УДК 517.946.9

Г. Н. Комаров, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ И УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ

Generalized orthogonality conditions are established and a theorem about completeness of eigenfunctions is proved for a spectral problem with a parameter in the boundary conditions and in the conjunction conditions, imposed on piecewise homogeneous bounded connected and disconnected domains.

Встановлені умови узагальненої ортогональності і доведена теорема про повноту власних функцій спектральної задачі з параметром в крайових умовах та умовах спряження для кусково-однорідних обмежених зв'язних і незв'язних областей.

1. Постановка задачи. Решение начально-краевых задач для параболических уравнений в кусочно-однородных средах приводит в ряде случаев к разложению в ряды Фурье по собственным функциям спектральных задач, содержащих параметр как в краевых условиях, так и в условиях сопряжения [1–8]. При этом возникают вопросы обобщенной ортогональности собственных функций. Не ограничивая общности, рассмотрим такую спектральную задачу для ограниченной составной области $\Omega \in E^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, разделенной достаточно гладкой поверхностью Φ на две подобласти Ω_1 и Ω_2: $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$.

В каждой из подобластей Ω_i, $i = 1, 2$, требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \varphi) + \mu^2 c\varphi = 0, \quad x \in \Omega_1 \bigcup \Omega_2, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям сопряжения на Φ

$$\left[\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\Phi - \mu^2 C\varphi = 0, \quad [\varphi]_\Phi = 0, \quad x \in \Phi = \Omega_1 \bigcap \Omega_2, \tag{2}$$

и краевому условию

$$\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi - \mu^2 C_0 \varphi = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Здесь φ — искомая собственная функция, соответствующая собственному значению μ; функции λ, c, α принимают постоянные значения в каждой из областей Ω_1 и Ω_2, а также на поверхностях $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$; C_0, C — постоянные величины; символ $[\cdot]_\Phi$ означает скачок стоящей под ним функции при переходе через поверхность Φ; $\bar{n}$ — орт нормали, внешней к $\partial\Omega$ в краевом условии (3), и нормали к Φ, направленной из Ω_1 в Ω_2 в условии сопряжения (2).

Уравнения (1)–(3) представляют в совокупности спектральную задачу, содержащую параметр в краевом условии и условии сопряжения. Задачу (1)–(3) перепишем в виде

$$-\frac{1}{c} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \varphi) = \mu^2 \varphi, \quad x \in \Omega_1 \bigcup \Omega_2, \tag{1'}$$

$$\frac{1}{C} \left[\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\Phi = \mu^2 \varphi, \quad [\varphi]_\Phi = 0, \quad x \in \Phi = \Omega_1 \bigcap \Omega_2, \tag{2'}$$

$$\frac{1}{C_0} \left(\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi\right) = \mu^2 \varphi, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3'}$$

Последняя может быть представлена в виде символического равенства

$$L\varphi = \mu^2\varphi, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Здесь оператор L действует в гильбертовом пространстве $H^L = L_2(\Omega_1) \oplus \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\Phi)$, элементами которого являются функции $\varphi(x)$ с суммируемыми квадратами соответственно на Ω_1, Ω_2 и Φ. В качестве области определения оператора L выберем множество функций $\varphi(x)$, дважды непрерывно дифференцируемых в каждой из подобластей Ω_i, $i = 1, 2$, и непрерывных на поверхности раздела Φ. Закон действия оператора L в подобластях Ω_1, Ω_2 на поверхности Φ и на границе $\partial\Omega$ определяется согласно (1′)–(3′).

2. Обобщенная ортогональность. Введем в рассмотрение скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi(x)\, \psi(x)\, c\, dv + \int\limits_{\Phi} \varphi(x)\, \psi(x)\, C\, ds + \oint\limits_{\partial\Omega} \varphi(x)\, \psi(x)\, C_0\, ds. \tag{5}$$

Теорема 1. *В пространстве интегрируемых с квадратом достаточно гладких функций* $\varphi(x)$, $x \in (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cup (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup \partial\Omega$, *со скалярным произведением* (5) *дифференциальный оператор* L *является положительным и симметричным, а его собственные функции* $\varphi_n(x)$ *ортогональны в смысле скалярного произведения* (5).

