove that its regular solution exists and is unique. Theorems on the differential inequality and comparison are obtained. Sufficient conditions for existence of solutions with constant sign are obtained for this problem in the considered domain.

Побудовано і досліджено монотонні та альтернуючі швидкозбіжні двосторонні методи наближеного інтегрування узагальненої задачі Гурса, доведено існування та єдиність її регулярного розв'язку, теореми про диференціальну нерівність, порівняння, одержано достатні умови існування знакосталих розв'язків вказаної задачі в розглядуваній області.

1. Постановка задачі та основні означення. Нехай B — обмежена область в двовимірному евклідовому просторі E_2, ∂B — її границя, а $\overline{B} = B \bigcup \partial B$ — замикання області B. Якщо $s^i = \left(s_1^i, s_2^i\right)$ — двовимірні мультиіндекси довжини $|s^i| = s_1^i + s_2^i$, $i = \overline{1,n}$, $S = (s^1, s^2, \ldots, s^n)$, а $U(x,y) = (u_i(x,y))$ є деяка вектор-функція, визначена в області B, то символом $A^s U(x,y)$ позначимо вектор $(D^{s^i} u_i(x,y))$.

Нехай $k^i = \left(k_1^i, k_2^i\right)$ — цілочислові вектори з невід'ємними компонентами, а $k = (k^1, k^2, \ldots, k^n)$. Будемо вважати, що $k < s$, якщо $k_j^i \le s_j^i$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1, 2$, а $|k^i| < |s^i|$.

Через $C_n^S(B)$ позначимо простір неперервних в області B вектор-функцій, компоненти $u_i(x,y)$ яких мають неперервні частинні похідні відповідно до $|s^i|$-го порядку включно в цій області.

Розглянемо систему з аргументом, що відхиляється, вигляду

$$A^s U(x,y) = F[U(x,y)] \tag{1}$$

з умовами на характеристиках

$$\begin{gathered} A^{m_{1,0}} U(x_0, y) = \Phi_{m_{1,0}}(y), \quad A^{m_{0,1}} U(x, y_0) = \Psi_{m_{0,1}}(x), \\ A^{m_{1,0}} \Psi_{m_{0,1}}(x_0) = A^{m_{0,1}} \Phi_{m_{0,1}}(y_0), \end{gathered} \tag{2}$$

де $F[U(x,y)] = (f_i[U(x,y)])$, $i = \overline{1,n}$, — вектор-функція,

$$f_i[U(x,y)] = f_i\Big(x, y, U(x,y), \ldots, A^k U(x,y), U\big(x, \theta_2^{(0,0)}(x,y)\big), \ldots$$

$$\ldots, A^k U\big(x, \theta_2^k(x,y)\big), U\big(\theta_1^{(0,0)}(x,y), y\big), \ldots, A^k U\big(\theta_1^k(x,y), y\big)\Big),$$

$$k < s, \quad m_{1,0} = \left(m_{1,0}^1, m_{1,0}^2, \ldots, m_{1,0}^n\right), \quad m_{1,0}^i = \left(m_1^i, 0\right),$$

$$m_{0,1} = \left(m_{0,1}^1, m_{0,1}^2, \ldots, m_{0,1}^n\right), \quad m_{0,1}^i = \left(0, m_2^i\right),$$

$$m_1^i = \overline{0, s_1^i - 1}, \quad m_2^i = \overline{0, s_2^i - 1}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$A^k U\left(x, \theta_2^k(x,y)\right) = \left(D^{k^i} u_i\left(x, \theta_{2,i}^{k^i}(x,y)\right)\right),$$

$$A^k U\left(\theta_1^k(x,y), y\right) = \left(D^{k^i} u_i\left(\theta_{1,i}^{k^i}(x,y), y\right)\right)$$

— вектори,

$$A^k U:\ B \to B_k \subset E_n, \quad F:\ D \to E_n,$$

$$B = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_0+a),\ y \in (y_0-b, y_0),\ a, b > 0\},$$

$$D = B \times \underset{k}{\boxed{\times}} B_k \times \underset{k}{\boxed{\times}} B_k \times \underset{k}{\boxed{\times}} B_k \subset E_{2+3\sum_{i=1}^n \left[s_1^i + (s_1^i+1)s_2^i\right]};$$

$\underset{k}{\boxed{\times}}$ — декартів добуток, $\Psi_{m_{0,1}}(x) = \left(\psi_{m_2^i}(x)\right)$, $\Phi_{m_{1,0}}(y) = \left(\varphi_{m_1^i}(y)\right)$ — відомі вектор-функції,

$$\theta_{2,i}^{k^i}(x,y) = y + \tau_{i,k^i}(x,y), \quad \theta_{1,i}^{k^i}(x,y) = x - \mu_{i,k^i}(x,y).$$

