УДК 517. 948. 33

А. Н. Витюк, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

УСРЕДНЕНИЕ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА

The proof of a scheme of averaging in set-valued Volterra integral equations is a given.

Наведено обгрунтування однієї схеми усереднення для інтегральних многозначних рівнянь Вольтерра.

Интегральные многозначные уравнения (интегральные включения) Вольтерра рассматривались во многих работах (см., например, [1, 2]).

Хорошо изучен метод усреднения для дифференциальных включений [3, 4], а также его применение [3] в задачах оптимального управления.

В данной работе рассматривается метод усреднения для интегральных многозначных уравнений Вольтерра.

1. Пусть E — евклидово n-мерное пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом θ; $\operatorname{conv} E$ — пространство непустых выпуклых и компактных подмножеств E с метрикой Хаусдорфа $\alpha(\cdot,\cdot)$, а $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние между точкой и множеством; $I=[0,a]$, $R_+=[0,+\infty)$, $P=\{(s,t):\ 0\le s\le t\le a\}$; $C(I)$ — пространство непрерывных функций $x: I\to E$; $S_r(I)=\{x(\cdot)\in C(I):\ \|x(\cdot)\|\le \le r\}$.

2. Рассмотрим интегральное многозначное уравнение Вольтерра

$$x(t)\in x_0+\int_0^t F(t,s,x(s))\,ds, \tag{1}$$

где $F: Q\to \operatorname{conv} E$, $Q=P\times E$, а интеграл понимается в смысле Аумана [5].

Пусть многозначное отображение (м. о.) F удовлетворяет условиям:

а) непрерывно по t при фиксированных s, x и измеримо по s при фиксированных t, x;

б) $\alpha(F(t,s,x),F(t,s,y))\le K\|x-y\|$;

в) $|F(t,s,x)|=\alpha(F(t,s,x),\{\theta\})\le M$;

г) $\lim\limits_{t\to\tau}\int_0^\tau \alpha(F(t,s,x(s)),\ F(\tau,s,x(s)))\,ds=0$ для любой функции $x(\cdot)\in \in S_r(I)$, $r=\|x_0\|+Ma$.

Решением включения (1) называем непрерывную функцию $x: I\to E$, которая всюду на I удовлетворяет включению (1).

Теорема 1. *Пусть м. о. F удовлетворяет условиям* а) – г), *а функция $\omega(t)\in S_r(I)$ такова, что для $t\in I$*

$$\rho\left(\omega(t),\ x_0+\int_0^t F(t,s,\omega(s))\,ds\right)\le\mu.$$

Тогда существует такое решение $x(t)$ включения (1), *что для $t\in I$*

$$\|\omega(t)-x(t)\|\le\mu\exp(Kt).$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$(Dx)(t)=\int_0^t F(t,s,x(s))\,ds,\quad t\in I,\ x(\cdot)\in S_r(I).$$

Используя условия а), в), г), легко доказать, что оператор D действует из $S_r(I)$

в пространство непрерывных на I многозначных отображений.

Определим последовательность $x_i(t)$, $i \geq 0$, $x_i(t) \in S_r(I)$. Положим $x_0(t) = \omega(t)$ и пусть функция $x_i(t)$ уже определена. В силу непрерывности м. о. $(Dx_i)(t)$ на I и леммы 6 из [6] существует такой непрерывный селектор $x_{i+1}(t)$ м. о. $x_0 + (Dx_i)(t)$, что

$$\| x_{i+1}(t) - x_i(t) \| = \rho\left(x_i(t), x_0 + (Dx_i)(t)\right). \tag{2}$$

Используя индукцию, соотношение (2) и условие б), доказываем, что для $t \in I$

$$\| x_{i+1}(t) - x_i(t) \| \leq \mu \frac{(Kt)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

В силу (3) построенная последовательность равномерно на I сходится к $x(t) \in S_r(I)$. Переходя к пределу при $i \to \infty$ в (2), получаем, что $x(t)$ — решение интегрального включения (1).

Воспользовавшись оценкой (3), получим

$$\| x_i(t) - \omega(t) \| \leq \| x_i(t) - x_{i-1}(t) \| + \ldots + \| x_1(t) - x_0(t) \| \leq \mu \exp(Kt). \tag{4}$$

Из (4) при $i \to \infty$ следует заключение теоремы 1.

Замечание. Если м. о. F удовлетворяет условиям а) – г), то на I существует решение включения (1). Это следует из теоремы 1 при $\omega(t) = x_0$.

3. Рассмотрим интегральное включение Гаммерштейна

$$x(t) \in x_0 + \varepsilon \int_0^t K(t, s) f(s, x(s))\, ds, \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $K(t, s)$ — квадратная матрица размерности n.

