УДК 517.5

В. В. Савчук, М. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НОРМИ МУЛЬТИПЛІКАТОРІВ І НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We show that the Lebesgue–Landau constants of linear methods of summation over triangular domains of Tailor series of functions holomorphic in a polydisk and the unit ball from $\mathbb{C}^m$ are independent of the number m. On the basis of this fact, we find relations between the full and partial best approximations of holomorphic functions in the polydisk and the unit ball from $\mathbb{C}^m$.

Показано, що константи Лебега – Ландау лінійних методів підсумовування по трикутних областях рядів Тейлора функцій, голоморфних у полікрузі та одиничній кулі з $\mathbb{C}^m$, не залежать від числа m. На основі цього факту знайдено співвідношення між повним і частинними найкращими наближеннями голоморфних функцій у полікрузі та одиничній кулі з $\mathbb{C}^m$.

1. Вступ. Нехай m — довільне натуральне число і $\mathbb{C}^m$ — множина всіх упорядкованих наборів $z = (z_1, \ldots, z_m)$ з m комплексних чисел, $\langle z, \zeta \rangle = \sum_{j=1}^{m} z_j \overline{\zeta}_j$ — ермітів скалярний добуток векторів $z, \zeta \in \mathbb{C}^m$ і $|z|_2 := \sqrt{\langle z, z \rangle}$ — його норма. Відкриту одиничну кулю в $\mathbb{C}^m$ та її межу позначатимемо відповідно через $\mathbb{B}^m$ та $\mathbb{S}^m$, тобто $\mathbb{B}^m := \{ z \in \mathbb{C}^m : |z|_2 < 1 \}$, $\mathbb{S}^m := \{ z \in \mathbb{C}^m : |z|_2 = 1 \}$. Нехай, далі, $\mathbb{D}^m := \{ z \in \mathbb{C}^m : \max_{1 \le j \le m} |z_j| < 1 \}$ — одиничний полікруг, $\mathbb{T}^m := \{ z \in \mathbb{C}^m : |z_j| = 1, \ j = \overline{1, m} \}$ — кістяк полікруга $\mathbb{D}^m$. Стандартною мірою на сфері $\mathbb{S}^m$ є нормована борелівська міра, інваріантна відносно обертання, тобто групи всіх ізометрій евклідового простору $\mathbb{R}^{2m}$ з нерухомим початком координат, а на $\mathbb{T}^m$ — нормований добуток мір Лебега одиничних кіл, з яких складається $\mathbb{T}^m$. Позначимо їх відповідно через σ_1 та σ_2. Крім того, будемо користуватися єдиними позначеннями: $\Omega = \mathbb{B}^m \vee \mathbb{D}^m$, $\Gamma = \mathbb{S}^m \vee \mathbb{T}^m$, $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$.

Нехай $\mathcal{H}(\Omega)$ — множина всіх функцій f, голоморфних в області Ω, і

$$M_p(f)(\rho) := \begin{cases} \int\limits_{\Gamma} |f(\rho w)|^p \, d\sigma(w), & 0 < p < \infty; \\ \sup_{z \in \Omega} |f(\rho z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Простір Харді $H_p = H_p(\Omega)$, $0 < p \le \infty$, складається з усіх функцій $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, для яких $\sup_{0<\rho<1} M_p(f)(\rho) < \infty$. При $1 \le p < \infty$ нормою в H_p є величина $\|\cdot\|_p := \sup_{0<\rho<1} \{ M_p(\cdot)(\rho) \}^{1/p}$, а при $p = \infty$ — величина $\|\cdot\|_\infty := \sup_{0<\rho<1} M_\infty(\cdot)(\rho)$.

За необхідністю, для того щоб відрізняти одновимірний випадок від багатовимірного, будемо позначати через $H_{p,1}$ і $\|\cdot\|_{p,1}$ відповідно простір Харді і норму в ньому у випадку, коли $\Omega = \mathbb{D}^1$.

Нехай $\mathcal{M}$ — множина, що складається з перших m натуральних чисел, тобто $\mathcal{M} := \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathfrak{m}$ — непорожня впорядкована підмножина множини $\mathcal{M}$, $|\mathfrak{m}|$ — кількість елементів множини $\mathfrak{m}$ і $\overline{\mathfrak{m}} := \mathcal{M} \setminus \mathfrak{m}$ — доповнення множини $\mathfrak{m}$ до множини $\mathcal{M}$.

Зафіксуємо мультиіндекс $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ — впорядкований набір із m невід'ємних цілих чисел і множину $\mathfrak{m} \subset \mathcal{M}$. Вираз $\mathbf{n}(\mathfrak{m}) := \left(n_{\nu_1}, \ldots, n_{\nu_{|\mathfrak{m}|}}\right)$, $\nu_j \in \mathfrak{m}$, будемо називати підмультиіндексом по множині $\mathfrak{m}$.

