УДК 517.956.223

В. А. Елеев, канд. физ.-мат. наук (Кабардино-Балк. ун-т, Нальчик)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

For a mixed second order equation of hyperbolic-parabolic type, we prove uniqueness of a solution of boundary-value problems.

Доведено однозначну розв'язуваність крайових задач для мішаного рівняння другого порядку гіперболо-параболічного типу.

Пусть Ω — конечная односвязная область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0 и A_0B_0 прямых $x=0$, $x=l$ и $y=h$ соответственно, расположенных в полуплоскости $y>0$, и характеристиками

$$AC:\ \xi = x - \frac{2}{\chi+2}(-y)^{(\chi+2)/2} = 0,$$

$$BC:\ \eta = x + \frac{2}{\chi+2}(-y)^{(\chi+2)/2} = l$$

оператора $L_\chi = \partial^2/\partial y^2 - (-y)^\chi \partial^2/\partial x^2$, $\chi = \text{const}$, выходящими из точки $C(1/2, y_c)$, $y_c = -[(\chi+2)/4]^{2/(\chi+2)}$.

Части области Ω, для которых $y>0$ и $y<0$, обозначим через Ω_1 и Ω_2; J — интервал $0<x<l$ прямой $y=0$.

В области Ω рассмотрим нагруженное уравнение гиперболо-параболического типа

$$0 = \begin{cases} Lu + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_i(x,y) D_{0y}^{\overline{\alpha}_i} k_j(x,y) u(x^j, y) = f(x,y), & y>0; \\ L_\chi u - b_0(x,y)u + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,y) D_{0x}^{\rho_i} u(x,0) = d(x,y), & y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $Lu = u_y - \theta u_{xx} + a_0(x,y)u$, $\theta = \text{const} > 0$, $D_{0y}^{\overline{\alpha}_i}\left(D_{0x}^{\rho_i}\right)$ — операторы дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегрирования порядка $-\overline{\alpha}_i(-\rho_i)$ при $\alpha_i<0$ $(\rho_i<0)$ и дробного дифференцирования порядка $\overline{\alpha}_i(\rho_i)$ при $\overline{\alpha}_i>0$ $(\rho_i>0)$, который при $\overline{\alpha}_i<1$ $(\rho_i<1)$ задается формулой [1, 2]

$$D_{0y}^{\overline{\alpha}_i} f\left(D_{0x}^{\rho_i} f\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\overline{\alpha}_i)} \displaystyle\int_0^y \frac{f(t)\,dt}{(y-t)^{1+\overline{\alpha}_i}} \left(\frac{1}{\Gamma(-\rho_i)} \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+\rho_i}}\right), & \alpha_i<0\ (\rho_i<0); \\ \dfrac{d}{dy} D_{0y}^{\overline{\alpha}_i - 1} f(y) \left(\dfrac{d}{dx} D_{0x}^{\rho_i} f(x)\right), & \overline{\alpha}_i>0\ (\rho_i>0). \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что x^j, $j=\overline{1,m}$, — фиксированные точки из интервала $(0,l)$, причем для определенности будем считать, что $0 \le x^1 < \ldots < x^m < l$, $\overline{\alpha}_k < \overline{\alpha}_{k-1} < \ldots < \overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}$.

Задача A_α^β. Найти регулярное в области Ω, $y \neq 0$ решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \gamma_1(y), \tag{3}$$

$$\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = \gamma_2(y), \tag{4}$$

$$u\big|_{AC} = \psi(x), \tag{5}$$

где γ_1, γ_2 и ψ — заданные гладкие функции, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, причем $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$, $k = 1, 2$, и выполнены обычные условия согласования.

Обозначим $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$.

Задачу A_α^β вначале рассмотрим для случая, когда в гиперболической части Ω_2 области Ω берется уравнение $L_0 u = 0$, а при $y > 0$ положим $n = 1$, $a_1(x, y) = 1$, $\overline{\alpha}_1 = 0$, $k_j(x, y) = \lambda_j = \text{const}$, $f(x, y) = 0$, $a_0(x, y) = -\lambda_0 = \text{const}$, $\theta = 1$.

Переходя к пределу в уравнении (1) при $y \to 0$, получаем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, обусловленное параболической частью Ω_1 на линию $y = 0$, в виде

$$\tau''(x) - \nu(x) - \lambda_0 \tau(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \tau(x^j) = 0. \tag{6}$$

Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, обусловленное гиперболической частью Ω_2 на линии $y = 0$, имеет вид [3]

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'(x/2). \tag{7}$$

Исключая $\nu(x)$ из (6) и (7), с учетом граничных условий (3) и (4) получаем для определения функции $\tau(x)$ следующую краевую задачу:

$$\tau''(x) - \tau'(x) - \lambda_0 \tau(x) = -\psi'(x/2) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \tau(x^j), \tag{8}$$