Відхилення $\tau_{i,k^i}(x,y) \geq 0$, $\mu_{i,k^i}(x,y) \geq 0$ — задані неперервні функції в області $\overline{B}$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}_{i,k^i} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \mid y_0 \leq \overline{y} \leq y + \tau_{i,k^i}(x,y),\ x \in [x_0, x_0+a],\ (x,y) \in \overline{B}\},$$

$$\overline{R}_{i,k^i} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \mid x - \mu_{i,k^i}(x,y) \leq \overline{x} \leq x_0,\ y \in [y_0-b, y_0],\ (x,y) \in \overline{B}\}.$$

Нехай $\overline{E} = \bigcup_{i,k^i} \overline{E}_{i,k^i}$, $\overline{R} = \bigcup_{i,k^i} R_{i,k^i}$ і

$$U(x,y)\big|_{\overline{E}} = H(x,y), \quad U(x,y)\big|_{\overline{R}} = N(x,y), \tag{3}$$

де $H(x,y) = (\eta_i(x,y))$, $N(x,y) = (\nu_i(x,y))$ — відомі вектор-функції, які належать просторам $C_n^S(\overline{E})$, $C_n^S(\overline{R})$ відповідно, причому

$$A^{m_{1,0}} N(x_0, y) = \Phi_{m_{1,0}}(y), \quad A^{m_{0,1}} H(x, y_0) = \Psi_{m_{0,1}}(x). \tag{4}$$

Узагальнена задача Гурса полягає в знаходженні розв'язку диференціального рівняння (1), який задовольняє умови (2)–(4). Розв'язок задачі (1)–(4), який належить простору функцій $C_n^S(B) \cap C_n^{S-e}(\overline{B})$, $e = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$, $e^i = (1, 1)$, $i = \overline{1,n}$, будемо називати регулярним.

В роботах Ю. І. Ковача [1, 2] на базі методу Пікара будується та досліджується двосторонній метод прискореної збіжності наближеного інтегрування задачі Гурса для систем вигляду (1), коли $s_1^i = s_2^i$, а на характеристиках задані парні похідні. Питанням існування та єдиності розв'язку задачі Гурса у випадку скалярного рівняння без відхилень в аргументах присвячена робота [3]. Мета даної роботи — узагальнення результатів вказаних робіт та побудова нових модифікацій двостороннього методу.

Нехай $F[U(x,y)] \in C(\overline{D})$. Тоді задачу (1)–(4) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$U(x,y) = \begin{cases} H(x,y), & (x,y) \in \overline{E}; \\ N(x,y), & (x,y) \in \overline{R}; \\ \Omega(x,y) + TF[U(\xi,\eta)], & (x,y) \in \overline{B}, \end{cases} \tag{5}$$

де $\Omega(x,y) = (\omega_i(x,y))$, $TF[U(\xi,\eta)] = (T_i f_i[U(\xi,\eta)])$ — вектори, а

$$\omega_i(x,y) = \sum_{m_2^i=0}^{s_2^i-1} \frac{(y-y_0)^{m_2^i}}{m_2^i!}\psi_{m_2^i}(x) + \sum_{m_1^i=0}^{s_1^i-1} \frac{(x-x_0)^{m_1^i}}{m_1^i!}\varphi_{m_1^i}(y) -$$

$$- \sum_{m_1^i=0}^{s_1^i-1}\sum_{m_2^i=0}^{s_2^i-1} \frac{(x-x_0)^{m_1^i}(y-y_0)^{m_2^i}}{m_1^i!\,m_2^i!}\frac{d^{m_1^i}\psi_{m_2^i}(x_0)}{dx^{m_1^i}},$$

$$T_i f_i[U(\xi,\eta)] = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{s_1^i-1}(y-\eta)^{s_2^i-1}}{(s_1^i-1)!\,(s_2^i-1)!} f_i[U(\xi,\eta)]\,d\xi\,d\eta, \quad i=\overline{1,n}.$$

Оскільки вектор-функція $\Omega(x,y)$ задовольняє умову (2), то узагальнена задача Гурса (1)–(4) зводиться до задачі з однорідними умовами (2), (3). В зв'язку з цим, не зменшуючи загальності постановки розглядуваної задачі, в подальшому будемо вважати, що $\Phi_{m_{1,0}}(y) = \Psi_{m_{0,1}}(x) = H(x,y) = N(x,y) = 0$.