Действительно, учитывая закон действия (1′)–(3′) оператора L и используя первую формулу Грина, получаем

$$(L\varphi, \varphi) = -\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \varphi)\, \varphi\, dv + \int\limits_{\Phi} \left[\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_{\Phi} \varphi\, ds +$$

$$+ \oint\limits_{\partial\Omega} \left(\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi\right) \varphi\, ds = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\lambda \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi)\, dv +$$

$$+ \int\limits_{\Phi} \lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \varphi\, ds - \int\limits_{\Phi} \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \varphi\, ds - \oint\limits_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} \varphi\, ds + \int\limits_{\Phi} \left[\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_{\Phi} \varphi\, ds +$$

$$+ \oint\limits_{\partial\Omega} \left(\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi\right) \varphi\, ds = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\lambda \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi)\, dv + \oint\limits_{\partial\Omega} \alpha\varphi^2\, ds \geq 0.$$

Это неравенство показывает, то оператор L положителен.

Используя вторую формулу Грина, последовательно находим

$$(L\varphi, \psi) = -\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \varphi)\, \psi\, dv +$$

$$+ \oint\limits_{\partial\Omega} \left(\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi\right) \psi\, ds + \int\limits_{\Phi} \left[\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_{\Phi} \psi\, ds =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \psi)\, \varphi\, dv - \oint\limits_{\partial\Omega} \left(\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} \psi - \lambda \frac{\partial\psi}{\partial n} \varphi\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{\Phi} \left(\lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \psi - \lambda_1 \frac{\partial\psi}{\partial n} \varphi\right) ds - \int\limits_{\Phi} \left(\lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \psi - \lambda_2 \frac{\partial\psi}{\partial n} \varphi\right) ds +$$

$$+ \oint\limits_{\partial\Omega} \left(\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi\right) \psi\, ds + \int\limits_{\Phi} \left[\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_{\Phi} \psi\, ds =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \psi)\, \varphi\, dv + \oint\limits_{\partial\Omega} \left(\lambda \frac{\partial\psi}{\partial n} + \alpha\psi\right) \varphi\, ds +$$

$$+ \int_{\Phi} \left[\lambda \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{\Phi} \varphi \, ds = ((\varphi, L\psi)).$$

Ортогональность собственных функций $\varphi_n(x)$ и $\varphi_k(x)$, соответствующих различным собственным значениям μ_n и μ_k, спектральной задачи (1)–(3) в смысле скалярного произведения (5) следует из симметричности оператора L

$$((L\varphi_n, \varphi_k)) - ((\varphi_n, L\varphi_k)) = \left(\mu_n^2 - \mu_k^2\right)((\varphi_n, \varphi_k)) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\varphi_n, \varphi_k)) = 0, \quad n \neq k.$$

Не затрагивая вопросов дискретности спектра собственных значений μ_n и полноты собственных функций $\varphi_n(x)$, отметим, что формально они могут быть использованы при разложении достаточно гладких функций в ряды Фурье вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{6}$$

где коэффициенты Фурье c_n определяются по формуле

$$c_n = \langle\langle \varphi_n \rangle\rangle^{-2} \left\{ \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} u(x)\, \varphi_n(x)\, c\, dv + \int_{\Phi} u(x)\, \varphi_n(x)\, C\, ds + \right.$$
$$\left. + \oint_{\partial\Omega} u(x)\, \varphi_n(x)\, C_0\, ds \right\},$$
$$\langle\langle \varphi_n \rangle\rangle^2 = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi_n^2(x)\, c\, dv + \int_{\Phi} \varphi_n^2(x)\, C\, ds + \oint_{\partial\Omega} \varphi_n^2(x)\, C_0\, ds.$$

Если область Ω разделяется поверхностями Φ_i, не имеющими общих точек, то в соответствующей спектральной задаче (1)–(3) условия сопряжения заменяются на

$$\left[\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\Phi_i} - \mu^2 C_i \varphi = 0, \quad [\varphi]_{\Phi_i} = 0, \quad x \in \Phi_i = \Omega_i \cap \Omega_{i+1}, \tag{7}$$

