УДК 534.111

Б. И. Сокил, канд. физ.-мат. наук (ун-т „Львовская политехника")

О ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

For a nonautonomous wave equation with homogeneous boundary conditions, we construct single-frequency asymptotic approximations of solutions by using periodic Ateb-function. Resonance and non-resonance cases are considered.

Для неавтономного хвильового рівняння з однорідними крайовими умовами будуються одночастотні наближення асимптотичних розв'язків на основі використання періодичних Ateb-функцій. Розглядаються резонансний і нерезонансний випадки.

Рассмотрим неавтономное волновое уравнение

$$u_{tt} - \alpha(u_x)^{\nu} u_{xx} = \varepsilon f(x, u, u_x, u_t, u_{xt}, \gamma), \tag{1}$$

которое описывает продольные колебания сплошной одномерной среды [1], удовлетворяющей нелинейному закону упругости. Уравнение (1), в котором α, ν — постоянные $(\nu + 1 = (2n+1)/(2m+1),\ n, m = 0, 1, 2, \ldots)$, $f(x, u, u_x, u_t, u_{xt}, \gamma)$ — аналитическая 2π-периодическая по γ функция; $\dot{\gamma} = \mu$, μ — частота внешнего возмущения, ε — малый параметр, для простоты будем рассматривать при однородных краевых условиях вида

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \tag{3}$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0. \tag{4}$$

Первые приближения асимптотических решений некоторых краевых задач для автономного уравнения (1) с использованием периодических Ateb-функций [2] получено в [3]. В настоящей статье рассматривается иной, более простой, способ построения решений рассмотренных краевых задач. Одночастотные решения невозмущенных $(\varepsilon = 0)$ краевых задач (1), (2); (1), (3) и (1), (4) запишем в виде

$$u(x, t) = aX_k(x)\, ca(\nu + 1, 1, \psi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$u_t(x, t) = -\frac{2a}{\nu + 2}\, \omega_k(a) X_k(x)\, sa(1, \nu + 1, \psi_k), \tag{6}$$

где

$$\omega_k(a) = \left(\alpha a^{\nu}\left(\frac{s\Pi}{l}\right)^{\nu+2}\right)^{1/2}, \quad \Pi = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\nu+1}{\nu+2}\right)},$$

a — амплитуда, $\psi_k = \omega_k(a)t + \theta$, θ — фаза колебаний (a, θ — постоянные), s для краевых условий (2), (3), (4) принимает соответственно значения k, $\dfrac{2k+1}{2}$ и $\dfrac{k}{2}$, $X_k(x)$ выражается через периодические Ateb-функции. Соотношения (5), (6) будем считать как замену переменных краевых задач для уравнения (1), только a и θ будут некоторыми функциями времени. Учитывая последнее, из (1), (5), (6) получаем дифференциальные уравнения

$$\dot{a} = -\frac{2\varepsilon}{(\nu+2)\,\omega_k(a)}\,G_s(a,\psi_k,\gamma),$$
$$\dot{\psi}_k = \omega_k(a) + \frac{\varepsilon}{a\,\omega_k(a)}\,G_c(a,\psi_k,\gamma), \tag{7}$$
$$\dot{\gamma} = \mu,$$

где

$$G_{\substack{s\\c}}(a,\psi_k,\gamma) = \begin{Bmatrix} sa(1,\nu+1,\psi_k) \\ ca(\nu+1,1,\psi_k)\end{Bmatrix} \frac{1}{p}\int\limits_0^l f(x, aX_k(x)\,ca(\nu+1,1,\psi_k),\ldots,\gamma)\,dx,$$

$$P = \int\limits_0^l X_k^2(x)\,dx = r\,\frac{l(\nu+2)}{3\nu+4},$$

$r=1$ для краевых условий (2), (3) и $r = 1/2$ для краевых условий (4). Исходя из системы (7), для рассматриваемых краевых задач возможны два случая: 1) нерезонансный $(n\omega_k(a) \neq m\mu)$; 2) резонансный $(n\omega_k(a) \approx m\mu)$.

Нерезонансный случай. Как показано в [4], система дифференциальных уравнений (7) в нерезонансном случае заменой переменных

$$a = \bar{a} + \varepsilon v_1(\bar{a},\bar{\psi}_k,\bar{\gamma}),$$
$$\psi_k = \bar{\psi}_k + \varepsilon w_1(\bar{a},\bar{\psi}_k,\bar{\gamma}), \tag{8}$$
$$\gamma = \bar{\gamma},$$

где $v_1(\bar{a},\bar{\psi}_k,\bar{\gamma})$, $w_1(\bar{a},\bar{\psi}_k,\bar{\gamma})$ — ограниченные функции, приводится к виду

$$\dot{\bar{a}} = \varepsilon A_1(\bar{a}),$$
$$\dot{\bar{\psi}}_k = \omega_k(\bar{a}) + \varepsilon B_1(\bar{a}), \tag{9}$$
$$\dot{\bar{\gamma}} = \mu.$$

