УДК 517.5

**Ю. В. Гнатюк** (Кам'янець-Поділ. пед. ун-т)

# НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ СІМ'Ї НЕПЕРЕРВНИХ НА КОМПАКТІ ФУНКЦІЙ

We investigate a problem of the best uniform approximation of a function continuous on a compact set. We generalize the principal results of this investigation to a problem of the best simultaneous uniform approximation of a family of functions continuous on a compact set.

Основні результати дослідження задачі найкращого рівномірного наближення однієї неперервної на компакті функції узагальнено на випадок задачі найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій.

Як відомо, в різних галузях математики, особливо прикладних напрямів, виникають проблеми, дослідження яких приводить до задач на одночасне наближення. Серед них, зокрема, задача чебишовського наближення системи лінійних несумісних рівнянь [1], задача відшукання чебишовського центра множини (див., наприклад, [2, 3]), задача одночасного наближення функцій та їх похідних [4], узагальнена проблема моментів із моментами з многогранника [5] тощо.

У цій роботі розглядається задача найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій елементами лінійного скінченновимірного підпростору, що є узагальненням задачі найкращого рівномірного наближення однієї неперервної на компакті функції, дослідження якої започаткував П. Л. Чебишов.

Нехай $C(S)$ — векторний простір дійснозначних функцій $f$, неперервних на компакті $S$, з нормою $\|f\| = \max_{s\in S}|f(s)|$. Будемо позначати через $G$ множину сімей $\{\varphi_j,\ j\in I\}$ функцій простору $C(S)$, де $I$ — довільна множина індексів таких, що для будь-якого елемента $s\in S$ $\varphi_j(s)$, як функція $j$, досягає на $I$ найменшого та найбільшого значень і функції $\Phi_1(s) = \min_{j\in I}\varphi_j(s)$, $\Phi_2(s) = \max_{j\in I}\varphi_j(s)$ неперервні на компакті $S$.

Легко переконатися, що коли $\{\varphi_j,\ j\in I\}\in G$, то для кожного $g\in C(S)$ існує $j_g\in I$ таке, що

$$\sup_{j\in I}\|g-\varphi_j\| = \|g-\varphi_{j_g}\| = \max_{j\in I}\|g-\varphi_j\|.$$

Нехай далі $V$ — лінійний підпростір розмірності $n$ простору $C(S)$, породжений лінійно незалежними функціями $f_i\in C(S)$, $i=\overline{1,n}$.

Задачею найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї $\{\varphi_j,\ j\in I\}\in G$ підпростором $V$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha^* = \inf_{g\in V}\max_{j\in I}\|g-\varphi_j\|. \tag{1}$$

Екстремальним елементом для величини (1) будемо називати елемент $g^*\in V$ такий, що

$$\alpha^* = \max_{j\in I}\|g^*-\varphi_j\|.$$

**Теорема 1.** *Нехай* $\{\varphi_j,\ j\in I\}\in G$. *Тоді для задачі відшукання величини* (1) *екстремальний елемент існує.*

***Доведення.*** За характеристичною властивістю точної нижньої межі існує послідовність $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $g_k\in V$, така, що $\alpha^*\le\max_{j\in I}\|g_k-\varphi_j\| < \alpha^* + 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$ .

Для всіх $k = 1, 2, \ldots,$ і $j_1 \in I$ маємо

$$\|g_k\| = \|g_k - \varphi_{j_1} + \varphi_{j_1}\| \le \|g_k - \varphi_{j_1}\| + \|\varphi_{j_1}\| \le$$

$$\le \max_{j \in I} \|g_k - \varphi_j\| + \|\varphi_{j_1}\| < \alpha^* + \|\varphi_{j_1}\| + 1.$$

Отже, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обмежена послідовність скінченновимірного лінійного простору $V$.

Тоді з неї можна вибрати збіжну підпослідовність $\{g_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\lim_{m \to \infty} g_{k_m} = g^*$. Оскільки $V$ — замкнена множина, то $g^* \in V$.

Перейшовши в нерівності $\alpha^* \le \max_{j \in I} \|g_{k_m} - \varphi_j\| < \alpha^* + 1/k_m$, $m = 1, 2, \ldots,$ до границі при $m \to \infty$ та врахувавши неперервність функції $\Lambda(g) = \max_{j \in I} \|g - \varphi_j\|$, одержимо

$$\max_{j \in I} \|g^* - \varphi_j\| = \alpha^*.$$

Отже, $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1).