а скалярное произведение (5) принимает вид

$$((\varphi, \psi)) = \int_{\sum \Omega_i} \varphi(x)\, \psi(x)\, c\, dv + \sum_j \int_{\Phi_j} \varphi(x)\, \psi(x)\, C_j\, ds +$$
$$+ \oint_{\partial\Omega} \varphi(x)\, \psi(x)\, C_0\, ds. \tag{8}$$

Отметим, что в проблемах тепловых и диффузионных расчетов возникают нестационарные эволюционные задачи, приводящие к необходимости рассмотрения спектральных задач вида

$$\mathfrak{L}\varphi = \mu^2 \mathfrak{M}\varphi, \tag{9}$$

где $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ — линейные операторы с определенными законами действия в подобластях основной области Ω, на ее границе $\partial\Omega$ и поверхностях раздела Φ_i. Рассмотрим одну из таких задач.

3. Одномерные задачи для несвязных областей. К простейшим спектральным задачам с параметром в краевых условиях и условиях сопряжения для несвязных областей относятся одномерные задачи вида

$$-L\varphi = \mu^2 \rho \varphi, \quad x \in U = \{x: (x_0, x_1) \cup (x_2, x_3)\},$$

$$-\left\{\alpha_{11}^{(1)}\frac{d\varphi}{dx}+\beta_{11}^{(1)}\varphi\right\}=\mu^2\left\{\gamma_{11}^{(1)}\frac{d\varphi}{dx}+\gamma_{12}^{(1)}\varphi\right\},\quad x=x_0,$$

$$-\left\{\alpha_{11}^{(2)}\frac{d\varphi(x_1)}{dx}+\beta_{11}^{(2)}\varphi(x_1)\right\}+\left\{\alpha_{12}^{(2)}\frac{d\varphi(x_2)}{dx}+\beta_{12}^{(2)}\varphi(x_2)\right\}=$$

$$=\mu^2\left\{\gamma_{11}^{(2)}\frac{d\varphi(x_1)}{dx}+\gamma_{12}^{(2)}\varphi(x_1)\right\},\tag{10}$$

$$\gamma_{11}^{(2)}\frac{d\varphi(x_1)}{dx}+\gamma_{12}^{(2)}\varphi(x_1)=\gamma_{21}^{(2)}\frac{d\varphi(x_2)}{dx}+\gamma_{22}^{(2)}\varphi(x_2),$$

$$\alpha_{22}^{(3)}\frac{d\varphi}{dx}+\beta_{22}^{(3)}\varphi=\mu^2\left(\gamma_{21}^{(3)}\frac{d\varphi}{dx}+\gamma_{22}^{(3)}\varphi\right),\quad x=x_3.$$

Здесь L — оператор Штурма–Лиувилля, $L=\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{d}{dx}\right)-q$; $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ — кусочно-непрерывные функции $\kappa(x)=\kappa_1(x)+(\kappa_3(x)-\kappa_1(x))\,\eta(x-$ $-x_2)$ ($\kappa=p\vee q\vee\rho$; $\eta(x-x_2)$ — функция Хевисайда, знак „$\vee$" означает логическое „или"), сохраняющие знак на каждом из подынтервалов области U, а функция $p(x)$, кроме того, имеет непрерывную производную; $\alpha_{ij}^{(k)}$, $\beta_{ij}^{(k)}$, $\gamma_{ij}^{(k)}$, $k=1,2,3$; $i,j=1,2$, — постоянные величины.

Спектральная задача (10) не укладывается в схему спектральной задачи (1)–(3), так как параметр в краевых условиях и условиях сопряжения содержится при искомых функциях и их производных. Ее можно записать символически в виде (9), где законы действия линейных операторов $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ в области U, на ее границах $x=x_0$, $x=x_3$ и в точках связности $x=x_1$, $x=x_2$ рассматриваемой несвязной области U определяются соответствующими левыми и правыми частями задачи (10). К такого рода спектральным задачам приводят проблемы расчета тепловых процессов в кусочно-однородных слоистых средах с резко различающимися теплофизическими свойствами [5, 7, 8].