$$\alpha_1 \tau'(0) + \beta_1 \tau(0) = \gamma_1(0), \tag{9}$$

$$\alpha_2 \tau'(l) + \beta_2 \tau(l) = \gamma_2(0). \tag{10}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Задача имеет единственное регулярное решение тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\operatorname{sh}\sqrt{\Lambda_0}\,(l - x^j) + \exp(-l/2) \operatorname{sh}\sqrt{\Lambda_0}\, x^j - \\ - \exp(-x^j/2) \operatorname{sh}\sqrt{\Lambda_0}\, l] \exp(x^j/2) \neq \\ \neq (1/4 - \Lambda_0) \operatorname{sh}\sqrt{\Lambda_0}\, l, \quad \Lambda_0 = \lambda_0 + 1/4 > 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\sin\sqrt{-\Lambda_0}\,(l - x^j) + \exp(-l/2) \sin\sqrt{-\Lambda_0}\, x^j - \\ - \exp(x^j/2) \sin\sqrt{-\Lambda_0}\, l] \exp(x^j/2) \neq \\ \neq (1/2 + \Lambda_0) \sin\sqrt{-\Lambda_0}\, l, \quad \Lambda_0 < 0, \text{ *если* } \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1, \beta_2 \neq 0, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \neq \lambda_0, \quad \textit{если } \alpha_1, \alpha_2 \neq 0, \quad \beta_1, \beta_2 = 0, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left\{ \cos \Lambda_1 l + \exp\left(\frac{x^j - l}{2}\right) \sin \Lambda_1 x^j - \cos[\Lambda_1 (l - x^j)] \exp(x^j/2) \right\} \neq$$
$$\neq \left[-(4\Lambda_1^2 + 1)\cos \Lambda_1 l\right]/4, \quad \textit{если } \beta_1, \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_1 = \beta_2 = 0, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left\{ 2\Lambda_1 \cos \Lambda_1 l + 2\exp\left(\frac{x^j - l}{2}\right) \cos \Lambda_1 x^j + \exp(x^j/2) \sin[\Lambda_1 (l - x^j)] \right\} \neq$$
$$\neq \left[-(4\Lambda_1^2 + 1)\cos \Lambda_1 l\right]/4, \quad \textit{если } \alpha_1, \beta_2 \neq 0, \quad \beta_1 = \alpha_2 = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left\{ \alpha_2 \Lambda_1 \sin \Lambda_1 l - \beta_2 \cos \Lambda_1 l - (\Lambda_1 \alpha_2 + \beta_2) \exp\left(\frac{x^j - l}{2}\right) \cos \Lambda_1 x^j \right\} \neq$$
$$\neq \left[(4\Lambda_1^2 + 1)\left(\beta_2 \cos \Lambda_1 l - \alpha_2 \Lambda_1^2 \sin \Lambda_1 l\right)\right]/4\Lambda_1, \quad \textit{если } \alpha_1, \alpha_2, \beta_2 \neq 0, \ \beta_1 = 0, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left\{ 2\alpha_1 (\beta_1 \cos \Lambda_1 l + \alpha_1 \Lambda_1 \sin \Lambda_1 l) + (1 + 2\beta_1)\alpha_1 \cos[\Lambda_1 (l - x^j)] \exp(x^j/2) - \right.$$
$$\left. - 2\Lambda_1 \exp\left(\frac{x^j - l}{2}\right)\left(\alpha_1 \cos \Lambda_1 x^j - \beta_1 \sin \Lambda_1 x^j\right) \right\} \neq$$
$$\neq \left[-(4\Lambda_1^2 + 1)(\beta_1 \cos \Lambda_1 l + \alpha_1 \sin \Lambda_1 l)\right]/2, \quad \textit{если } \alpha_1, \beta_1, \alpha_2 \neq 0, \ \beta_2 = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left\{ 4\left[\Lambda_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \sin \Lambda_1 l + \Lambda_1^2 (\alpha_2 \beta_1 - a_1 \beta_2) \cos \Lambda_1 l\right] + \right.$$
$$+ 2\Lambda_1 (\alpha_1 + 2\beta_1)\alpha_2 \Lambda_1 \cos[\Lambda_1 (l - x^j)] + \beta_2 \sin[\Lambda_1 (l - x^j)] \exp(-x^j/2) -$$
$$\left. - 4\Lambda_1 \exp\left(\frac{x^j - l}{2}\right)\left(\alpha_1 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 x^j - \beta_1 \sin \Lambda_1 x^j\right) \right\} \neq$$
$$\neq \left[-(4\Lambda_1^2 + 1)\left\{\Lambda_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \sin \Lambda_1 l + \Lambda_1^2 (\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2) \cos \Lambda_1 l\right\}\right], \tag{18}$$

если $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \neq 0$. *Здесь* $\Lambda_1 = \sqrt{-\Lambda_0 - 1}/4$.

Доказательство. Задача (8) – (10) заменой

$$\tau(x) = \left\{ v(x) + \frac{\gamma_1(0)\beta_2 - \gamma_2(0)\beta_1}{\alpha_1 \beta_1 - (\alpha_2 + l\beta_2)\beta_1} - x + \frac{\alpha_1 \gamma_2(0) - (\alpha_2 + \beta_2 l)\gamma_1(0)}{\alpha_1 \beta_1 - (\alpha_2 + l\beta_2)\beta_1} \exp(x/2) \right. \tag{18*}$$

приводится к виду

$$v''(x) + \Lambda_0 v(x) = f(x), \tag{19}$$

$$\alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(l) = 0, \tag{20}$$

$$\alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0, \tag{21}$$

где

$$f(x) = (\lambda_0 + 1/4)\left[\frac{\gamma_1(0)\beta_2 - \gamma_2(0)\beta_1}{\alpha_1 \beta_1 - (\alpha_2 + l\beta_2)\beta_1} x + \frac{\alpha_1 \gamma_2(0) - (\alpha_2 + \beta_2 l)\gamma_1(0)}{\alpha_1 \beta_1 - (\alpha_2 + l\beta_2)\beta_1}\right] -$$
$$- \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[\frac{\gamma_1(0)\beta_2 - \gamma_2(0)\beta_1}{\alpha_1 \beta_1 - (\alpha_2 + l\beta_2)\beta_1} x^j + \frac{\alpha_1 \gamma_2(0) - (\alpha_2 + \beta_2 l)\gamma_1(0)}{\alpha_1 \beta_1 - (\alpha_2 + l\beta_2)\beta_1}\right] -$$

$$- \psi'(x/2)\exp(-x/2) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v(x^j)\exp\left(\frac{x^j - x}{2}\right) =$$

$$= g(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v(x^j)\exp\left(\frac{x^j - x}{2}\right). \qquad (22)$$