Теорему доведено.

Нехай для сім'ї $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G$

$$\overline{\alpha} = \inf_{g \in C(S)} \max_{j \in I} \|g - \varphi_j\|.$$

Зрозуміло, що $\overline{\alpha} \le \alpha^*$. У подальшому будемо припускати, що обмеження $g \in V$ є суттєвим, тобто $\alpha^* > \overline{\alpha}$. При цій умові розглянемо критерії екстремального елемента для величини (1).

Нехай для вектора $g^* \in V$

$$C_0 = \left\{ g \in C(S) \colon \max_{j \in I} \|g - \varphi_j\| < \max_{j \in I} \|g^* - \varphi_j\| \right\},$$

$$I_{g^*} = \left\{ j \in I \colon \|g^* - \varphi_j\| = \max_{j \in I} \|g^* - \varphi_j\| \right\},$$

$$E_j^+(g^*) = \left\{ s \in S \colon g^*(s) - \varphi_j(s) = \|g^* - \varphi_j\| \right\},$$

$$E_j^-(g^*) = \left\{ s \in S \colon -\big(g^*(s) - \varphi_j(s)\big) = \|g^* - \varphi_j\| \right\},$$

$$E_j(g^*) = E_j^+(g^*) \cup E_j^-(g^*), \qquad j \in I,$$

$$E^+(g^*) = \bigcup_{j \in I_{g^*}} E_j^+(g^*), \qquad E^-(g^*) = \bigcup_{j \in I_{g^*}} E_j^-(g^*),$$

$$E(g^*) = E^+(g^*) \cup E^-(g^*),$$

$$J_{g^*} = \left\{ i \in \{1, 2\} \colon \|g^* - \Phi_i\| = \max_{1 \le i \le 2} \|g^* - \Phi_i\| \right\},$$

$$A_i^+(g^*) = \left\{ s \in S \colon g^*(s) - \Phi_i(s) = \|g^* - \Phi_i\| \right\},$$

$$A_i^-(g^*) = \left\{ s \in S \colon -\big(g^*(s) - \Phi_i(s)\big) = \|g^* - \Phi_i\| \right\},$$

$$A_i(g^*) = A_i^+(g^*) \cup A_i^-(g^*), \quad i \in J_{g^*},$$

$$A^+(g^*) = \bigcup_{i \in J_{g^*}} A_i^+(g^*), \qquad A^-(g^*) = \bigcup_{i \in J_{g^*}} A_i^-(g^*).$$

Крім того, згідно з [6, с. 12, 13] через $\Gamma(C_0, g^*)$ позначимо конус внутрішніх напрямків для $C_0$ із $g^*$, а через $\Gamma^*(V, g^*)$ — конус граничних напрямків для $V$ із $g^*$. При цьому $g \in \Gamma(C_0, g^*)$, якщо існує окіл $O_g$ точки $g$ та дійсне число $\varepsilon > 0$ такі, що $g^* + th \in C_0$ для всіх $h \in O_g$ і всіх $t \in (0, \varepsilon)$, а $g \in \Gamma^*(V, g^*)$, якщо для довільного околу $O_g$ точки $g$ та дійсного числа $\varepsilon > 0$ існують такі $h \in O_g$ та $t \in (0, \varepsilon)$, що $g^* + th \in V$.

З умови $\alpha^* > \overline{\alpha}$ випливає, що $C_0 \neq \varnothing$ для всіх $g^* \in V$.