Нехай, далі, $\mathcal{P}_{n_j, \infty}$ — множина функцій $P \in \mathcal{H}(\Omega)$, що є алгебраїчними многочленами степеня не більше n_j, $n_j \in \mathbb{N}_0$, по змінній z_j, і

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}(\mathfrak{m}), \infty} := \bigcap_{j \in \mathfrak{m}} \mathcal{P}_{n_j, \infty},$$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}} := \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\mathcal{M}), \infty} = \bigcap_{j \in \mathcal{M}} \mathcal{P}_{n_j, \infty}.$$

Таким чином, $\mathcal{P}_{\mathbf{n}(\mathfrak{m}), \infty}$, $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$ — множини функцій з H_p, що є алгебраїчними многочленами відповідно по групі змінних z_j, $j \in \mathfrak{m}$, і по всіх змінних z_j, $j \in \mathcal{M}$, степенів не більше n_j.

Прямокутним частинним найкращим наближенням функції $f \in H_p$ по групі змінних z_j, $j \in \mathfrak{m}$, степеня n_j, $j \in \mathfrak{m}$, називають величину

$$E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\mathfrak{m}), \infty}\right)_p := \inf\left\{\|f - P\|_p : P \in \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\mathfrak{m}), \infty}\right\}.$$

Якщо $\mathfrak{m} = \{j\}$, то величина

$$E\left(f, \mathcal{P}_{n_j, \infty}\right)_p := \inf\left\{\|f - P\|_p : P \in \mathcal{P}_{\mathbf{n}(j), \infty}\right\}$$

є частинним найкращим наближенням по одній змінній z_j, якщо ж $\mathfrak{m} = \mathcal{M}$, то величина

$$E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p := E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\mathfrak{m}), \infty}\right)_p := \inf\left\{\|f - P\|_p : P \in \mathcal{P}_{\mathbf{n}}\right\}$$

є повним найкращим наближенням алгебраїчними поліномами функції f.

С. Н. Бернштейн [1] вказав на можливість зведення дослідження конструктивних властивостей функції за сукупністю всіх змінних до дослідження її конструктивних властивостей по кожній змінній окремо. Зокрема, в [1] знайдено співвідношення між повним (по всіх змінних) і частинними (по одній змінній) найкращими поліноміальними наближеннями неперервних функцій двох змінних.

Детальні дослідження таких та аналогічних співвідношень для функцій двох і більшого числа змінних було продовжено в роботах М. П. Тімана [2 – 4], Е. О. Стороженко [5], О. І. Степанця [6], В. М. Темлякова [7 – 9] та інших.

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}(m, p) := \sup_{f \in H_p} \frac{E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p}{\sum_{j=1}^{m} E\left(f, \mathcal{P}_{n_j, \infty}\right)_p}.$$

Легко бачити, що для цієї величини виконується співвідношення $\mathcal{E}(m, p) \geq$ $\geq 1/m$ для всіх $p \in [1, \infty]$.

З іншого боку, використовуючи властивості частинних сум рядів Тейлора та їх оцінки в метриці $\|\cdot\|_p$, можна показати (див., наприклад, [10], гл. 2), що при

$1 < p < \infty$ існує константа $C_{p,m}$, залежна тільки від p і m, така, що

$$\mathscr{E}(m, p) \le C_{p,m}.$$

У випадку, коли $p = 1 \vee \infty$, для голоморфних у бікрузі $\mathbb{D}^2$ функцій двох змінних В. М. Темляков [9] показав, що для будь-якого $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^2 := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$$\mathscr{E}(2, p) = \frac{1}{\pi}\ln(\min(n_1, n_2) + 1) + O(1). \tag{1}$$

Повторюючи дослівно хід доведення результату М. П. Тімана [2] про співвідношення між повним і частинними найкращими тригонометричними наближеннями періодичних функцій багатьох змінних, а також застосовуючи один результат Е. Ландау, можна показати, що при $m \ge 2$

$$E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p \le \min_{m \in \mathcal{M} : |m| = [m/2]} \prod_{j \in m} \left(\frac{1}{\pi}\ln(n_j + 1) + O(1) \right) \times$$

$$\times \left(E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(m), \infty}\right)_p + E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}), \infty}\right)_p \right) \quad \forall f \in H_p(\Omega), \quad p = 1 \vee \infty, \tag{2}$$

де $[\alpha]$ — ціла частина числа α.

Для голоморфних функцій багатьох змінних часто виявляється більш зручним досліджувати наближення, що здійснюються „трикутними" многочленами, тобто коли мультиіндекси $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ у розкладі функцій $P(z) = \sum a_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}$, за допомогою яких здійснюється наближення, для заданого натурального n задовольняють умову $|\mathbf{k}|_1 := \sum_{j=1}^{m} |k_j| \le n$.

З огляду на це розглянемо задачу про оцінки повного найкращого наближення голоморфної функції багатьох змінних через найкращі наближення функціями, що є „трикутними" многочленами по заданій групі змінних.