Известно, что функция Грина задачи (19) – (21) для оператора в левой части равенства (19) имеет вид [4]

$$G(x,t,\Lambda_0) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}(l-x)\sqrt{\Lambda_0}\,\operatorname{sh} t\sqrt{\Lambda_0}}{\sqrt{\Lambda_0}\,\operatorname{sh} l\sqrt{\Lambda_0}}, & 0 \le t \le x; \\ -\dfrac{\operatorname{sh} x\sqrt{\Lambda_0}\,\operatorname{sh}(l-t)\sqrt{\Lambda_0}}{\sqrt{\Lambda_0}\,\operatorname{sh} l\sqrt{\Lambda_0}}, & x \le t \le l,\ \Lambda_0 > 0, \end{cases} \qquad (23)$$

$$G(x,t,\Lambda_0) = \begin{cases} -\dfrac{\sin t\sqrt{-\Lambda_0}\,\sin(l-x)\sqrt{-\Lambda_0}}{\sqrt{-\Lambda_0}\,\sin l\sqrt{-\Lambda_0}}, & 0 \le t \le x; \\ -\dfrac{\sin x\sqrt{-\Lambda_0}\,\sin(l-t)\sqrt{-\Lambda_0}}{\sqrt{-\Lambda_0}\,\sin l\sqrt{-\Lambda_0}}, & x \le t \le l,\ \Lambda_0 < 0, \end{cases} \qquad (24)$$

если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1, \beta_2 \ne 0$;

$$G(x,t,\Lambda_1) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2\Lambda_1\cos\Lambda_1 t - \sin\Lambda_1 t)[2\Lambda_1\cos\Lambda_1(l-x) + \sin\Lambda_1(l-x)]}{\Lambda_1(4\Lambda_1^2+1)\sin\Lambda_1 l}, & 0 \le t \le x; \\ \dfrac{(2\Lambda_1\cos\Lambda_1 x - \sin\Lambda_1 x)[2\Lambda_1\cos\Lambda_1(l-t) + \sin\Lambda_1(l-t)]}{\Lambda_1(4\Lambda_1^2+1)\sin\Lambda_1 l}, & x \le t \le l, \end{cases} \qquad (25)$$

если $\alpha_1, \alpha_2 \ne 0,\ \beta_1, \beta_2 = 0$;

$$G(x,t,\Lambda_1) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\Lambda_1 t\cos\Lambda_1(l-x)}{\Lambda_1\cos\Lambda_1 l}, & 0 \le t \le x; \\ -\dfrac{\sin\Lambda_1 x\cos\Lambda_1(l-t)}{\Lambda_1\cos\Lambda_1 l}, & x \le t \le l, \end{cases} \qquad (26)$$

если $\alpha_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_1 \ne 0,\ \alpha_2 \ne 0$;

$$G(x,t,\Lambda_1) = \begin{cases} -\dfrac{\cos\Lambda_1 t\sin\Lambda_1(l-x)}{\Lambda_1\cos\Lambda_1 l}, & 0 \le t \le x; \\ -\dfrac{\cos\Lambda_1 x\sin\Lambda_1(l-t)}{\Lambda_1\cos\Lambda_1 l}, & x \le t \le l, \end{cases} \qquad (27)$$

если $\beta_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 \ne 0,\ \beta_2 \ne 0$;

$$G(x,t,\Lambda_1) = \begin{cases} \dfrac{\cos\Lambda_1 t\{\alpha_2\Lambda_1\cos\Lambda_1(l-x) + \beta_2\sin\Lambda_1(l-x)\}}{\alpha_2\Lambda_1^2\sin\Lambda_1 l - \beta_2\Lambda_1\cos\Lambda_1 l}, & 0 \le t \le x; \\ \dfrac{\cos\Lambda_1 x\{\alpha_2\Lambda_1\cos\Lambda_1(l-t) + \beta_2\sin\Lambda_1(l-t)\}}{\alpha_2\Lambda_1^2\sin\Lambda_1 l - \beta_2\Lambda_1\cos\Lambda_1 l}, & x \le t \le l, \end{cases} \qquad (28)$$

если $\beta_1 = 0,\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_2 \ne 0$;

$$G(x, t, \Lambda_1) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 t - \beta_1 \sin \Lambda_1 t) \cos \Lambda_1 (l - x)}{\beta_1 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 l + \alpha_1 \Lambda_1^2 \sin \Lambda_1 l}, & 0 \le t \le x; \\ \dfrac{(\alpha_1 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 x - \beta_1 \sin \Lambda_1 x) \cos \Lambda_1 (l - t)}{\beta_1 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 l + \alpha_1 \Lambda_1^2 \sin \Lambda_1 l}, & x \le t \le l, \end{cases} \tag{29}$$

если $\beta_2 = 0$, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2 \ne 0$;

$$G(x, t, \Lambda_1) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 t - \beta_1 \sin \Lambda_1 t)\{\alpha_2 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 (l - x) + \beta_2 \sin \Lambda_1 (l - x)\}}{\Lambda_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \sin \Lambda_1 l - \Lambda_1^2 (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) \cos \Lambda_1 l}, & 0 \le t \le x; \\ \dfrac{(\alpha_1 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 x - \beta_1 \sin \Lambda_1 x)\{\alpha_2 \Lambda_1 \cos \Lambda_1 (l - t) + \beta_2 \sin \Lambda_1 (l - t)\}}{\Lambda_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \sin \Lambda_1 l - \Lambda_1^2 (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) \cos \Lambda_1 l}, & x \le t \le l, \end{cases} \tag{30}$$

если $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \ne 0$;

Считая пока правую часть уравнения (19) известной, решение задачи (19) – (21) можем записать в виде

$$v(x) = \int_0^l G(x, t, \Lambda_i) g(t)\, dt - \sum_{j=1}^m \lambda_j v(x^j) \int_0^l G(x, t, \Lambda_i) \exp\left(\frac{x^j - x}{2}\right) dt, \quad i = 0, 1. \tag{31}$$

Функция Грина $G(x, t, \Lambda_i)$ в равенстве (31) в каждом конкретном случае берется из (23) – (30).