В последних соотношениях

$$A_1(\bar{a}) = -\frac{1}{2\pi\Pi(\nu+2)\,\omega_k(\bar{a})}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\Pi} G_s(a,\psi_k,\gamma)\,d\psi_k\,d\gamma,$$

$$B_1(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi\Pi\bar{a}\,\omega_k(\bar{a})}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\Pi} G_c(a,\psi_k,\gamma)\,d\psi_k\,d\gamma.$$

Таким образом, для нерезонансного случая решения краевых задач (1), (2); (1), (3) и (1), (4) в первом приближении описываются зависимостями

$$u(x,t) = \bar{a}\,sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\Pi\frac{k}{l}x\right)ca(\nu+1,1,\bar{\psi}_k), \tag{10}$$

$$u(x,t) = \bar{a}\,sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\Pi\frac{2k+1}{2l}x\right)ca(\nu+1,1,\bar{\psi}_k), \tag{11}$$

$$u(x,t) = \bar{a}\,ca\left(1,\frac{1}{\nu+1},\Pi\frac{k}{l}x\right)ca(\nu+1,1,\bar{\psi}_k), \tag{12}$$

в которых амплитуда $\bar{a}$ и фаза $\bar{\psi}_k$ связаны зависимостями (9).

Резонансный случай. Рассмотрим только случай главного резонанса, т. е. $\omega_k(a) = \mu + \varepsilon\delta(a)$.

Пусть a^* — корень уравнения $\omega_k(a) = \mu$. Ограничимся только случаем изменения амплитуды колебаний в малой окрестности a^*, т. е. с точностью до величин высшего порядка малости $\varepsilon\delta(a) = \frac{d\omega_k(a^*)}{da}(a^* - a)$. Тогда для первого приближения (заменой переменных согласно формуле $\varphi_k = \psi_k - \gamma$) система дифференциальных уравнений (7) приводится к виду

$$\dot{a} = -\frac{2\varepsilon}{(\nu+2)\,\omega_k(a)}\,G_s(a, \varphi_k+\gamma, \gamma),$$

$$\dot{\psi}_k = (a - a^*)\frac{d\omega_k(a^*)}{da} + \frac{\varepsilon}{a\omega_k(a)}\,G_c(a, \varphi_k+\gamma, \gamma), \tag{13}$$

$$\dot{\gamma} = \mu.$$

Усредняя последнюю по быстрой переменной γ, имеем

$$\dot{\overline{a}} = \frac{-\varepsilon}{\pi(\nu+2)\,\omega_k(\overline{a})}\int_0^{2\pi} G_s(\overline{a}, \overline{\varphi}_k + \gamma, \gamma)\,d\gamma = \varepsilon G_s^*(\overline{a}, \overline{\varphi}_k),$$

$$\dot{\overline{\psi}}_k = (\overline{a} - a^*)\frac{d\omega_k(a^*)}{da} + \frac{1}{2\pi\overline{a}\,\omega_k(\overline{a})}\int_0^{2\pi} G_c(\overline{a}, \overline{\varphi}_k + \gamma, \gamma)\,d\gamma = \tag{14}$$

$$= (\overline{a} - a^*)\frac{d\omega_k(a^*)}{da} + \varepsilon G_c^*(\overline{a}, \overline{\varphi}_k).$$

В частности, для определения стационарных значений амплитуды и сдвига фаз имеем систему уравнений

$$G_s^*(\overline{a}, \overline{\varphi}_k) = 0,$$

$$G_c^*(\overline{a}, \overline{\varphi}_k) = \frac{d\omega_k(a^*)}{d\overline{a}}(a^* - a). \tag{15}$$

Тогда установившиеся динамические процессы для краевых задач (1), (2) ; (1), (3) и (1), (4) будут описываться соответственно зависимостями (10)–(12), в которых $\overline{\psi}_k = \omega_k(\overline{a})t + \overline{\varphi}_k$, $\overline{a}$, $\overline{\varphi}_k$ — решения системы (15).

В заключение отметим, что, как частный случай изложенного, при $\nu = 0$ имеем решения соответствующих краевых задач для квазилинейного волнового уравнения [5].

1. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Периодические колебания в нелинейных одномерных сплошных средах // Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Наук. думка, 1984. – 1. – С. 274–276.
2. *Сеник П. М.* Обращения неполной Beta-функции // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 3. – С 325–333.
3. *Сокил Б. И., Барвинский А. Ф.* Об асимптотическом решении одной нелинейной краевой задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 1. – С. 22–26.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
5. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Выща шк., 1976. – 592 с.

Получено 13.04.94