У розв'язанні цієї задачі будемо використовувати так звані лінійні методи підсумовування по трикутниках m-кратних степеневих рядів і той факт (наслідок 1), що константи Лебега – Ландау таких методів не залежать від числа m.

Робота написана за такою схемою. У пункті 2 ми розглядаємо послідовність лінійних операторів, що є по суті послідовністю мультиплікаторів рядів по однорідних многочленах, породжених фіксованою послідовністю $\{\mu_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ комплексних чисел. Фіксований набір послідовностей $\{\mu^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, де $\mu^{(n)} = \{\mu_\nu^{(n)}\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$, можна розглядати як рядки деякої нескінченної матриці над полем комплексних чисел. У такому розумінні фіксована послідовність мультиплікаторів рядів по однорідних многочленах задає певний лінійний метод підсумовування по трикутниках m-кратних степеневих рядів (наприклад, метод Валле Пуссена, метод Абеля – Пуассона тощо). Основним результатом у цьому пункті є теорема 1 про те, що значення норм мультиплікаторів не залежать від числа m і в точності збігаються з величинами норм таких самих мультиплікаторів звичайних (1-кратних) степеневих рядів.

Напевно, цей факт у неявному вигляді можна помітити у багатьох роботах, в яких застосовувалася техніка розкладу в ряд по однорідних многочленах. Однак ми свідомо формулюємо його у вигляді окремого твердження, сподіваючись на те, що воно знайде свої застосування в задачах теорії голоморфних функцій багатьох змінних.

У пункті 3 ми вказуємо на нові співвідношення між повним і частинними „трикутними" найкращими наближеннями голоморфних функцій багатьох змінних. При доведенні результатів цього пункту ми, власне, демонструємо ефективність застосування теореми 1.

2. Норми мультиплікаторів рядів по однорідних многочленах. Відомо, що будь-яку функцію $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ можна зобразити у вигляді суми m-кратного степеневого ряду (ряду Тейлора), збіжного в кожній точці Ω. Нехай $\mathbf{k} :=$ $:= (k_1, \ldots, k_m)$— мультиіндекс, $z^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}$ — голоморфний моном і

$$f(z) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}, \quad z \in \Omega, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

де під сумою розуміємо кратну суму $\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=0}^{\infty}$.

Для кожного $\nu \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ покладемо $F_\nu(z) := F_\nu(f, z) :=$ $:= \sum_{|\mathbf{k}|_1=\nu} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}$. Тоді ряд (3) можна переписати у вигляді

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(z) \quad \forall z \in \Omega. \tag{4}$$

Нехай, далі, $\{\mu_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ — довільна послідовність комплексних чисел. За допомогою цієї послідовності задамо лінійний оператор μ, який кожній функції $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ на основі її розкладу в ряд (4) ставить у відповідність функцію $\mu(f)(z)$, яка має розклад

$$\mu(f)(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu_\nu F_\nu(z), \quad z \in \Omega. \tag{5}$$

Нехай $B_p := \{ f \in H_p : \|f\|_p \le 1 \}$, $1 \le p \le \infty$.

Якщо $\mu : H_p \to H_p$, то під нормою оператора μ будемо розуміти число

$$\|\mu\|_{H_p \to H_p} = \sup_{f \in B_p} \|\mu(f)\|_p = \sup_{\substack{f \in H_p, \\ f \ne 0}} \frac{\|\mu(f)\|_p}{\|f\|_p}.$$

Якщо $\mu : H_{p,1} \to H_{p,1}$, то норму оператора μ будемо позначати через $\|\mu\|_{H_{p,1} \to H_{p,1}}$.

Зазначимо, що у випадку, коли оператор μ діє неперервно з H_p в H_p, говорять, що μ є мультиплікатором рядів вигляду (4) типу (H_p, H_p) (означення див., наприклад, у [11], гл. 16).

Теорема 1. *Нехай $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$ і μ — оператор, породжений послідовністю комплексних чисел $\{\mu_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$, що діє за правилом* (5). *Тоді*

$$\|\mu\|_{H_p \to H_p} = \|\mu\|_{H_{p,1} \to H_{p,1}}. \tag{6}$$

Розглянемо тепер послідовність лінійних операторів $\{U_n\}_0^\infty$, заданих на просторі H_p, що діють за правилом

$$U_n(f)(z) = U_{n,\Lambda}(f)(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^n F_\nu(f, z), \tag{7}$$

де λ_ν^n — елементи нескінченної нижньотрикутної матриці $\Lambda := \left\{\lambda_\nu^n\right\}$, $n = \overline{0, \infty}$, $\nu = \overline{0, n}$, над полем комплексних чисел.

Таким чином, будь-яка нижньотрикутна матриця Λ породжує за правилом (7) певний лінійний поліноміальний метод наближення по трикутниках функцій простору H_p.