Если ввести обозначения

$$\rho(x) = \int_0^l G(x, t, \Lambda_i) \exp(-t/2)\, dt, \quad \delta(t) = \int_0^l G(x, t, \Lambda_i) g(t)\, dt, \quad i = 0, 1, \tag{32}$$

то равенство (31) можно записать в виде

$$v(x) + \rho(x) \sum_{j=1}^m \lambda_j v(x^j) \exp(x^j/2) = \delta(x). \tag{33}$$

Полагая в равенстве (33) поочередно $x = x^1,\ x = x^2, \ldots, x = x^m$, получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно $v(x^j)$, $j = \overline{1, m}$:

$$v_i + \rho_i \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \exp(x^j/2) = \delta_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{34}$$

где $\rho_j = \rho(x^j)$, $\delta_j = \delta(x^j)$, $v_j = v(x^j)$, $j = \overline{1, m}$.

Таким образом, разрешимость задачи (19) – (21) эквивалентно редуцирована к разрешимости системы уравнений (34).

Легко показать, что определитель m-го порядка, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен

$$\Delta_m = 1 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \rho_j \exp(x^j/2). \tag{35}$$

Пусть теперь выполняются условия (11) – (18). Тогда, подставляя в первом равенстве (32) вместо функции $G(x, t, \Lambda_i)$ поочередно ее значения (23) – (30), вычисляя интегралы в правых частях этих равенств, а затем заменяя в них x через x^j, $j = \overline{1, m}$, получаем значения ρ_j. Затем, подставив значения ρ_j в равенство (35), легко убедиться, что $\Delta_m \ne 0$. Это означает, что система (34) разрешима и имеет единственное решение, которое может быть вычислено по формулам

$$v(x^j) = \frac{1}{\Delta_m} \sum_{i=1}^{n} \Delta_m^{(j,i)} \gamma(x^j), \quad j = \overline{1,m}, \tag{36}$$

где

$$\Delta_m^{(j,i)} = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_k \rho_k \exp\left(x^k/2\right), & i = j,\ k \neq i, j; \\ -\lambda_j \rho_i \exp\left(x^j/2\right), & i \neq j, \end{cases}$$

— алгебраическое дополнение элемента j-й строки и i-го столбца в определителе Δ_m.

Таким образом, подставляя в (18*) и (22) значения $v(x)$ и $v(x^j)$ из (31) и (36), находим решение $\tau(x)$ задачи (8) – (10).

После определения функции $\tau(x)$ мы приходим к следующей вспомогательной задаче: найти регулярное в области Ω_1 решение $u(x, y)$ уравнения (1) при $y > 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_1)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u_{|y=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{37}$$

и граничным условиям (3) и (4).

Функция Грина первой, второй, третьей и смешанных краевых задач для уравнения $Lu = 0$ представима в виде [5 – 8]

$$G(x, y; \xi, \eta) = (y - \eta)^{-1/2} G_0(x, y; \xi, \eta), \tag{38}$$

где $G_0(x, y; \xi, \eta)$ — достаточно гладкая функция.

Следуя [2], обозначим через $\psi^j(y)$ след искомого решения $u(x, y)$ задачи (1), (9), (10) при $y > 0$, $x = x^j$, $0 \leq y \leq h$, а через $z(x, y)$ — решение первой, второй, третьей и смешанных задач для уравнения $Lz = 0$ [5 – 8] в области Ω_1.

Принимая во внимание свойства функции Грина (38), легко убедиться, что любое решение $u(x, y)$ задачи (1), (3), (4), (37) является решением интегрального уравнения

$$u(x, y) - z(x, y) = \int_0^y \sum_{j=1}^{m} \psi^j(\eta) \frac{d\eta}{(y - \eta)^{1/2}} \int_0^l G_j(x, y; \xi, \eta)\, d\xi,$$

где $G_j(x, y; \xi, \eta) = \lambda_j G_0(x, y; \xi, \eta)$.

Последнее равенство можно записать в виде

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{k_j(x, y, \eta)\psi^j(\eta)}{(y - \eta)^{1/2}} d\eta + z(x, y), \tag{39}$$

где по повторяющимся индексам $j = \overline{1,m}$ подразумевается суммирование, $k_j(x, y, t)$ выражается через $G_j(x; \xi, \eta)$.

Из (39) при $x = x^\mu$, $\mu = \overline{1,m}$, имеем

$$\psi^\mu(y) = \int_0^y \frac{k_j(x^\mu, y; \eta)}{(y - \eta)^{1/2}} \psi^j(\eta)\, d\eta + v(x^\mu, y). \tag{40}$$

Система (40) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, следовательно, она безусловно и однозначно разрешима.

Таким образом, единственное решение задачи (1), (3), (4), (37) задается формулой (39), где $\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^\mu$ — решение системы (40). В области Ω_2 решение задачи A_α^β можно найти как решение первой или второй краевой задачи Дарбу или задачи Коши, если определить $\nu(x)$ из равенства (7).

Пусть теперь в уравнении (1) при $y < 0$ $\chi = 0$, $b_0 = \mathrm{const} > 0$, $b_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, $d = 0$.