Означення. *Довільні з простору* $C_n^S(B)\cap C_n^{S-e}(\overline{B})$ *вектор-функції* $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, *які задовольняють умови* (2), (3) *і нерівності*

$$A^S W_0(x,y) \ge 0, \quad A^{S(r)}W_0(x,y) \ge (\le)\ 0, \quad r=(r_1,r_2,\ldots,r_n),$$
$$r_i = \overline{0,s_2^i}, \quad i=\overline{1,n}, \quad W_0(x,y) = Z_0(x,y) - V_0(x,y), \tag{6}$$
$$S(r) = \left(\left(k_1^1, s_2^1-r_1\right), \left(k_1^2, s_2^2-r_2\right), \ldots, \left(k_1^n, s_2^n-r_n\right)\right)$$

при r *парних (непарних), називаються функціями порівняння задачі* (1)–(4).

Цілочисловий вектор r називається парним (непарним), якщо всі його компоненти є парними (непарними).

Надалі будемо вважати, що права частина рівняння (1) $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$, де $C_1(\overline{D})$ — простір неперервних вектор-функцій в області $\overline{D}$, які мають в цій області обмежені частинні похідні першого порядку за всіма своїми аргументами, починаючи з третього. Тоді її можна зобразити у вигляді

$$F[U(x,y)] \equiv F[U^+(x,y);U^-(x,y)],$$
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial D^{s(r_j)}U_j^+(x,y)}\right) \equiv \left(a^+_{i,s(r_j)}(x,y)\right) \ge (\le)\ 0,$$
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial D^{s(r_j)}U_j^-(x,y)}\right) \equiv \left(a^-_{i,s(r_j)}(x,y)\right) \le (\ge)\ 0, \tag{7}$$
$$\left(a^+_{i,s(r_j)}\left(x,\theta_{2,j}^{s(r_j)}(x,y)\right)\right) \ge (\le)\ 0, \quad \left(a^-_{i,s(r_j)}\left(x,\theta_{2,j}^{s(r_j)}(x,y)\right)\right) \le (\ge)\ 0,$$
$$\left(a^+_{i,s(r_j)}\left(\theta_{1,j}^{s(r_j)}(x,y),y\right)\right) \ge (\le)\ 0, \quad \left(a^-_{i,s(r_j)}\left(\theta_{1,j}^{s(r_j)}(x,y),y\right)\right) \le (\ge)\ 0,$$
$$s(r_j) = \left(k_1^j, s_2^j-r_j\right), \quad i=\overline{1,n},$$

при r_j парних (непарних).

2. Модифікації двостороннього методу Зейделя. Позначимо

$$f_i^p = f_i\left[Z_p^*;V_p^*\right], \quad f_{i,p} = f_i\left[V_p^*;Z_p^*\right], \quad \bar f_i^p = f_i\left[\overline{Z}_p;\overline{V}_p\right],$$
$$\bar f_{i,p} = f_i\left[\overline{V}_p;\overline{Z}_p\right], \quad Z_p^* = (z_{1,p+1},\ldots,z_{i-1,p+1},\bar z_{i,p},\ldots,\bar z_{n,p}),$$
$$V_p^* = (v_{1,p+1},\ldots,v_{i-1,p+1},\bar v_{i,p},\ldots,\bar v_{n,p}), \quad \overline{Z}_p = (\bar z_{i,p}), \quad \overline{V}_p = (\bar v_{i,p}),$$

$$\bar{z}_{i,p} = z_{i,p}(x,y) - \alpha_{i,p}(x,y) w_{i,p}(x,y),$$
$$\bar{v}_{i,p} = v_{i,p}(x,y) + \alpha_{i,p}(x,y) w_{i,p}(x,y),$$
$$F^p = \left(f_i^p\right), \quad F_p = \left(f_{i,p}\right), \quad \overline{F}^p = \left(\bar{f}_i^p\right), \quad \overline{F}_p = \left(\bar{f}_{i,p}\right), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\alpha_p(x,y) = A^S Z_p(x,y) - \overline{F}^p, \quad \beta_p(x,y) = A^S V_p(x,y) - \overline{F}_p, \tag{8}$$

де $\alpha_{i,p}(x,y)$ — довільні із простору $C^{s^i}(\overline{B})$ функції, які задовольняють умови

$$D^{(k_1^i, r_i)} \alpha_{i,p}(x,y) \ge (\le)\ 0 \text{ при } r_i \text{ — парних (непарних),}$$
$$\sup_{\overline{B}} \left| D^{(k_1^i, r_i)} \alpha_{i,p}(x,y) \right| < 0{,}5, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x,y)\}$ і $\{V_p(x,y)\}$ за законом [4]:

$$Z_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \overline{E} \cup \overline{R}; \\ T\{F^p - C_p(F^p - F_p)\}, & (x,y) \in \overline{B}, \end{cases}$$
$$V_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \overline{E} \cup \overline{R}; \\ T\{F_p + C_p(F^p - F_p)\}, & (x,y) \in \overline{B}, \end{cases} \tag{10}$$