Послідовність чисел

$$L_n(\Lambda, p, m) := \sup_{f \in B_p(\Omega)} \|U_n(f)\|_{H_p(\Omega)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Omega = \mathbb{B}^m \vee \mathbb{D}^m,$$

будемо називати константами („трикутними") Лебега – Ландау методу Λ у просторі $H_p(\Omega)$. У випадку, коли $m = 1$, будемо записувати $L_n(\Lambda, p)$ замість $L_n(\Lambda, p, 1)$.

Наслідок 1. *Нехай $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$ і Λ — фіксована нижньотрикутна матриця над полем комплексних чисел. Тоді*

$$L_n(\Lambda, p, m) = L_n(\Lambda, p).$$

Розглянемо наступні приклади. Нехай $\Lambda = T := \left\{\lambda_\nu^n\right\}$, де $\lambda_\nu^n = 1$, $\nu = \overline{0, n}$, тоді матриця T породжує послідовність операторів, що ставлять у відповідність функції $f \in H_p$ частинні суми порядку n рядів вигляду (4):

$$U_n(f)(z) = \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(f, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{|\mathbf{k}|_1=\nu} c_\mathbf{k} z^\mathbf{k},$$

якщо ж $\Lambda = V_l := \left\{\lambda_\nu^n\right\}$, де

$$\lambda_\nu^n = \begin{cases} 1, & \nu = \overline{0, l}; \\ 1 - \dfrac{\nu - l}{n - l + 1}, & \nu = \overline{l, n}, \qquad l \le n, \end{cases}$$

то матриця V_l породжує послідовність операторів, що діють за правилом

$$U_n(f)(z) = \sum_{\nu=0}^{l} F_\nu(f, z) + \sum_{\nu=l+1}^{n} \left(1 - \frac{\nu - l}{n - l + 1}\right) F_\nu(f, z).$$

Такі оператори називають відповідно трикутними сумами Тейлора порядку n і трикутними сумами Валле Пуссена порядку n з індексом l функції $f \in H_p$ і позначають через $S_n^\Delta(f)(z)$ і $V_{n,l}^\Delta(f)(z)$. При цьому, як неважко переконатися,

$$V_{n,l}^\Delta(f)(z) = \frac{1}{n - l + 1} \sum_{\nu=l}^{n} S_n^\Delta(f)(z). \tag{8}$$

Згідно з наслідком 1 і результатами Е. Ландау, С. Б. Стечкіна і Л. В. Тайкова для констант Лебега – Ландау трикутних сум Тейлора і Валле Пуссена виконуються асимптотичні рівності

$$L_n(T, p, m) = L_n(T, p) = \frac{1}{\pi} \ln(n+1) + O(1), \quad n \to \infty, \quad p = 1 \vee \infty, \tag{9}$$

$$L_n(V_l, p, m) = L_n(V_l, p) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{n+1}{n-l+1} + O(1), \quad n \to \infty, \quad p = 1 \vee \infty. \tag{10}$$

Останню рівність в (9) при $p=\infty$ отримав Е. Ландау (див., наприклад, [12]), а в (10) при $p=\infty$ — С. Б. Стечкін (див. виноску в [13]) і Л. В. Тайков [13] при $p = 1$.

Зауважимо, що для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ константи $L_n(T, p, m)$ і $L_n(V_l, p, m)$ збігаються за порядком (асимптотично) з константами Лебега сум Фур'є і Валле Пуссена 2π-періодичних функцій однієї змінної. Цей факт різко контрастує з результатом І. К. Даугавет [14] про те, що константи Лебега трикутних сум Фур'є порядку n періодичних функцій двох змінних асимптотично дорівнюють $16/\pi^4 \ln^2 n$.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $f \in B_p$, $z \in \Omega$. Розглянемо зріз-функцію $f_z(\omega) := f(\omega z)$, $\omega \in \overline{\mathbb{D}}^1 := \mathbb{D}^1 \cup \mathbb{T}^1$, $\omega z := (\omega z_1, \ldots, \omega z_m)$.

Оскільки функції $F_\nu(\cdot)$ є однорідними многочленами степеня ν, $\nu \in \mathbb{N}_0$, то, виходячи з розкладу (4), маємо $f_z(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(z)\omega^\nu$, так що числа $F_\nu(z)$ є коефіцієнтами Тейлора функції $f_z(\cdot)$, голоморфної в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}^1$. Тому для кожного фіксованого $z \in \Omega$ і будь-якого $\theta \in [-\pi, \pi]$ $\mu(f)(e^{i\theta}z) = \mu(f_z)(e^{i\theta})$.