Чтобы получить функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_2 на линию $y = 0$, рассмотрим решение задачи Коши: $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$ для уравнения (1) при $y < 0$. Это решение имеет вид [5]

$$u(x, y) = \frac{\tau(x-y)+\tau(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{b_0}\sqrt{(x-t)^2 - y^2}\right)\nu(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \tau(t)\frac{\partial}{\partial y} J_0\left(\sqrt{b_0}\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right)dt, \tag{41}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Удовлетворяя (41) граничному условию (5) и выполняя несложные преобразования, получаем интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$\tau(x) = \rho(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \tau(t)\frac{\partial}{\partial x} J_0\left(\sqrt{b_0}\sqrt{t(t-x)}\right)dt, \tag{42}$$

где

$$\rho(x) = 2\psi(x/2) - \psi(0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x J_0\left(\sqrt{b_0}\sqrt{t(t-x)}\right)\nu(t)\,dt.$$

Считая в формуле (42) функцию $\rho(x)$ известной и пользуясь формулой обращения для таких уравнений [9], находим

$$\tau(x) = \int\limits_0^x \nu(t) J_0\left(\sqrt{b_0(t-x)}\right)dt + q(x), \tag{43}$$

где

$$q(x) = \psi(0) J_0\left(\sqrt{b_0}x\right) + \int\limits_0^x \psi'(t/2) J_0\left(\sqrt{b_0}\sqrt{x(x-t)}\right)dt. \tag{44}$$

Если проинтегрировать равенство (6) дважды по переменной x от 0 до x, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в виде

$$\tau(x) = \gamma_1(0)/\beta_1 + \left(x + 1 - \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_0}x\right)\tau'(0) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_0}\left(1 - \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_0}x\right)\sum_{j=1}^m \lambda_j \tau(x^j) + \sqrt{\lambda_0}\int\limits_0^x \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_0}(x-t)\gamma(t)\,dt, \tag{44*}$$

если в краевых условиях (3), (4) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1, \beta_2 \neq 0$, т. е.

$$\tau(0) = \gamma_1(0)/\beta_1, \quad \tau(l) = \gamma_2(0)/\beta_2, \quad \Lambda_i = \Lambda_0 > 0.$$

Пусть в этом случае выполняется условие

$$l + 1 - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 l} \neq 0.$$

Тогда, полагая в (44) $x = l$, получаем

$$\tau'(0) = \frac{\chi_j}{l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 l}}, \tag{45}$$

где

$$\chi_j = \frac{\beta_1\gamma_2(0) - \beta_2\gamma_1(0)}{\beta_1\beta_2} - \frac{1}{\lambda_0}\left(1 - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 l}\right)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\tau(x^j) +$$

$$+ \sqrt{\lambda_0}\int_0^l \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}\,(l-t)\gamma(t)\,dt.$$

Подставив значение $\tau'(0)$ из (45) в формулу (44), окончательно получим

$$\tau(x) = \frac{\gamma_1(0)}{\beta_1} + \frac{\left(x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 x}\right)\chi_i}{l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 l}} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_0}\left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 x}\right)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\tau(x^j) + \sqrt{\lambda_0}\int_0^x \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}\,(x-t)\nu(t)\,dt. \tag{46}$$

Исключая из равенств (43), (46) функцию $\tau(x)$, имеем

$$\int_0^x k_0(x,t)\nu(t)\,dt = q_1(x), \tag{47}$$

где

$$k_0(x,t) = J_0\left(\sqrt{\lambda_0(x-t)}\right) - \sqrt{\lambda_0}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}\,(x-t),$$

$$g_1(x) = \frac{\gamma_1(0)}{\beta_1} + \frac{x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 x}}{l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 l}}\chi^j + \frac{1}{\lambda_0}\left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 x}\right)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\tau(x^j) -$$

$$-\psi(0)J_0\left(\sqrt{b_0}x\right) + \int_0^x \psi'(t/2)\,J_0\left(\sqrt{b_0}\sqrt{x(x-t)}\right)dt.$$

Так как $k_0(x,x) \neq 0$, то дифференцируя обе части равенства (47) по x, а затем деля обе части полученного равенства на $k_0(x,x)$, получаем уравнение

$$\nu(x) - \int_0^x \tilde{k}_1(x,t)\nu(t)\,dt = q_2(x), \tag{48}$$

где

$$\tilde{k}_1(x,t) = a_0 J_1\left(\left(\sqrt{b_0(x-t)}\right)/\left(2\sqrt{b_0(x-t)}\right)\right) + \lambda_0\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}\,(x-t), \tag{49}$$

$$q_2(x) = \frac{1-\sqrt{\lambda_0}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}x}{l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0 l}}\chi^j - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}x}{\lambda_0}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\tau(x^j) -$$

$$-\psi(0)\sqrt{\lambda_0}\,J_1\left(\sqrt{b_0}x\right) + \psi'(x/2) -$$

$$-\int_0^x \psi'(t/2)\,J_1\left(\sqrt{b_0}\sqrt{x(x-t)}\right)\frac{\sqrt{b_0}\,(2x-t)}{2\sqrt{x(x-t)}}\,dt. \tag{50}$$

Считая снова правую часть равенства (48) известной, обращая его как интегральное уравнение Вольтерра второго рода, после несложных преобразований находим

$$\nu(x) - \sqrt{\lambda_0}\int_0^l \tilde{k}_2(x,t)\nu(t)\,dt = q_3(x), \tag{51}$$

где

$$q_3(x) = \frac{\gamma_1(0)}{\beta_1} - \frac{\left(x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x\right)\left(\beta_1\gamma_2(0)-\beta_2\gamma_1(0)\right)}{\beta_1\beta_2\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)} +$$

$$+\left[\frac{1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x}{\lambda_0} - \frac{\left(x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x\right)\left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)}{\lambda_0\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)}\right]\sum_{j=1}^m \lambda_j\tau(x^j) -$$

$$-\frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j\tau(x^j)}{\lambda_0\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)}\int_0^x R(x,t)\left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}t\right)\left(t+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}t\right)dt +$$

$$+\int_0^x R(x,t)\left\{\frac{\gamma_1(0)}{\beta_1} + \frac{\left(t+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}t\right)\left(\beta_1\gamma_2(0)-\beta_2\gamma_1(0)\right)}{\beta_1\beta_2\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)} - q(t)\right\}dt, \tag{52}$$

$$\tilde{k}_2(x,t) = \left(\frac{\sqrt{\lambda_0}\left(x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x\right)}{l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l} + \int_0^x R(x,t)\,dt\right)\sin\sqrt{\lambda_0}(l-t),$$

$R(x,t)$ — резольвента ядра $\tilde{k}_1(x,t)$.