Теорема 2. *При указанных выше ограничениях гладкости на коэффициенты* $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ *и при выполнении следующих условий на параметры:*

$$\alpha_{11}^{(i)}\gamma_{12}^{(i)}-\beta_{11}^{(i)}\gamma_{11}^{(i)}=\Delta^{(i)}\neq 0,$$

$$\alpha_{i2}^{(i+1)}\gamma_{22}^{(i+1)}-\beta_{i2}^{(i+1)}\gamma_{21}^{(i+1)}=\Delta_i^{(i+1)}\neq 0,\quad i=1,2,$$

собственные значения спектральной задачи (10) *вещественны, положительны и образуют дискретный спектр, не имеющий конечной предельной точки. Соответствующие им собственные функции на каждом из подынтервалов области* U *являются дважды непрерывно дифференцируемыми целыми функциями параметра* μ. *Они образуют полную систему функций и ортогональны в смысле скалярного произведения*

$$((\varphi,\psi))=\int\limits_U\varphi(x)\,\psi(x)\,\rho(x)\,M(x)\,dx+\frac{1}{\Delta^{(1)}}\,M_1(p_1M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_0}+$$

$$+\frac{1}{2\Delta^{(2)}}\,M_1(p_1M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_1}+\frac{1}{2\Delta_1^{(2)}}\,M_3(p_3M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_2}+$$

$$+\frac{1}{\Delta_2^{(3)}}\,M_3(p_3M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_3},\tag{11}$$

где

$$
\begin{gathered}
(M\varphi)_{x=x_i} = \gamma_{11}^{(i+1)} \frac{d\varphi(x_i)}{dx} + \gamma_{12}^{(i+1)} \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \\
(M\varphi)_{x=x_j} = \gamma_{21}^{(j)} \frac{d\varphi(x_j)}{dx} + \gamma_{22}^{(j)} \varphi(x_j), \quad j = 2, 3,
\end{gathered} \tag{12}
$$

а $M(x)$ — весовая функция,

$$
M(x) = M_1 + (M_3 - M_1)\eta(x - x_2), \quad M_3 = \frac{p_1(x_1)\,\Delta_1^{(2)}}{p_3(x_2)\,\Delta^{(2)}} M_1. \tag{13}
$$

Отметим прежде всего, что скалярное произведение (11) вместе с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ содержит значения их производных в граничных точках несвязной области U. В соответствии с этим обстоятельством данное скалярное произведение имеет смысл для всех интегрируемых с квадратом функций с ограниченными значениями производных в указанных точках.

На каждом из подынтервалов области U собственная функция $\varphi(x)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения $L\varphi + \mu^2\rho\varphi = 0$ и, следовательно, при любом фиксированном x является целой аналитической функцией параметра μ. Общее решение этого уравнения в U содержит четыре произвольные постоянные. Удовлетворение двум краевым условиям и двум условиям сопряжения приводит к системе однородных уравнений, которая разрешима в случае равенства нулю ее определителя. Так как последний также является целой аналитической функцией параметра μ, то его обращение в нуль возможно только в счетном множестве собственных значений μ_n, не имеющем конечной предельной точки.