Звідси, враховуючи інваріантність міри σ відносно обертання, за теоремою Фубіні одержуємо

$$\int_\Gamma |\mu(f)(\rho w)|^p d\sigma(w) = \int_\Gamma d\sigma(w) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mu(f)(\rho e^{i\theta} w)\right|^p d\theta =$$

$$= \int_\Gamma d\sigma(w) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mu(f_{\rho w})(e^{i\theta})\right|^p d\theta \quad \forall \rho \in [0, 1), \quad 1 \le p < \infty. \tag{11}$$

Розглянемо окремо внутрішній інтеграл у рівності (11). Оскільки зріз-функція $f_{\rho w}(\cdot)$ при фіксованих $\rho \in [0, 1)$ і $w \in \Gamma$ є голоморфною в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}^1$ і належить простору $H_{p,1}$, функція $\mu(f_{\rho w})(\cdot)$ є образом оператора μ у випадку, коли цей оператор діє з $H_{p,1}$.

Таким чином,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mu(f_{\rho w})(e^{i\theta})\right|^p d\theta = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mu(f_{\rho w})(re^{i\theta})\right|^p d\theta = \left\|\mu(f_{\rho w})(\cdot)\right\|_{p,1}^p \le$$

$$\le \|\mu\|_{H_{p,1} \to H_{p,1}}^p \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{\rho w}(e^{i\theta})\right|^p d\theta.$$

Підставляючи цю оцінку в (11), одержуємо

$$\int_\Gamma |\mu(f)(\rho w)|^p d\sigma(w) \le \|\mu\|_{H_{p,1} \to H_{p,1}}^p \int_\Gamma d\sigma(w) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{\rho w}(e^{i\theta})\right|^p d\theta =$$

$$= \|\mu\|_{H_{p,1} \to H_{p,1}}^p \|f\|_p^p \le \|\mu\|_{H_{p,1} \to H_{p,1}}^p \quad \forall \rho \in [0, 1), \quad 1 \le p < \infty.$$

Аналогічно у випадку, коли $p = \infty$,

$$\left|\mu(f)(e^{i\theta}z)\right| = \left|\mu(f_z)(e^{i\theta})\right| \le$$

$$\leq \|f_z(\cdot)\|_{\infty,1}\|\mu\|_{H_{\infty,1}\to H_{\infty,1}} \leq \|\mu\|_{H_{\infty,1}\to H_{\infty,1}} \quad \forall z\in\Omega, \quad \forall\theta\in[-\pi,\pi].$$

Отже,

$$\|\mu\|_{H_p\to H_p} = \sup_{f\in B_p}\|\mu(f)\|_p \leq \|\mu\|_{H_{p,1}\to H_{p,1}}, \quad p\in[1,\infty].$$

Для доведення оберненої нерівності розглянемо оператор продовження Q, заданий на $H_{p,1}$, $1\leq p\leq\infty$, формулою

$$Q(g)(z_1, z^1) = g(z_1),$$

в якій $z_1\in\mathbb{D}^1$, $z^1=(z_2,\ldots,z_m)\in\mathbb{D}^{m-1}\vee\mathbb{B}^{m-1}$.

Неважко показати, що оператор продовження Q є лінійною ізометрією простору $H_{p,1}$ в H_p. Тому

$$\|\mu(f)\|_{p,1} = \|Q(\mu(f))\|_p \leq \|\mu\|_{H_p\to H_p}\|Q(f)\|_p = \|\mu\|_{H_p\to H_p}\|f\|_{p,1}.$$

Звідси випливає оцінка

$$\|\mu\|_{H_{p,1}\to H_{p,1}} \leq \|\mu\|_{H_p\to H_p}.$$

3. Співвідношення між повним і частинними найкращими наближеннями голоморфних функцій багатьох змінних. При формулюванні основного результату цього пункту будемо використовувати наступні позначення.

Для даної множини $m\subset\mathcal{M}$ через z_m будемо позначати набір з $|m|$ комплексних чисел $(z_{j_1},\ldots,z_{j_{|m|}})$, $j_1,\ldots,j_{|m|}\in m$, а для підмультиіндекса $\mathbf{k}(m):= := (k_{j_1},k_{j_2},\ldots,k_{j_{|m|}})$ через $z_m^{\mathbf{k}(m)}$ — відповідний моном:

$$z_m^{\mathbf{k}(m)} := z_{j_1}^{k_{j_1}}\ldots z_{j_{|m|}}^{k_{j_{|m|}}}.$$

Нехай $m\subset\mathcal{M}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Позначимо через $\mathcal{P}_{n,\infty}^{\Delta(m)}$ множину функцій $P\in\mathcal{H}(\Omega)$ вигляду

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{|\mathbf{k}(m)|_1=\nu}\left(\sum_{\mathbf{k}(\overline{m})=0}^{\infty}a_{\mathbf{k}}z_{\overline{m}}^{\mathbf{k}(\overline{m})}\right)z_m^{\mathbf{k}(m)},$$

де під сумою в дужках розуміємо кратну суму $\sum_{k_{j_1}=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_{j_{|\overline{m}|}}}^{\infty}$, в якій індекси $j_1,\ldots,j_{|\overline{m}|}\in\overline{m}$.

Таким чином, $\mathcal{P}_{n,\infty}^{\Delta(m)}$ — множина голоморфних функцій, що є „трикутними" алгебраїчними многочленами порядку n по групі змінних z_j, $j\in m$.