де $C_p = \left(\delta_{i,p} \cdot c_{i,j}^p(x,y)\right)$ — матриця, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, а $c_{i,j}^p(x,y)$ — довільні невід'ємні функції із простору $C(\overline{B})$, які задовольняють умови

$$\sup_{\overline{B}} c_{i,i}^p(x,y) < 0{,}5, \quad i = \overline{1,n}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

За нульове наближення вибираємо довільні функції порівняння $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, які в області $\overline{B}$ задовольняють умови

$$\alpha_0(x,y) \le 0, \quad \beta_0(x,y) \le 0. \tag{12}$$

Легко показати, що множина функцій нульового наближення не порожня. Із (8), (10) випливає справедливість формул

$$W_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \overline{E} \cup \overline{R}; \\ T\{(E - 2C_p)(F^p - F_p)\}, & (x,y) \in \overline{B}, \end{cases} \tag{13}$$

$$Z_p(x,y) - Z_{p+1}(x,y) =$$
$$= \begin{cases} 0, & (x,y) \in \overline{E} \cup \overline{R}; \\ T\{\alpha_p(\xi,\eta) + \overline{F}^p - F^p + C_p(F^p - F_p)\}, & (x,y) \in \overline{B}, \end{cases}$$
$$V_p(x,y) - V_{p+1}(x,y) = \tag{14}$$
$$= \begin{cases} 0, & (x,y) \in \overline{E} \cup \overline{R}; \\ T\{\beta_p(\xi,\eta) + \overline{F}_p - F_p - C_p(F^p - F_p)\}, & (x,y) \in \overline{B}, \end{cases}$$

$$\alpha_{p+1}(x,y) = F^p - \overline{F}^{p+1} - C_p(F^p - F_p),$$
$$\beta_{p+1}(x,y) = F_p - \overline{F}_{p+1} + C_p(F^p - F_p). \tag{15}$$

Приймаючи до уваги (9)–(15), переконуємось у справедливості наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай функції порівняння* (1)–(4) $Z_0(x,y)$ *і* $V_0(x,y)$ *при* $(x,y)\in \overline{B}$ *задовольняють умови* (12), *а права частина рівняння* (1) $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$.

Тоді якщо функції $\alpha_{i,p}(x,y)$, $c^p_{i,i}(x,y)$, $i=\overline{1,n}$, $p=0,1,2,\ldots$, *які задовольняють умови* (9), (11), *вибирати на кожному кроці ітерації таким чином, щоб в області* $\overline{D}$ *виконувались нерівності*

$$D^{S(r_i)}[(1-2\alpha_{i,p}(x,y)w_{i,p}(x,y)] \geq (\leq)\ 0,$$

$$D^{S(r_i)}[z_{i,p}(x,y)-z_{i,p+1}(x,y)-\alpha_{i,p}(x,y)w_{i,p}(x,y)] \geq (\leq)\ 0,$$

$$D^{S(r_i)}[v_{i,p}(x,y)-v_{i,p+1}(x,y)+\alpha_{i,p}(x,y)w_{i,p}(x,y)] \leq (\geq)\ 0,$$

$$F^p - \overline{F}^{p+1} - C_p(F^p - F_p) \geq 0, \quad F_p - \overline{F}_{p+1} + C_p(F^p - F_p) \leq 0,$$

при r_i *парних (непарних) і* $(x,y)\in\overline{B}$, *то послідовності вектор-функцій* $\{Z_p(x,y)\}$ *і* $\{V_p(x,y)\}$, *побудовані за законом* (10), *в області* $\overline{B}$ *збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного регулярного розв'язку узагальненої задачі Гурса* (1)–(4) $U(x,y)$, *причому*

$$A^{S(r)}V_p(x,y) \leq (\geq)\ A^{S(r)}U(x,y) \leq (\geq)\ A^{S(r)}Z_p(x,y) \tag{16}$$

при r *парних (непарних) та* $(x,y)\in\overline{B}$.