Обозначая через $R_1(x,t)$ резольвенту уравнения (51), решение этого уравнения можем представить в виде

$$\nu(x) = q_3(x) + \int_0^l R_1(x,t)q_3(t)\,dt. \tag{53}$$

Подставляя значение $q_3(x)$ из равенства (52) в (53), получаем

$$\nu(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x)\sum_{j=1}^m \lambda_j\tau(x^j), \tag{54}$$

где

$$\rho_1(x) = \rho_3(x) + \int_0^l \rho_3(x)R_1(x,t)\,dt,$$

$$\rho_2(x) = \rho_4(x) + \int_0^l \rho_4(t)R_1(x,t)\,dt,$$

$$\rho_3(x) = \rho_5(x) +$$

$$+\int_0^x R_0(x,t)\left\{\frac{\gamma_1(0)}{\beta_1} + \frac{\left(t+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}t\right)\left(\beta_1\gamma_1(0)-\beta_2\gamma_1(0)\right)}{\beta_1\beta_2\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}\,l\right)} - q(t)\right\}dt,$$

$$\rho_4(x) = \frac{1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x}{\lambda_0} - \frac{\left(x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x\right)\left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)}{\lambda_0\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)} -$$

$$-\int_0^x R_0(x,t)\frac{\left(t+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}t\right)\left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}t\right)}{\lambda_0\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)}dt,$$

$$\rho_5(x) = \frac{\gamma_1(0)}{\beta_1} + \frac{\left(x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x\right)\left(\beta_1\gamma_2(0)-\beta_2\gamma_1(0)\right)}{\beta_1\beta_2\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)}.$$

Подставляя $\nu(x)$ из (54) в равенство (44), имеем

$$\tau(x) + \theta_1(x)\sum_{j=1}^m \lambda_j\tau(x^j) = \theta_2(x), \tag{55}$$

где

$$\theta_1(x) = -\frac{x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x}{l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l}\omega_1 + \frac{1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x}{\lambda_0} +$$

$$+ \sqrt{\lambda_0}\int_0^l \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}x(x-t)\rho_2(t)\,dt,$$

$$\theta_2(x) = \frac{\gamma_1(0)}{\beta_1} + \frac{x+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}x}{l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l}\omega_2,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_0}\int_0^l \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}(l-t)\rho_2(t)\,dt - \frac{1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l}{\lambda_0},$$

$$\omega_2 = \frac{\rho_1\gamma_2(0)-\beta_2\gamma_1(0)}{\beta_1\beta_2} + \sqrt{\lambda_0}\int_0^l \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}(l-t)\rho_1(t)\,dt.$$

Полагая в равенстве (55) поочередно $x=x^1,\ x=x^2,\ \ldots,\ x=x^m$, получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно $\tau(x^j)$, $j=\overline{1,m}$:

$$\tau(x^j) + \theta_{1i}\sum_{j=1}^m \lambda_j\tau_j = \theta_{2i}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{56}$$

где

$$\tau_j = \tau(x^j), \quad \theta_{1j} = \theta_1(x^j), \quad \theta_{2j} = \theta_2(x^j), \quad j=\overline{1,m}.$$

Как и в предыдущем случае, легко установить, что необходимым условием разрешимости системы уравнений (56) является условие

$$\sum_{j=1}^m \left\{\lambda_0\left(x^j+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0\omega_1}\right) + \left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}\,x^j + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_0^{3/2}\int_0^l \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}(x^j-t)\rho_2(t)\,dt\right)\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right)\right\} \neq \lambda_0\left(l+1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}l\right). \tag{57}$$

Подставляя значения $\tau(x^j)$, $j=\overline{1,m}$, в правую часть равенства (44), находим $\tau(x)$ в явном виде.

Таким образом, снова задача A_α^β свелась к двум задачам: задаче (1), (3), (4), (37) при $y>0$, к задаче Коши при $y<0$, которые однозначно разрешимы.

Аналогичным образом устанавливается однозначная разрешимость задачи A_α^β для других значений α_j, β_j, $j=\overline{1,2}$, рассмотренных в предыдущем случае.

Если в уравнении (1) функции $k_j(x,y)$, $f(x,y)$, $a_0(x,y)$ непрерывны, $a_i(x,y)$ непрерывно дифференцируемы по Гельдеру в замыкании $\overline{\Omega}_1$ области Ω, а функции $b_i(x,y)$, $i=\overline{0,n}$, $d(x,y)$ принадлежат классу $C^1(\overline{\Omega}_2)\cap C^3(\Omega_2)$, то, как показано в работе [1], для уравнения (1) при $y<0$ задача поставлена корректно.