Підмножину в $\mathcal{P}_{n,\infty}^{\Delta(m)}$ функцій, що є алгебраїчними многочленами по кожній змінній z_j, $j\in\overline{m}$, відповідно степеня n_j, $n_j\in\mathbb{N}_0$, будемо позначати через $\mathcal{P}_{n,\mathbf{n}(\overline{m})}^{\Delta(m)}$ $(\mathbf{n}(\overline{m})=(n_{j_1},\ldots,m_{j_{|\overline{m}|}}))$, тобто

$$\mathcal{P}_{n,\mathbf{n}(\overline{m})}^{\Delta(m)} = \mathcal{P}_{n,\infty}^{\Delta(m)}\bigcap\mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}),\infty}.$$

Для підмультиіндексів $\mathbf{l}(m)$ і $\mathbf{n}(m)$ по множині m, $m\subseteq\mathcal{M}$, під записом $\mathbf{l}(m)\leq\mathbf{n}(m)$ будемо розуміти, що $l_j\leq n_j \quad \forall j\in m$.

Теорема 2. *Нехай* $p = 1 \vee \infty$, $m \ge 2$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ — *фіксований мультиіндекс і* $\mathfrak{m} \subsetneq \mathcal{M}$, $\mathfrak{m} \ne \varnothing$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in H_p$ *виконується нерівність*

$$E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p \le E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\mathfrak{m})}_{n_*, \mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}})}\right)_p \le$$

$$\le \min_{\substack{\mathbf{l}(\mathfrak{m}) \\ \mathbf{l}(\mathfrak{m}) \le \mathbf{n}(\mathfrak{m})}} \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{n_* + 1}{n_* - l_* + 1} + O(1)\right)\left(E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\mathfrak{m})}_{l_*, \infty}\right)_p + E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}}), \infty}\right)_p\right), \tag{12}$$

де $n_* := \min_{j \in \mathfrak{m}} n_j$, $l_* := \min_{j \in \mathfrak{m}} l_j$, $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно* f, n_*, l_*.

Зазначимо, що співвідношення (12) є аналогом результату М. П. Тімана [4] і збігається з ним по суті при $m = 2$.

Як наслідок теореми 1 і результату В. М. Темлякова [9] (див. рівність (1)) маємо таке твердження.

Теорема 3. *За умов теореми 2 є правильною рівність*

$$\sup_{f \in H_p} \frac{E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p}{E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\mathfrak{m})}_{n_*, \infty}\right)_p + E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\overline{\mathfrak{m}})}_{n^*, \infty}\right)_p} = \frac{1}{\pi} \ln\left(\min(n_*, n^*) + 1\right) + O(1),$$

в якій $n_* := \min_{j \in \mathfrak{m}} n_j$, $n^* := \min_{j \in \overline{\mathfrak{m}}} n_j$ *і* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно* $\min(n_*, n^*)$.

При доведенні теореми 2 будемо користуватися наступними позначеннями.

Нехай, далі,

$$S_n^{\Delta(\mathfrak{m})}(f)(z) := \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{|\mathbf{k}(\mathfrak{m})|_1 = \nu} \left(\sum_{\mathbf{k}(\overline{\mathfrak{m}}) = 0}^{\infty} c_{\mathbf{k}} z_{\overline{\mathfrak{m}}}^{\mathbf{k}(\overline{\mathfrak{m}})}\right) z_{\mathfrak{m}}^{\mathbf{k}(\mathfrak{m})}.$$

Так будемо позначати трикутну суму Тейлора функції $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ порядку $n \in \mathbb{N}_0$ по множині $\mathfrak{m}$.

Трикутну суму Валле Пуссена функції $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ порядку $n \in \mathbb{N}_0$ з індексом $l \in \mathbb{N}_0$ по множині $\mathfrak{m}$ будемо позначати таким чином:

$$V_{n,l}^{\Delta(\mathfrak{m})}(f)(z) := \frac{1}{n - l + 1} \sum_{\nu = l}^{n} S_\nu^{\Delta(\mathfrak{m})}(f)(z).$$

Доведення теореми 2. Оскільки $\mathcal{P}^{\Delta(\mathfrak{m})}_{n_*, \mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}})} \subset \mathcal{P}_n$, то

$$E(f, \mathcal{P}_n)_p \le E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\mathfrak{m})}_{n_*, \mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}})}\right)_p. \tag{13}$$

Нехай $\mathbf{l}(\mathfrak{m})$ — довільний підмультиіндекс такий, що $\mathbf{l}(\mathfrak{m}) \le \mathbf{n}(\mathfrak{m})$. Покажемо, що для будь-якої функції $f \in H_p$ має місце співвідношення

$$E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\mathfrak{m})}_{n_*, \mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}})}\right)_p \le \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{n_* + 1}{n_* - l_* + 1} + O(1)\right) \times$$

$$\times \left(E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\mathfrak{m})}_{l_*, \infty}\right)_p + E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}}), \infty}\right)_p\right), \tag{14}$$

що з урахуванням (13) і доводитиме теорему 2.