Для установления обобщенной ортогональности собственных функций воспользуемся второй формулой Грина для оператора L с подлежащей определению кусочно-постоянной весовой функцией $M(x)$:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_U (\psi L\varphi - \varphi L\psi)\, M(x)\, dx = \\
&= -\frac{M_1}{\alpha_{11}^{(1)}} \left\{ p_1 \left[\psi \left(\alpha_{11}^{(1)} \frac{d\varphi}{dx} + \beta_{11}^{(1)} \varphi \right) - \varphi \left(\alpha_{11}^{(1)} \frac{d\psi}{dx} + \beta_{11}^{(1)} \psi \right) \right] \right\}_{x=x_0} + \\
&+ M_1 \left[p_1 \left(\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx} \right) \right]_{x=x_1} - M_3 \left[p_3 \left(\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx} \right) \right]_{x=x_2} + \\
&+ \frac{M_3}{\alpha_{22}^{(3)}} \left\{ p_3 \left[\psi \left(\alpha_{22}^{(3)} \frac{d\varphi}{dx} + \beta_{22}^{(3)} \varphi \right) - \varphi \left(\alpha_{22}^{(3)} \frac{d\psi}{dx} + \beta_{22}^{(3)} \psi \right) \right] \right\}_{x=x_3}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Примем в этом равенстве в качестве φ и ψ собственные функции, отвечающие собственным значениям μ^2 и λ^2 соответственно. Тогда в силу дифференциального уравнения (10) получаем

$$
\psi L\varphi - \varphi L\psi = (\mu^2 - \lambda^2)\,\varphi\psi\rho. \tag{15}
$$

Преобразуем правую часть (14). Для этого воспользуемся краевыми условиями из (10) для функций φ и ψ в точке $x = x_0$

$$
\begin{gathered}
\left(\alpha_{11}^{(1)} \frac{d\varphi}{dx} + \beta_{11}^{(1)} \varphi \right)_{x=x_0} = -\mu^2 (M\varphi)_{x=x_0}, \\
\left(\alpha_{11}^{(1)} \frac{d\psi}{dx} + \beta_{11}^{(1)} \psi \right)_{x=x_0} = -\lambda^2 (M\psi)_{x=x_0}
\end{gathered} \tag{16}
$$

и эквивалентными им формами записи

$$\varphi(x_0) = \frac{\alpha_{11}^{(1)} + \mu^2\gamma_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}}(M\varphi)_{x=x_0}, \quad \psi(x_0) = \frac{\alpha_{11}^{(1)} + \lambda^2\gamma_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}}(M\psi)_{x=x_0}. \quad (17)$$

В результате первое слагаемое в правой части (14) после подстановок (16) и (17) преобразуется к виду

$$-\frac{M_1}{\alpha_{11}^{(1)}}\left\{p_1\left[\left(\alpha_{11}^{(1)} + \mu^2\gamma_{11}^{(1)}\right)\lambda^2 - \left(\alpha_{11}^{(1)} + \lambda^2\gamma_{11}^{(1)}\right)\mu^2\right]M\varphi\cdot M\psi\right\}_{x=x_0} =$$

$$= -(\lambda^2-\mu^2)\frac{M_1}{\Delta^{(1)}}(p_1\cdot M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_0}. \quad (18)$$

К такому же виду преобразуется и четвертое слагаемое в правой части (14):

$$-(\lambda^2-\mu^2)\frac{M_3}{\Delta_2^{(3)}}(p_3\cdot M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_3}. \quad (19)$$

Естественно, что преобразование краевых условий к эквивалентным формам вида (17) возможно только при выполнении условий теоремы

$$\Delta^{(1)} = \alpha_{11}^{(1)}\gamma_{12}^{(1)} - \beta_{11}^{(1)}\gamma_{11}^{(1)} \neq 0, \quad \Delta_2^{(3)} = \alpha_{22}^{(3)}\gamma_{22}^{(3)} - \beta_{22}^{(3)}\gamma_{21}^{(3)} \neq 0.$$

Гораздо сложнее осуществляется преобразование второго и третьего слагаемых в правой части (14). Так как по условию теоремы $\Delta^{(2)} = \alpha_{11}^{(2)}\gamma_{12}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)}\gamma_{11}^{(2)} \neq 0$, $\Delta_1^{(2)} = \alpha_{12}^{(2)}\gamma_{22}^{(2)} - \beta_{12}^{(2)}\gamma_{21}^{(2)} \neq 0$, после простых преобразований можно получить следующую эквивалентную форму условий сопряжения:

$$\frac{d\varphi(x_2)}{dx} = \frac{1}{\alpha_{12}^{(2)}}\left[\alpha_{11}^{(2)}\frac{d\varphi(x_1)}{dx} + \beta_{11}^{(2)}\varphi(x_1) - \beta_{12}^{(2)}\varphi(x_1) + \mu^2(M\varphi)_{x=x_1}\right],$$