Задача Дарбу. Найти регулярное в области Ω_2 решение уравнения (1) при $y<0$ из класса $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_2\cup J)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=\nu(x),\quad 0<x<1,\quad u_{|AC}=\psi(x),\quad 0\le x\le l. \tag{58}$$

Решение $u(x,y)$ задачи Дарбу (58) для интегро-дифференциального уравнения (1) при $y<0$ определяется как решение уравнения [1]

$$\begin{aligned} u(x,y)-\int_0^x d\xi\int_\xi^y \frac{A_i(\xi,\eta)D_{0\xi}^{\rho_i}\tau}{(\eta-\xi)^{4\beta}}H(\xi,\eta;x,y)d\eta = \\ =\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\gamma\int_0^x \nu(\xi)(x-\xi)^{-\beta}(y-\xi)^{-\beta}d\xi + \\ +\int_0^y[\psi'(\eta)+\beta\psi(\eta)/\eta]H(0,\eta;x,y)d\eta + \\ +\int_0^x d\xi\int_\xi^y\frac{f(\xi,\eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}}H(\xi,\eta;x,y)d\xi, \end{aligned} \tag{59}$$

где $\beta=\chi/(2\chi+4)$, A_i и f выражаются через известные функции $a_i(\xi,y)$ и $d(x,y)$ соответственно,

$$H(\xi,\eta;x,y)=\begin{cases} R(\xi,\eta;x,y), & \eta\ge x; \\ \overline{R}(\xi,\eta;x,y), & \eta\le x, \end{cases}$$

— функция Грина – Адамара задачи (58) для оператора

$$Eu\equiv u_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}(u_\xi-u_\eta),$$

причем

$$R(\xi,\eta;x,y)=(\eta-\xi)^\beta(y-x)^{-\beta}F(\beta,1-\beta,1;\sigma),$$

$$\overline{R}(\xi,\eta;x,y)=\gamma(\eta-\xi)^{2\beta}(x-\xi)^{-\beta}(y-\eta)^{-\beta}F(\beta,\beta,2\beta;1/\sigma),$$

$$\sigma=[(x-\xi)(y-\eta)/(\eta-\xi)(y-x)],\quad \gamma=\Gamma(\beta)/[\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)].$$

Переходя в (59) к пределу при $(x,y)\to(x,x)$, $0<x<l$, получаем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в виде [1]

$$\tau(x)+\overline{\theta}_0\int_0^x\overline{k}_i(x,t)\tau(t)dt=\overline{\theta}_1\int_0^x\frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{2\beta}}+\psi(x), \tag{60}$$

где

$$\overline{\theta}_0 = \gamma/\Gamma(1-\overline{\alpha}_i), \quad 2\overline{\theta}_1 = \gamma/[4/(m+2)]^{2\beta},$$

$$k_i(x,t) = \frac{d}{dt}(x-t)^{2-\overline{\alpha}_i-4\beta}\int_0^1 \frac{k_i(x,t+(x-t)s)\,ds}{s^{\overline{\alpha}_i}(1-s)^{4\beta-1}},$$

$$k_i(x,\xi) = \int_0^1 \frac{A_i(\xi,\xi+(x-\xi)t)\,dt}{t^{2\beta}(1-t)^{\beta}},$$

$$\psi(x) = \gamma x^{-\beta}\int_0^x [\psi'(\eta)+\beta\psi(\eta)/\eta]\eta^{2\beta}(x-\eta)^{-\beta}d\eta +$$

$$+ \gamma\int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\beta}}\int_\xi^x \frac{f(\xi,\eta)\,d\eta}{(\eta-\xi)^{2\beta}(x-\eta)^{\beta}}.$$

Из уравнения (1) следует, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на J связаны соотношением

$$\nu(x) - \theta\tau''(x) + a_0(x,0)\tau(x) = 0. \tag{61}$$

Исключая $\nu(x)$ из (60) и (61), получаем относительно $\tau(x)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(x) + \theta_0\int_0^x \frac{\tilde{k}_i(x,t)\tau(t)}{(x-t)^{2+2\beta}}dt = \tilde{\psi}(x), \tag{62}$$

где

$$\tilde{k}_i(x,t) = \overline{\theta}_0(x-t)^{2+2\beta}\overline{k}_i(x,t) + 2\beta(1+2\beta)\theta\overline{\theta}_1,$$

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \theta\overline{\theta}_1\tau'(0)x^{-2\beta} + \theta\overline{\theta}_1 x^{1-2\beta}\tau(0). \tag{63}$$

Пусть $R(x,t)$ — резольвента ядра $\tilde{k}_i(x,t)(x-t)^{-2-2\beta}$, тогда из (62) имеем

$$\tau(x) = \tilde{\psi}(x) + \overline{\theta}_0\int_0^x R(x,t)\tilde{\psi}(x)\,dt. \tag{64}$$

Поскольку резольвента $R(x,t)$ зависит от коэффициентов в уравнении (1), мы можем предположить, что

$$\omega_0 = 1 + l^{2\beta}\overline{\theta}_0\int_0^l R(l,t)t^{-2\beta}dt \neq 0$$

в случае, когда в краевых условиях (3), (4) $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1=\beta_2=1$. Тогда, используя условие $\tau(l)=\gamma_2(0)$, постоянную $\tau'(0)$ в (63) определяем в виде

$$\tau'(0) = \Big[(\psi(l)-\gamma_2(0))l^{2\beta+1} +$$

$$+ \theta\overline{\theta}_1\gamma_1(0)\Big(1+\overline{\theta}_0 l^{1+2\beta}\int_0^l R(l,t)t^{-1-2\beta}\,dt\Big)\Big]/(l\theta\overline{\theta}_1\omega_0).$$

Если в краевых условиях (3), (4) $\alpha_1=\beta_2=1$, $\beta_1=\alpha_2=0$, то можно предположить, что

$$\omega_1 = 1 + l^{1+2\beta}\overline{\theta}_0\int_0^l R(l,t)t^{-1-2\beta}dt \neq 0.$$

Тогда, используя условие $\tau(l)=\gamma_2(0)$, постоянную $\tau(0)$ в равенстве (63) определяем по формуле

$$\tau(0) = l\Big[(\gamma_2(0)-\psi(l))l^{2\beta} + \\ + \theta\overline{\theta}_1\gamma_1(0)\Big(1+l^{2\beta}\overline{\theta}_0\int_0^l R(l,t)t^{-1-2\beta}\,dt\Big)\Big]/(\theta\overline{\theta}_1\omega_1).$$