Нехай $P_l \in \mathcal{P}^{\Delta(m)}_{l_*,\infty}$ і $P_n \in \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}),\infty}$ такі, що для заданого $\varepsilon > 0$

$$\| f - P_l \|_p = E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(m)}_{l_*,\infty}\right)_p + \varepsilon,$$

$$\| f - P_n \|_p = E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}),\infty}\right)_p + \varepsilon.$$

Розглянемо трикутну суму Валле Пуссена функції P_n порядку n_* з індексом l_* по множині m. Неважко перевірити, що $V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_n) \in \mathcal{P}^{\Delta(m)}_{n_*,\mathbf{n}(\overline{m})}$.

Таким чином,

$$E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(m)}_{n_*,\mathbf{n}(\overline{m})}\right)_p \le \left\| f - V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_n) \right\|_p \le$$

$$\le \| f - P_l \|_p + \left\| P_l - V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_n) \right\|_p =$$

$$= E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(m)}_{l_*,\infty}\right)_p + \left\| P_l - V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_n) \right\|_p + \varepsilon. \tag{15}$$

Для оцінки другого доданка в (15) зауважимо, що згідно з (8)

$$P_l(z) - V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_n)(z) = V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_l - P_n)(z). \tag{16}$$

Зафіксуємо тепер змінні z_j для всіх індексів $j \in \overline{m}$ і розглянемо різницю $P_l - P_n$ як функцію змінних z_j, $j \in m$ (числа $|m|$), тобто вважаємо, що

$$(P_l - P_n)(z) = ((P_l - P_n)(z_{\overline{m}}, \cdot))(z_m), \qquad z_m \in \Omega_r^{|m|}, \tag{17}$$

де $\Omega_r^{|m|}$ означає або кулю $\mathbb{B}_r^{|m|}$ радіуса r, що не перевищує числа $1 - \langle z_{\overline{m}}, z_{\overline{m}} \rangle$, або полікруг $\mathbb{D}^{|m|}$.

Тоді для будь-якого $z \in \Omega$ справедлива оцінка

$$\left| V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_l - P_n)(z) \right| \le \sup_{z_m \in \Omega_r^{|m|}} \left| V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}((P_l - P_n)(z_{\overline{m}}, \cdot))(z_m) \right|,$$

з якої згідно з (10) випливає

$$\left\| V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_l - P_n) \right\|_\infty \le L_{n_*}\left(V_{n_*}, \infty, |m|\right) \| P_l - P_n \|_\infty \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{n_* + 1}{n_* - l_* + 1} + O(1) \right) \left(E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(m)}_{l_*,\infty}\right)_\infty + E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}),\infty}\right)_\infty + 2\varepsilon \right). \tag{18}$$

Таким чином, враховуючи (15), (16) і (18), в силу довільності ε одержуємо оцінку (14) при $p = \infty$.

Розглянемо тепер випадок, коли $p = 1$. Маючи на увазі (17), для будь-якого $\rho \in (0, 1)$ отримуємо

$$M_1\left(V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}(P_l - P_n)\right)(\rho) = \int_\Gamma \left| V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}((P_l - P_n)(\rho\zeta_{\overline{m}}, \cdot))(\rho\zeta_m) \right| d\sigma(\zeta). \tag{19}$$

Оскільки міра σ інваріантна відносно обертання, згідно з лемою 1.4.2 з монографії [15] інтеграл в останній рівності можна замінити інтегралом

$$\int_\Gamma d\sigma(\zeta) \int_{\mathbb{T}^{|m|}} \left| V^{\Delta(m)}_{n_*,l_*}((P_l - P_n)(\rho\zeta_{\overline{m}}, \cdot))(\rho\zeta_m w) \right| d\sigma_2(w). \tag{20}$$

Для оцінки внутрішнього інтеграла в (20) зафіксуємо $\rho \in (0, 1)$, $\zeta \in \Gamma$ і розглянемо функцію G:

$$G : w \mapsto ((P_l - P_n)(\rho\zeta_{\overline{m}}, \cdot))(\rho\zeta_m w), \qquad w \in \mathbb{D}^{|m|}.$$

Оскільки функція $P_l - P_n$ є голоморфною в Ω (тобто голоморфна по кожній змінній окремо), то функція G є голоморфною в замкненому полікрузі $\overline{\mathbb{D}}^{|m|}$, а тому за принципом максимуму

$$\|G\|_{H_1(\mathbb{D}^{|m|})} = \int_{\mathbb{T}^{|m|}} |G(w)| d\sigma_2(w) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^{|m|}} |((P_l - P_n)(\rho\zeta_{\overline{m}}, \cdot))(\rho\zeta_m w)| d\sigma_2(w) < \infty.$$