$$\varphi(x_2) = -\frac{1}{\Delta_1^{(2)}}\left[\gamma_{21}^{(2)}\left(\alpha_{11}^{(2)}\frac{d\varphi(x_1)}{dx} + \beta_{11}^{(2)}\varphi(x_1)\right) - \right.$$

$$\left. - \alpha_{12}^{(2)}(M\varphi)_{x=x_1} + \mu^2\gamma_{21}^{(2)}(M\varphi)_{x=x_1}\right].$$

В силу этих условий третье слагаемое в (14) после простых, но довольно громоздких преобразований упрощается к виду

$$-M_3\frac{p_3(x_2)}{\Delta_1^{(2)}}\left[\Delta^{(2)}\left(\frac{d\varphi(x_1)}{dx}\psi(x_1) - \frac{d\psi(x_1)}{dx}\varphi(x_1)\right) + \right.$$

$$\left. + (\lambda^2-\mu^2)(M\varphi)_{x=x_1}(M\psi)_{x=x_1}\right].$$

В сумме со вторым слагаемым в правой части (14) получаем

$$\left[M_1 p_1(x_1) - M_3 p_3(x_2)\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta_1^{(2)}}\right]\left(\frac{d\varphi(x_1)}{dx}\psi(x_1) - \frac{d\psi(x_1)}{dx}\varphi(x_1)\right) -$$

$$-(\lambda^2-\mu^2)M_3\frac{p_3(x_2)}{\Delta_1^{(2)}}(M\varphi)_{x=x_1}(M\psi)_{x=x_1}. \quad (20)$$

Выберем значения M_1 и M_3 так, чтобы первое слагаемое в этом выражении обращалось в нуль. Для этого достаточно потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках было равно нулю, т. е. выполнялось условие (13) теоремы 2. В результате выражение (20) с учетом (13) преобразуется к виду

$$-(\lambda^2-\mu^2)\frac{1}{2\Delta^{(2)}}M_1(p_1\cdot M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_1}-$$

$$-(\lambda^2-\mu^2)\frac{1}{2\Delta_1^{(2)}}M_3(p_3\cdot M\varphi\cdot M\psi)_{x=x_2}. \tag{21}$$

После объединения (18), (19) и (21) и правая и левая части равенства (14) содержат общий множитель $(\lambda^2-\mu^2)$. Из этого следует условие обобщенной ортогональности собственных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, отвечающих различным собственным значениям в смысле скалярного произведения (11)

$$((\varphi,\psi)) = \begin{cases} 0, & \mu\neq\lambda; \\ \langle\langle\varphi\rangle\rangle^2, & \mu=\lambda, \end{cases} \tag{22}$$

где $\langle\langle\varphi\rangle\rangle^2 = ((\varphi,\varphi))$ — квадрат нормы, порождаемый скалярным произведением (11).

Так как собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, то его можно выбрать из условия $\langle\langle\varphi\rangle\rangle^2=1$, т. е. считать их ортонормированными.

Докажем полноту собственных функций $\varphi_n(x)$. Для этого достаточно показать, что для любой кусочно-постоянной функции на U с ограниченной нормой $-\langle\langle f\rangle\rangle^2<\infty$ имеет место обобщение условия полноты или равенство Парсеваля–Стеклова

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \langle\langle f\rangle\rangle^2, \tag{23}$$