Предположим, что:

A_1) элементы матрицы $K(t, s)$ в области $\{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ непрерывны по t при каждом s и измеримы по s при каждом t, $\| K(t, s) \| \leq B$ (здесь $\| \cdot \|$ — норма матрицы);

A_2) для $t, \tau \in R_+$, $t > \tau$

$$\int_0^\tau \| K(t, s) - K(\tau, s) \|\, ds \leq t\gamma(\tau)\mu(t - \tau),$$

где $\gamma(t)$ — ограниченная невозрастающая функция, для которой $\lim \gamma(t) = 0$ при $t \to +\infty$; а $\mu(t) \leq \mu_0$ и $\lim \mu(t) = 0$ при $t \to 0$;

A_3) м. о. $f : R_+ \times Q \to \operatorname{conv} E$, $Q \subseteq E$, измеримо по s для каждого x, удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной K и $|f(t, x)| \leq M$.

Пусть для любых $x \in Q$ и $t \geq 0$ существует не зависящий от $p \in [1, b]$, $b < +\infty$, предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} K(t + pT, s) f(s, x)\, ds = \Phi(x). \tag{6}$$

Включению (5) поставим в соответствие включение

$$y(t) \in x_0 + \varepsilon \int_0^t \Phi(y(\tau))\, d\tau. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть матрица $K(t, s)$ и м. о. $f(s, x)$ удовлетворяют условиям A_1) – A_3) и равномерно относительно $x \in Q$, $t \geq 0$ и $p \in [1, b]$ сущес-*

твует предел (6), *а решения включений* (5) *и* (7) *существуют для* $t \geq 0$ *и лежат в области* Q *вместе с некоторой их* δ*-окрестностью.*

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *что для* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *и* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$:

1) *для любого решения* $x(t)$ *включения* (5) *существует решение* $y(t)$ *включения* (7) *такое, что*

$$\| x(t) - y(t) \| \leq \eta; \tag{8}$$

2) *для любого решения* $y(t)$ *включения* (7) *существует решение* $x(t)$ *включения* (5) *такое, что справедлива оценка* (8).

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы 2. Пусть $x(t)$ — некоторое решение включения (5). Согласно определению интеграла Аумана [5] существует измеримый селектор $\varphi(s) : J \to E$, $J = [0, L\varepsilon^{-1}]$ м. о. $f(s, x(s))$ такой, что

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t K(t, s)\varphi(s)\, ds. \tag{9}$$

Рассмотрим сетку $\omega_h = \{ t_i = ih;\ i = \overline{0, m},\ m\, h = L\varepsilon^{-1} \}$ и пусть $\| x(t) - x(t_i) \| \leq \beta$ для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, m-1}$. Построим функцию $u(t) : J \to E$ следующим образом. Для $t \in [t_0, t_1]$ полагаем

$$u(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t K(t, s)\psi_0(s)\, ds,$$

где $\psi_0(s)$ — такой измеримый селектор м. о. $f(s, u(t_0))$, $u(t_0) = x_0$, что

$$\begin{aligned} \| \varphi(s) - \psi_0(s) \| &= \rho(\varphi(s), f(s, u(t_0))) \leq \\ &\leq \alpha(f(s, x(s)), f(s, u(t_0))) \leq K\beta. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда в силу (10) и условий A_1), A_3)

$$\| x(t_1) - u(t_1) \| \leq \tilde{a}\beta, \ \ \tilde{a} = LKBm^{-1}.$$

Для $t \in [t_i, L\varepsilon^{-1}]$, $i \geq 1$

$$x(t) = F_i(t) + \varepsilon \int_{t_i}^t K(t, s)\varphi(s)\, ds, \tag{11}$$

где

$$F_i(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^{t_i} K(t, s)\varphi(s)\, ds. \tag{12}$$

Функцию $u(t)$ для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \geq 1$, представим в виде

$$u(t) = \tilde{F}_i(t) + \varepsilon \int_{t_i}^t K(t, s)\psi_i(s)\, ds, \tag{13}$$

где

$$\tilde{F}_i(t) = x_0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t, s)\psi_j(s)\, ds, \tag{14}$$

а $\Psi_i : [t_i, t_{i+1}] \to E$ — такой измеримый селектор м. о. $f(s, u(t_i))$, что

$$\| \varphi(s) - \psi_i(s) \| = \rho\left(\varphi(s), f(s, u(t_i))\right). \tag{15}$$

Используя метод математической индукции, соотношения (11) – (15), условия A_1), A_3), получаем

$$\| x(t_{i+1}) - u(t_{i+1}) \| \le \beta\left[(1+\tilde{a})^{i+1} - 1\right] \le \beta\left[\exp(BKL) - 1\right]. \tag{16}$$

Определим еще функцию $\xi : J \to E$. Для заданного произвольного $\eta_1 > 0$ и выбранного m в силу (6) существует $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, такое, что для $\varepsilon \le \varepsilon_0$ и любого $p \in [1, m]$

$$\alpha\left(\frac{\varepsilon m}{L} \int\limits_t^{t+(L/\varepsilon m)} K\left(t + p\frac{L}{\varepsilon m}, s\right) f(s, x)\, ds, \Phi(x)\right) \le \eta_1. \tag{17}$$