Покладемо в (10)

$$\begin{aligned} f_i^p &= f_i\big[v_{1,p+1},\ldots,v_{i-1,p+1},\overline{z}_{i,p},\ldots,\overline{z}_{n,p};\ z_{1,p+1},\ldots,z_{i-1,p+1},\overline{v}_{i,p},\ldots,\overline{v}_{n,p}\big], \\ f_{i,p} &= f_i\big[z_{1,p+1},\ldots,z_{i-1,p+1},\overline{v}_{i,p},\ldots,\overline{v}_{n,p};\ v_{1,p+1},\ldots,v_{i-1,p+1},\overline{z}_{i,p},\ldots,\overline{z}_{n,p}\big] \end{aligned} \tag{17}$$

і припустимо, що функції $\alpha_{i,p}(x,y)$ задовольняють умови (9), а елементи матриць C_p задовольняють нерівності

$$0{,}5 < \sup_{\overline{B}} c^p_{i,j}(x,y) \leq 1, \quad i=\overline{1,n}, \quad p=0,1,2,\ldots. \tag{18}$$

Тоді вірна наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай вектор-функції порівняння* (1)–(4) $Z_0(x,y)$ *і* $V_0(x,y)$ *і права частина рівняння* (1) $F[U(x,y)]$ *задовольняють умови теореми* 1.

Тоді якщо функції $\alpha_{i,p}(x,y)$ *і елементи матриць* C_p, *які задовольняють умови* (9), (18), *вибирати на кожному кроці ітерації таким чином, щоб в області* $\overline{D}$ *виконувались умови*

$$\begin{gathered} D^{s(r_i)}[(1-2\alpha_{i,2p}(x,y)w_{i,2p}(x,y)] \geq (\leq)\ 0, \\ D^{s(r_i)}[(1-2\alpha_{i,2p+1}(x,y)w_{i,2p+1}(x,y)] \leq (\geq)\ 0, \\ D^{s(r_i)}[z_{i,2p}(x,y)-v_{i,2p+1}(x,y)-\alpha_{i,2p}(x,y)w_{i,2p}(x,y)] \geq (\leq)\ 0, \\ D^{s(r_i)}[z_{i,2p+1}(x,y)-v_{i,2p+2}(x,y)-\alpha_{i,2p+1}(x,y)w_{i,2p+1}(x,y)] \leq (\geq)\ 0, \\ D^{s(r_i)}[v_{i,2p}(x,y)-z_{i,2p+1}(x,y)+\alpha_{i,2p}(x,y)w_{i,2p}(x,y)] \leq (\geq)\ 0, \\ D^{s(r_i)}[v_{i,2p+1}(x,y)-z_{i,2p+2}(x,y)+\alpha_{i,2p+1}(x,y)w_{i,2p+1}(x,y)] \geq (\leq)\ 0, \\ F^{2p} - \overline{F}^{2p+1} - C_{2p}(F^{2p}-F_{2p}) \leq 0, \\ F_{2p} - \overline{F}_{2p+1} + C_{2p}(F^{2p}-F_{2p}) \geq 0, \end{gathered} \tag{19}$$

$$F^{2p+1} - \overline{F}^{2p+2} - C_{2p+1}(F^{2p+1} - F_{2p+1}) \geq 0,$$
$$F_{2p+1} - \overline{F}_{2p+2} + C_{2p+1}(F^{2p+1} - F_{2p+1}) \leq 0$$

при r_i *парних (непарних), то послідовності вектор-функцій* $\{Z_p(x,y)\}$ *і* $\{V_p(x,y)\}$, *визначені за законом* (10), (17), *збігаються абсолютно і рівномірно при* $(x,y) \in \overline{B}$ *до єдиного регулярного розв'язку узагальненої задачі* Гурса (1)–(4), *причому в області* $\overline{D}$ *виконуються нерівності*

$$A^{S(r)}V_{2p}(x,y) \leq (\geq)\ A^{S(r)}Z_{2p+1}(x,y) \leq (\geq)\ A^{S(r)}U(x,y) \leq (\geq)$$
$$\leq (\geq)\ A^{S(r)}V_{2p+1}(x,y) \leq (\geq)\ A^{S(r)}Z_{2p}(x,y)$$

при r *парних (непарних).*

Зауваження. а) Якщо довільні функції порівняння задачі (1)–(4) $Z_0(x,y)$ і $V_0(x,y)$ в області $\overline{D}$ задовольняють умови

$$A^S Z_0(x,y) - F[Z_0(x,y); V_0(x,y)] \geq 0,$$
$$A^S V_0(x,y) - F[V_0(x,y); Z_0(x,y)] \leq 0,$$

то вони задовольняють і умови (12).

б) Чим більше число функцій $\alpha_{i,p}(x,y)$, $c^p_{l,i}(x,y)$, $i = \overline{1,n}$, відмінних від нуля, входить в ітераційний процес (10), тим збіжність його краща.

3. Достатні умови існування знакосталих розв'язків та теорема порівняння.