где c_k^2 — коэффициенты Фурье в смысле скалярного произведения (11),

$$c_k = ((f,\varphi_k)). \tag{24}$$

Рассмотрим разность $f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k'\varphi_k(x)$, где c_k' — произвольные постоянные. Для квадрата нормы такой разности в силу ортонормированности собственных функций $\varphi_n(x)$ в смысле скалярного произведения (11) имеем

$$\left\langle\!\!\left\langle f-\sum_{k=1}^{n}c_k'\varphi_k\right\rangle\!\!\right\rangle^2 = \int_U\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k'\varphi_k(x)\right]^2\rho(x)M(x)dx\ +$$

$$+\ M_1\frac{p_1(x_0)}{\Delta^{(1)}}\left[\gamma_{11}^{(1)}\left(\frac{df(x_0)}{dx}-\sum_{k=1}^{n}c_k'\frac{d\varphi_k(x_0)}{dx}\right)+\right.$$

$$\left.+\ \gamma_{12}^{(1)}\left(f(x_0)-\sum_{k=1}^{n}c_k'\varphi_k(x_0)\right)\right]^2+$$

$$+\ M_1\frac{p_1(x_1)}{2\Delta^{(2)}}\left[\gamma_{11}^{(2)}\left(\frac{df(x_1)}{dx}-\sum_{k=1}^{n}c_k'\frac{d\varphi_k(x_1)}{dx}\right)+\right.$$

$$\left.+\ \gamma_{12}^{(2)}\left(f(x_1)-\sum_{k=1}^{n}c_k'\varphi_k(x_1)\right)\right]^2+$$

$$+\ M_3\frac{p_3(x_2)}{2\Delta_1^{(2)}}\left[\gamma_{21}^{(2)}\left(\frac{df(x_2)}{dx}-\sum_{k=1}^{n}c_k'\frac{d\varphi_k(x_2)}{dx}\right)+\right.$$

$$+ \gamma_{22}^{(2)} \left(f(x_2) - \sum_{k=1}^{n} c'_k \varphi_k(x_2) \right) \Bigg]^2 +$$

$$+ M_3 \frac{p_3(x_3)}{\Delta_2^{(3)}} \Bigg[\gamma_{21}^{(3)} \left(\frac{df(x_3)}{dx} - \sum_{k=1}^{n} c'_k \frac{d\varphi_k(x_3)}{dx} \right) +$$

$$+ \gamma_{22}^{(3)} \left(f(x_3) - \sum_{k=1}^{n} c'_k \varphi_k(x_3) \right) \Bigg]^2 =$$

$$= \langle\langle f \rangle\rangle^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - c'_k)^2. \tag{25}$$

Из этого равенства при $c'_k = c_k$ следует обобщение неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \langle\langle f \rangle\rangle^2. \tag{26}$$

В силу равенства (25) при $c'_k = c_k$ можно утверждать следующее: система собственных функций будет полной, если справедливо предельное равенство

$$\lim_{n \to \infty} \left\langle\!\!\left\langle f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\rangle\!\!\right\rangle^2 = 0.$$

Последнее означает, что сумма $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$ стремится к $f(x)$ по норме, порождаемой скалярным произведением (11).

Установленные условия обобщенной ортогональности и полноты собственных функций $\varphi_n(x)$ позволяют производить разложения произвольных функций из пространства со скалярным произведением (11) в ряды Фурье, т. е. справедлива теорема Стеклова о разложении.

1. *Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф.* К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 740–748.
2. *Комаров Г. Н.* О собственных функциях и собственных значениях систем дифференциальных уравнений и разложении произвольной вектор-функции // Мат. физика. – 1968. – Вып. 4. – С. 66–77.
3. *Березовский А. А., Нижник Л. П.* Электромагнитное поле в прямоугольном канале с проводящими стенками // Краевые задачи математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 52–59.
4. *Митропольский Ю. А., Нижник Л. П., Кульчицкий В. Л.* Нелинейные задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии. – Киев, 1974. – 31 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 74.15).
5. *Березовская Л. М.* Нестационарные тепловые поля теплопередающих стенок с резко различающимися теплофизическими характеристиками // Краевые задачи математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 12–21.
6. *Нижник Л. П., Тараборкин Л. А.* Краевые задачи для уравнения теплопроводности с производной по времени в условиях сопряжения // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 1. – С. 121–126.
7. *Комаров Г. Н., Мотовиловец И. А.* Нестационарное температурное поле многослойной стенки // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 52–60.
8. *Комаров Г. М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності // Краевые задачи математической физики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 56–62.

Получено 26.07.95