Цей факт дозволяє застосувати до внутрішнього інтеграла в (20) наслідок 1, згідно з яким (див. рівність (10))

$$\int_{\mathbb{T}^{|m|}} \left| V_{n_*, l_*}^{\Delta(m)}((P_l - P_n)(\rho\zeta_{\overline{m}}, \cdot))(\rho\zeta_m w) \right| d\sigma_2(w) \le$$

$$\le L_{n_*}(V_l, 1, |m|) \int_{\mathbb{T}^{|m|}} |((P_l - P_n)(\rho\zeta_{\overline{m}}, \cdot))(\rho\zeta_m w)| d\sigma_2(w) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{n_* + 1}{n_* - l_* + 1} + O(1) \right) \int_{\mathbb{T}^{|m|}} |((P_l - P_n)(\rho\zeta_{\overline{m}}, \cdot))(\rho\zeta_m w)| d\sigma_2(w). \tag{21}$$

Таким чином, враховуючи (15), (19) і оцінку (21) інтеграла (20), одержуємо оцінку

$$\left\| P_l - V_{n_*, l_*}^{\Delta(m)}(P_n) \right\|_1 \le \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{n_* + 1}{n_* - l_* + 1} + O(1) \right) \times$$

$$\times \left(E\left(f, \mathcal{P}_{l_*, \infty}^{\Delta(m)}\right)_1 + E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}), \infty}\right)_1 + 2\varepsilon \right).$$

Підставляючи цю оцінку в (15), в силу довільності ε одержуємо (14) і при $p = 1$.

Теорему 2 доведено.

Доведення теореми 3. Нехай $f \in H_p$. Застосуємо до величини $E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p$ теорему 1, взявши як $\mathbf{l}(m)$ мультиіндекс $\mathbf{n}(m)$. В результаті отримаємо оцінку

$$E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p \le \left(\frac{1}{\pi} \ln(n_* + 1) + O(1) \right) \left(E\left(f, \mathcal{P}_{n_*, \infty}^{\Delta(m)}\right)_p + E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}), \infty}\right)_p \right) \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\pi} \ln(n_* + 1) + O(1) \right) \left(E\left(f, \mathcal{P}_{n_*, \infty}^{\Delta(m)}\right)_p + E\left(f, \mathcal{P}_{n^*, \infty}^{\Delta(\overline{m})}\right)_p \right). \tag{22}$$

В останній нерівності скористалися тим фактом, що $E\left(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}), \infty}\right)_p \le$ $\le E\left(f, \mathcal{P}_{n^*, \infty}^{\Delta(\overline{m})}\right)_p$, оскільки $\mathcal{P}_{\mathbf{n}(\overline{m}), \infty} \supset \mathcal{P}_{n^*, \infty}^{\Delta(\overline{m})}$.

Застосувавши до величини $E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p$ теорему 2, в якій тепер як m використовується $\overline{m}$, знову одержимо оцінку (22), на основі якої приходимо до висновку, що

$$\sup_{f \in H_p} \frac{E(f, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})_p}{E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(m)}_{n_*, \infty}\right)_p + E\left(f, \mathcal{P}^{\Delta(\tilde{m})}_{n^*, \infty}\right)_p} \le \frac{1}{\pi} \ln\left(\min(n_*, n^*) + 1\right) + O(1).$$

Непокращуваність цієї оцінки випливає з (1).

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 24 – 29.
2. *Тиман М. Ф.* О взаимосвязи между полным и частными наилучшими приближениями в среднем функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1957. – **112**, № 1. – С. 24 – 26.
3. *Тиман М. Ф.* К вопросу о связи между полным и частными наилучшими приближениями функций многих пременных // Там же. – 1959. – **124**, № 3. – С. 527 – 528.
4. *Тиман М. Ф.* Некоторые вопросы конструктивной теории функций многих переменных // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 247 – 251.
5. *Стороженко Э. А.* О наилучшем приближении функций двух переменных при помощи многочленов // Там же. – С. 243 – 247.
6. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
7. *Темляков В. Н.* О наилучшем приближении функций двух переменных // Докл. АН СССР. – 1975. – **223**, № 5. – С. 1079 – 1082.
8. *Темляков В. Н.* О соотношении между наилучшими приближениями функций двух переменных // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 1. – С. 95 – 106.
9. *Темляков В. Н.* О соотношении между наилучшими приближениями аналитических в бикруге функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **164**. – С. 189 – 196.
10. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
11. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье: В 2 т. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 399 с.
12. *Landau E.* Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. – Berlin; New York: Springer, 1986. – 201 p.
13. *Тайков Л. В.* О методах суммирования рядов Тейлора // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 1. – С. 252 – 254.
14. *Дзядык В. К.* О постоянных Лебега двойных рядов Фурье // Методы вычислений. – 1970. – № 6. – С. 8 – 13.
15. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в C^n. – М.: Мир, 1984. – 456 с.

Одержано 30.07.2002