Теорема 3. *Нехай права частина рівняння* (1) $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ *і в просторі* $C_n^S(\overline{B})$ *існує така вектор-функція* $Z_0(x,y)$ $(V_0(x,y))$, *яка задовольняє умови* (1)–(4), *що*

$$A^{S(r)}Z_0(x,y) \geq (\leq)\ 0 \quad (A^{S(r)}V_0(x,y) \leq (\geq)\ 0)$$

при r *парних (непарних), і*

$$A^S Z_0(x,y) - F[Z_0(x,y); 0] \geq 0, \quad F[0; Z_0(x,y)] \geq 0$$
$$(A^S V_0(x,y) - F[V_0(x,y); 0] \leq 0, \quad F[0; V_0(x,y)] \leq 0).$$

Тоді розв'язок узагальненої задачі Гурса для рівняння (1) *з однорідними умовами* (2), (3) *задовольняє при* $(x,y) \in \overline{B}$ *нерівності*

$$A^{S(r)}U(x,y) \geq (\leq)\ 0 \quad (A^{S(r)}U(x,y) \leq (\geq)\ 0) \tag{20}$$

при r *парних (непарних).*

Відмітимо, що якщо права частина рівняння (1) $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ і $F[U(x,y)] \equiv F[U^+(x,y); 0]$ $(F[U(x,y)] \equiv F[0; U^-(x,y)])$, то для виконання умов (20) достатньо вимагати, щоб в області $\overline{D}$ були справедливі нерівності $F[0] \geq 0$ $(F[0] \leq 0)$.

Розглянемо узагальнену задачу Гурса у випадку двох лінійних систем диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, вигляду

$$A^S Z(x,y) = \sum_{S(r)<S} \Big[Q^{(1)}_{S(r)}(x,y)\, A^{S(r)} Z(x,y) +$$
$$+ Q^{(2)}_{S(r)}(x,y)\, A^{S(r)} Z\big(x, \theta_2^{S(r)}(x,y)\big) +$$
$$+ Q^{(3)}_{S(r)}(x,y)\, A^{S(r)} Z\big(\theta_1^{S(r)}(x,y), y\big) + F_1(x,y)\Big], \tag{21}$$

$$A^{S}V(x,y) = \sum_{S(r)<S} \Big[P^{(1)}_{S(r)}(x,y)\, A^{S(r)}V(x,y) + $$
$$+ P^{(2)}_{S(r)}(x,y)\, A^{S(r)}V\big(x, \theta_2^{S(r)}(x,y)\big) +$$
$$+ P^{(3)}_{S(r)}(x,y)\, A^{S(r)}V\big(\theta_1^{S(r)}(x,y), y\big) + F_2(x,y)\Big], \tag{22}$$

де $F_\mu(x,y) = \left(f_i^{(\mu)}(x,y)\right)$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = 1, 2$, — задані вектор-функції $Q^{(\nu)}_{S(r)}(x,y) = \left(q_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y)\right)$, $P^{(\nu)}_{S(r)}(x,y) = \left(p_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y)\right)$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = 1, 2, 3$, — відомі матриці, $Z(x,y) = (z_i(x,y))$, $V(x,y) = (v_i(x,y))$ — шукані вектор-функції, а кусково-неперервні функції в області $\overline{B}$ $f_i^{(\mu)}(x,y)$, $q_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y)$, $p_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y)$ задовольняють умови

$$f_i^{(\mu)}(x,y) \geq 0, \quad q_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y) \geq (\leq)\ 0, \quad p_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y) \geq (\leq)\ 0, \tag{23}$$

$\mu = 1, 2$, $j = \overline{1,n}$, $\nu = 1, 2, 3$, при r_j парних (непарних). Згідно з теоремою 3, розв'язки систем (21), (22) задовольняють при $(x,y) \in \overline{B}$ нерівності $A^{S(r)}Z(x,y) \geq (\leq)\ 0$, $A^{S(r)}V(x,y) \geq (\leq)\ 0$ при r парних (непарних).