Пусть теперь в условиях (3), (4) $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\beta_1=\beta_2=0$. Полагая в этом случае, что для резольвенты $R(x,t)$ выполняется условие

$$\omega_2 = 1 + 2\beta + \overline{\theta}_0 R(l,l)l + l^{2+2\beta}\overline{\theta}_0\int_0^l R_x(l,t)t^{-1-2\beta}dt \neq 0,$$

получаем значение постоянной $\tau(0)$ из формулы (63) в виде

$$\tau(0) = \Big[(\gamma_2(0)-\psi'(l)-\overline{\theta}_0\psi(l)R(l,l))l^{2+2\beta} - 2\beta\theta\overline{\theta}_1\gamma_1(0)l + \overline{\theta}_0\theta\overline{\theta}_1\gamma_1(0)R(l,l)l^2 - \\ - \overline{\theta}_0 l^{2+2\beta}\int_0^l R_x(l,t)\Big\{\psi(t)-\theta\overline{\theta}_1\gamma_1(0)t^{-2\beta}\Big\}dt\Big]/(\theta\overline{\theta}_1\omega_2),$$

если воспользоваться условием $\tau'(l)=\gamma_2(0)$.

Положим теперь в равенствах (3), (4) $\alpha_j\neq 0$, $\beta_j\neq 0$, $j=1, 2$. Пусть коэффициенты уравнения (1) таковы, что выполняется условие

$$\omega_3 = \alpha_1\alpha_2\Big(\overline{\theta}_0 R(l,l)l-(1+2\beta)+\overline{\theta}_0 l^{2+2\beta}\int_0^l R_x(l,t)t^{-1-2\beta}dt\Big) - \\ - \beta_1\alpha_2\Big(2\beta l+\overline{\theta}_0 R(l,l)l^2-\overline{\theta}_0 l^{2+2\beta}\int_0^l R_x(l,t)t^{-2\beta}dt\Big) + \\ + \beta_1\alpha_2\Big(2\beta l+\overline{\theta}_0 R(l,l)l^2-\overline{\theta}_0 l^{2+2\beta}\int_0^l R_x(l,t)t^{-2\beta}dt\Big) + \\ + \alpha_1\beta_2\Big(l+\overline{\theta}_0 l^{2+2\beta}\int_0^l R(l,t)t^{-1-2\beta}dt\Big) - \\ - \beta_1\beta_2\Big(l^2+\overline{\theta}_0 l^{2+2\beta}\int_0^l R(l,t)t^{-2\beta}dt\Big) \neq 0.$$

Тогда система линейных алгебраических уравнений относительно $\tau'(0)$ и $\tau(0)$ разрешима единственным образом, но в виду громоздкости их значения здесь не приводим. Таким образом, $\tau(x)$ из (64) определяется однозначно. В силу сделанных предположений относительно заданных функций легко заключить, что

$$\tilde{k}_i(x,t)\in C(\overline{\Omega}_1), \quad \tilde{\psi}(x)\in C(\overline{J})\cap C^2(J).$$

После определения $\tau(x)$ в области Ω_1 приходим к задаче (1), (3), (4), (37). Решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения [2]

$$u(x,y)-z(x,y) = \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^{1/2}}\int_0^l G_i(x,y;\xi,\eta)D_{0\eta}^{\overline{\alpha}_i}k_j(\xi,\eta)\psi^j(\eta)\,d\xi, \quad (65)$$

где $G_i(x,y;\xi,\eta)=a_i(\xi,\eta)G_0(x,y;\xi,\eta)$ и по повторяющимся индексам $i=$

$= 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$ подразумевается суммирование. В связи с тем, что правую часть уравнения (65) можно представить в виде [2]

$$\frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha}_i)} \int_0^y k_j(\xi, \eta_1) \psi^j(\eta_1)(y-\eta_1)^{-\overline{\alpha}_i - 1/2} \int_0^1 G_i[x, y; \xi, \eta_1 + \\ + (y-\eta_1)t] t^{-1-\overline{\alpha}_i} (1-t)^{-1/2} dt$$

при $\overline{\alpha}_i < 0$ и

$$\frac{1}{\Gamma(1-\overline{\alpha}_i)} \int_0^y k_j(\xi, \eta_1) \psi^j(\eta_1) d\eta_1 \frac{d}{d\eta_1} (y-\eta_1)^{1/2 - \overline{\alpha}_i} \int_0^1 G_i[x, y; \xi, \eta_1 + \\ + (y-\eta_1)t] t^{-\overline{\alpha}_i} (1-t)^{-1/2} dt$$

при $0 < \overline{\alpha}_i < 1/2$, то (65) редуцируется к эквивалентному уравнению

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{k_{ij}(x, y, t) \psi^j(t)}{(y-t)^{\alpha_i + 1/2}} dt + z(x, y), \tag{66}$$

где $k_{ij}(x, y, t)$ выражаются через известные функции $k_j(x, y)$ и $G_i(x, y; \xi, \eta)$.

Если в равенстве (66) положить $x = x^{\mu}$, $\mu = 1, \ldots, m$, то получим систему интегральных уравнений второго рода вида

$$\psi^{\mu}(y) = \int_0^y \frac{k_{ij}(x^{\mu}, y, t) \psi^i(t)}{(y-t)^{\alpha_i + 1/2}} dt + z(x^{\mu}, y),$$

которая однозначно разрешима при $\alpha < 1/2$.

В гиперболической части Ω_2 решение задачи A_{α}^{β} представляется формулой (59), в которой значение $\nu(x)$ определяется из равенства (61).

1. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 1. – С. 103–108.
2. *Нахушев А. М., Борисов В. А.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Там же. – 1977. – **13**, № 1. – С. 105–110.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ, 1959. – 164 с.
4. *Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 303 с.
5. *Тихонов А. А., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. – 288 с.
7. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Наука, 1985. – 479 с.
8. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 559 с.
9. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.

Получено 14.03.94