Из (17) при $t = t_i$, $x = u(t_i)$ и того, что $\psi_i(s) \in f(s, u(t_i))$ для $s \in [t_i, t_{i+1}]$, вытекает существование такого элемента v_i множества $\Phi(u(t_i))$, что

$$\left\| \frac{1}{h} \int\limits_{t_i}^{t_i+h} K(t_i + ph, s) \psi_i(s)\, ds - v_i \right\| \le \eta_1. \tag{18}$$

Если на $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, m-1}$, положить $\xi(t) = \xi(t_i) + \varepsilon v_i (t - t_i)$, $\xi(t_0) = x_0$, то с помощью соотношений (13), (14), (18) получим

$$\| u(t_{i+1}) - \xi(t_{i+1}) \| \le$$

$$\le \varepsilon h \sum_{j=0}^{i} \left\| \frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_j+h} K(t_j + (i-j+1)h, s) \psi_j(s)\, ds - v_j \right\| \le L\eta_1 (i+1) m^{-1}. \tag{19}$$

Таким образом, для $i = \overline{1, m}$ на основании (19) имеем

$$\| u(t_i) - \xi(t_i) \| \le L\eta_1. \tag{20}$$

М. о. $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной KB. Доказательство этого утверждения подобно доказательству соответствующего утверждения для дифференциальных уравнений [7, с. 82]. Очевидно, что $|\Phi(x)| \le \le MB$.

Теперь согласно определению функции $\xi(t)$ для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, m-1}$

$$\| \xi(t) - \xi(t_i) \| \le MBLm^{-1}. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{B}(t) = \rho\left(\xi(t),\; x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \Phi(\xi(\tau))\, d\tau\right).$$

Для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, используя соотношения (20), (21), получаем

$$\tilde{B}(t) \le \alpha\left(x_0 + \varepsilon h \sum_{j=0}^{i-1} \Phi(u(t_j)) + \varepsilon(t - t_i)\Phi(u(t_i)) \right.$$

$$\left. x_0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(\xi(t))\, dt + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} (t - t_i)\Phi(\xi(\tau))\, d\tau \right) \le$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha\big(\Phi(u(t_j)), \Phi(\xi(t))\big) dt + \varepsilon \int_{t_i}^{t} \alpha(\Phi(u(t_i)), \Phi(\xi(\tau)))\, d\tau \leq$$

$$\leq KBL(L\eta_1 + MBLm^{-1}). \tag{22}$$

В силу теоремы 1 существует решение $y(t)$ включения (7) такое, что

$$\| y(t) - \xi(t) \| \leq KBL(L\eta_1 + MBLm^{-1}) \exp(KBL). \tag{23}$$

С помощью соотношений (16), (20), (21), (23) для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, m-1}$, получим

$$\| x(t) - y(t) \| \leq \| x(t) - x(t_i) \| + \| x(t_i) - u(t_i) \| + \| u(t_i) - \xi(t_i) \| +$$
$$+ \| \xi(t_i) - \xi(t) \| + \| \xi(t) - y(t) \| \leq \beta \exp(KBL) +$$
$$+ L\eta_1 (1 + KBL \exp(KBL)) + LBMm^{-1}(1 + KBL \exp(KBL)). \tag{24}$$

Оценим β. Для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{1, m-1}$, в силу условий A_1), A_2)

$$\| x(t) - x(t_i) \| \leq \varepsilon M[t\gamma(t_i)\mu(t - t_i) + B(t - t_i)] \leq$$
$$\leq LM\left[Bm^{-1} + \mu_0 \gamma\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)\right],$$

а для $t \in [t_0, t_1]$ $\| x(t) - x(t_0) \| \leq MBLm^{-1}$.

Следовательно,

$$\beta = ML\left[Bm^{-1} + \mu_0 \gamma\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)\right].$$

Пусть

$$m_0 > \max\left[3LBM\eta^{-1}(1 + KBL\exp(KBL)), 6MBL\eta^{-1}\exp(KBL)\right].$$

Зафиксируем любое $m \geq m_0$. Тогда третье слагаемое в (24) меньше $\eta/3$. В силу оговоренных в условии A_2) свойств функции $\gamma(t)$ существует такое ε_1, что для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$ML\mu_0 \gamma\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \leq \eta[6\exp(KBL)]^{-1}.$$

Таким образом, при выбранном m для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ первое слагаемое в (24) меньше $\eta/3$. Далее для $\eta_1 < \eta[3L(1 + KBL\exp(KBL))]^{-1}$ существует $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедливо соотношение (17). Следовательно, и второе слагаемое в (24) меньше $\eta/3$. Этим завершается доказательство первого утверждения теоремы 2 (второе утверждение доказывается аналогично).

1. *Гайдаров Д. Р., Рагимханов Р. К.* Об одном интегральном включении Гаммерштейна // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, №2. – С. 19–24.
2. *Булгаков А. И., Ляпин Л. Н.* Некоторые свойства множества решений интегрального включения Вольтерра–Гаммерштейна // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, №1. – С. 1465–1472.
3. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 187 с.
4. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* Усреднение дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными // Мат. заметки. – 1990. – **47**, №6. – С. 102-109.
5. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**, №1. – P. 1–12.
6. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. механика. – 1967. – № 3. – С. 16–26.
7. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

Получено 26.04.93