Теорема 4. *Нехай для кусково-неперервних елементів матриць* $Q^{(\nu)}_{S(r)}(x,y)$, $P^{(\nu)}_{S(r)}(x,y)$ *і вектор-функцій* $F_\mu(x,y))$, *які задовольняють умови* (23), *в області* $\overline{B}$ *виконуються нерівності*

$$f_i^{(1)}(x,y) \geq f_i^{(2)}(x,y), \quad q_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y) - p_{i,j}^{(\nu)s(r_j)}(x,y) \geq (\leq)\ 0,$$
$$i,\ j = \overline{1,n}, \quad \nu = 1, 2, 3,$$

при r_j *парних (непарних).*

Тоді для розв'язків задач Гурса (21), (2), (3) і (22), (2), (3) *при* $(x,y) \in \overline{B}$ *маємо*

$$A^{S(r)}Z(x,y) \geq (\leq)\ A^{S(r)}V(x,y) \text{ при } r \text{ парних (непарних)}.$$

Використовуючи результати теореми 4 та ідеї методу „тронсонів", який для лінійних звичайних диференціальних рівнянь запропонував академік М.М. Крилов [5], наведемо один підхід побудови у просторі $C(\overline{B})$ двосторонніх наближень до розв'язку задачі Гурса: в області B знайти розв'язок диференціального рівняння

$$D^{(1.1)}u(x,y) + a_1 D^{(1.0)}u(x,y) + a_2 D^{(0.1)}u(x,y) + a_3 u(x,y) = f(x,y), \tag{24}$$

який задовольняє умови

$$U(x_0, y) = \Phi(y), \quad U(x, y_0) = \Psi(x), \quad \Phi(y_0) = \Psi(x_0), \tag{25}$$

де

$$\Phi(y) \in C^1[y_0 - b, y_0], \quad \Psi(x) \in C^1[x_0, x_0 + a],$$
$$a_\nu = a_\nu(x,y), \quad f(x,y) \in C(\overline{B}), \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{26}$$
$$f(x,y) \leq 0, \quad a_1(x,y) \geq 0, \quad a_2(x,y) \geq 0, \quad a_3(x,y) \leq 0,$$
$$\Phi(y) \geq 0, \quad \Phi'(y) \leq 0, \quad \Psi(x) \geq 0, \quad \Psi'(x) \geq 0, \quad (x,y) \in \overline{B}.$$

На підставі теореми 3 розв'язок задачі (24), (25), в силу умов (26), невід'ємний, причому якщо $a_\nu(x,y)$, $\nu = 1, 2, 3$, є сталими, то він має вигляд [3]

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \int_{x_0}^{x} \int_y^{y_0} \Big[4a_4\zeta_1^{-2}\psi(x_0)\,\mathrm{ch}\,(\zeta_1\cos\theta) +$$

$$+ (y_0-y)^{-1}\psi'(\xi)\,\mathrm{ch}\,(\zeta_2\cos\theta) - (x-x_0)^{-1}\varphi'(\eta)\,\mathrm{ch}\,(\zeta_3\cos\theta) -$$

$$- F(\xi,\eta)\,\mathrm{ch}\,(\zeta\cos\theta)\Big]\,d\eta\, d\xi\, d\theta\cdot\exp(-a_1y - a_2x), \qquad (27)$$

де

$$\varphi(y) = \Phi(y)\exp(a_1y + a_2x),$$

$$\psi(x) = \Psi(x)\exp(a_1y + a_2x),$$

$$F(x,y) = f(x,y)\exp(a_1y + a_2x), \quad a_4 = a_3 - a_1a_2,$$

$$\zeta = 2\sqrt{a_4(x-\xi)(\eta-y)}, \quad \zeta_1 = 2\sqrt{a_4(x-x_0)(y_0-y)},$$

$$\zeta_2 = 2\sqrt{a_4(x-\xi)(y_0-y)}, \quad \zeta_3 = 2\sqrt{a_4(x-x_0)(\eta-y)}.$$

Припустимо тепер, що коефіцієнти $a_\nu(x,y)$ рівняння (24) не є сталими. Для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (24)–(26) покриваємо область B сіткою із кроками $h_1 = a/N_1$ по осі Ox і $h_2 = b/N_2$ по осі Oy.

Позначимо

$$x_i = x_0 + (i-1)h_1, \quad y_j = y_0 - (j-1)h_2; \quad i = \overline{1,N_1}, \quad j = \overline{1,N_2},$$

$$a_\nu^{+i,j} = \sup_{\overline{B}_{i,j}} a_\nu(x,y), \quad a_\nu^{-i,j} = \inf_{\overline{B}_{i,j}} a_\nu(x,y), \quad \nu = 1,2,3,$$

$$B_{i,j} = \{(x,y)\mid x\in(x_0 + (i-1)h_1, x_0 + ih_1),$$
$$y\in(y_0 - jh_2, y_0 - (j-1)h_2)\}$$

і розглянемо задачі Гурса:

В області $\overline{B}_{i,j}$ знайти розв'язок рівнянь

$$D^{(1.1)}u^+_{i,j}(x,y) + a_1^{+i,j}D^{(1.0)}u^+_{i,j}(x,y) + a_2^{-i,j}D^{(0.1)}u^+_{i,j}(x,y) +$$
$$+ a_3^{+i,j}u^+_{i,j}(x,y) = f(x,y), \qquad (28)$$

$$D^{(1.1)}u^-_{i,j}(x,y) + a_1^{-i,j}D^{(1.0)}u^-_{i,j}(x,y) + a_2^{+i,j}D^{(0.1)}u^-_{i,j}(x,y) +$$
$$+ a_3^{-i,j}u^-_{i,j}(x,y) = f(x,y), \qquad (29)$$

які задовольняють умови

$$u^\pm_{i,j}(x_0 + (i-1)h_1, y) = u^\pm_{i-1,j}(x_0 + (i-1)h_1, y),$$
$$u^\pm_{i,j}(x, y_0 - (j-1)h_2) = u^\pm_{i,j-1}(x, y_0 - (j-1)h_2). \qquad (30)$$

Очевидно $u^\pm_{0,j}(x_0,y) = \Phi(y)$, $u^\pm_{i,0}(x,y_0) = \Psi(x)$, а отже, застосовуючи формулу (27), послідовно знаходимо розв'язки задач (28), (30) та (29), (30) в областях $B_{i,j}$, $i = \overline{1,N_1}$, $j = \overline{1,N_2}$.

Позначимо

$$u_h^{\pm}(x,y) = 0{,}25 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (1-\operatorname{sgn}[(x-x_{i+1})(x-x_i)]) \times$$
$$\times (1-\operatorname{sgn}[(y-y_{j+1})(y-y_j)])\, u_{i,j}^{\pm}(x,y), \quad (x,y)\in \overline{B}. \tag{31}$$

На підставі теореми 4 справедливі нерівності $u_h^-(x,y) \le u(x,y) \le u_h^+(x,y)$ при $(x,y)\in \overline{B}$, тобто побудовані функції (31) є двосторонніми наближеннями до розв'язку задачі Гурса (24)–(26).

Зауважимо, якщо в рівнянні (24) $a_1(x,y)\in C^{(1.0)}(\overline{B})$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(\overline{B})$ і $D^{(1.0)}a_1(x,y) = D^{(0.1)}a_2(x,y)$, то, ввівши нову невідому функцію $Z(x,y)$ за формулою

$$u(x,y) = Z(x,y)\exp\left(-\int_{y_0}^{y} a_1(x,\tau)\,d\tau - \int_{x_0}^{x} a_2(\tau,y_0)\,d\tau\right), \tag{32}$$

задачу (24), (25) зведемо до задачі вигляду

$$\begin{gathered} D^{(1.1)}Z(x,y) + d(x,y)Z(x,y) = F(x,y), \\ Z(x_0,y) = \Phi_1(y), \quad Z(x,y_0) = \Psi_1(x), \end{gathered} \tag{33}$$

де

$$d(x,y) = a_3(x,y) - a_1(x,y)a_2(x,y) - D^{(1.0)}a_1(x,y),$$

$$F(x,y) = f(x,y)\exp\left(\int_{y_0}^{y} a_1(x,\tau)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} a_2(\tau,y_0)\,d\tau\right),$$

$$\Phi_1(y) = \Phi(y)\exp\left(\int_{y_0}^{y} a_1(x_0,\tau)\,d\tau\right), \quad \Psi_1(x) = \Psi(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a_2(\tau,y_0)\,d\tau\right).$$

Нехай

$$\Phi(y) = \Psi(x) = 0, \quad d(x,y)\ge 0, \quad f(x,y) \ge (\le)\ 0. \tag{34}$$

Тоді на підставі теореми 3 розв'язок задачі Гурса (33) $Z(x,y) \ge (\le)\ 0$ при $(x,y)\in \overline{B}$. Але згідно з формулою (32) функція $u(x,y)$ в області $\overline{B}$ буде також невід'ємною (недодатною) при виконанні умов (34), і ми одержали ще одну достатню умову існування знакосталих розв'язків задачі (24), (25).

1. *Ковач Ю. И.* Об одном методе исследования сходимости итерационного процесса для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 2. – С. 165–175.
2. *Ковач Ю. И.* Итерационный метод интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом // Материалы XXXI итог. науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. – Ужгород, 1978. – С. 39–71. – Деп. в ВИНИТИ. № 3131–78 Деп.
3. *Kreith K., Swanson C. A.* Boundedness criteria for hyperbolic characteristic initial value problems // Lect. Notes. Math. – 1983. – **1032**. – P. 298–310.
4. *Маринец В. В.* О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1393–1397.
5. *Крылов Н. М.* Избранные труды в трех томах. – Киев: Изд-во АН УССР, 1961. – Т. 2. – 308 с.

Одержано 09.08.93