**Твердження 1.** *Нехай* $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G$. *Для будь-якого вектора* $g^* \in V$ *має місце рівність*

$$E^+(g^*) = A^+(g^*), \qquad E^-(g^*) = A^-(g^*).$$

**Твердження 2.** *Нехай* $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G$. *Для довільного вектора* $g^* \in V$ *має місце рівність*

$$\Gamma(C_0, g^*) = \left\{ g \in C(S) \colon \operatorname{sgn}\left(g^*(s) - \varphi_j(s)\right) g(s) < 0,\ j \in I_{g^*},\ s \in E_j(g^*) \right\}.$$

**Теорема 2.** *Нехай* $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним для величини* (1), *необхідно і досить, щоб не існував такий елемент* $g \in V$, *що*

$$\operatorname{sgn}\left(g^*(s) - \varphi_j(s)\right) g(s) < 0, \qquad j \in I_{g^*}, \quad s \in E_j(g^*). \tag{2}$$

***Доведення.*** Згідно з теоремою 1.4.4 [6, с. 23] елемент $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\Gamma(C_0, g^*) \cap \Gamma(V, g^*) = \varnothing. \tag{3}$$

Нехай $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1). Тоді (3) має місце. Враховуючи твердження 2 і той факт, що $\Gamma^*(V, g^*) = V$, робимо висновок, що $V$ не має елемента $g$, для якого виконується співвідношення (2). Навпаки, якщо $V$ не має елемента $g$, що задовольняє (2), то справедлива рівність (3). Тому $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1).

Теорему доведено.

Позначимо через $F$ неперервне відображення із $S$ в $R^n$: $F : s \in S \to \to (f_1(s), \ldots, f_n(s)) \in R^n$. Нехай для $g^* \in V$ і $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G$

$$L^+(g^*) = F(E^+(g^*)), \qquad L^-(g^*) = -F(E^-(g^*)),$$

$$L(g^*) = L^+(g^*) \cup L^-(g^*).$$

***Наслідок.*** *Нехай* $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини* (1), *необхідно і досить, щоб* $0 \in \operatorname{co} L(g^*)$, *де* $\operatorname{co} L(g^*)$ — *опукла оболонка множини* $L(g^*)$.

***Доведення.*** *Необхідність.* Нехай $g^* \in V$ — екстремальний елемент для величини (1). Згідно з теоремою 2

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \rho_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \varepsilon_i ( f_1(s_i),\ldots, f_n(s_i))$$

випливає

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i \varepsilon_i f_j(s_i) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тому для всіх

$$g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \in V$$

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i \varepsilon_i g(s_i) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \varepsilon_i \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \right)(s_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left( \sum_{i=1}^{k} \rho_i \varepsilon_i f_j(s_i) \right) = 0.$$

Необхідність доведено.

*Достатність.* Нехай для точок $s_i \in S$, чисел $\varepsilon_i = \pm 1$, додатних чисел $\rho_i$, $i = \overline{1, k}$, $k \le n+1$, і елемента $g^* \in V$ виконуються рівності (4), (5).

Доведемо, що $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1). З (4) та (5) для будь-якого $g \in V$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^{k} \rho_i} \max_{j \in I} \| g^* - \varphi_j \| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^{k} \rho_i} \varepsilon_i (g^*(s_i) - g(s_i)) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^{k} \rho_i} \varepsilon_i (g(s_i) - \varphi_{j_i}(s_i)) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^{k} \rho_i} \| g - \varphi_{j_i} \| \le \max_{j \in I} \| g - \varphi_j \|.$$

Звідси випливає, що $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1).

Теорему доведено.

Розглянемо деякі питання, що стосуються єдиності екстремального елемента для величини (1). Будемо припускати, що $S$ містить не менше $n+1$ точок і система функцій $\{ f_1, \ldots , f_n\}$ задовольняє умову Хаара, тобто $\det\left[ f_j(s_i) \right] \ne 0$ для довільних (різних) точок $s_i \in S$, $i = \overline{1, n}$.

**Лема 1.** *Нехай* $\{ \varphi_j,\ j \in I\} \in G$, $\alpha^* > \overline{\alpha}$ *i* $g^* \in V$. *Має місце рівність* $E^+(g^*) \cap E^-(g^*) = \varnothing$.

**Лема 2.** *Нехай* $\{ \varphi_j,\ j \in I\} \in G$, $\alpha^* > \overline{\alpha}$. *Якщо умова Хаара виконується і* $g^*$ *— екстремальний елемент для величини* (1), *то множина* $E(g^*)$ *має не менше* $n+1$ *точок.*

***Доведення.*** Припустимо, що множина $E(g^*) = \{s_j,\ j = \overline{1, k},\ k < n+1\}$. Розглянемо систему $k$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(s_j) = \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, k}, \quad \text{де} \quad \varepsilon_j = \begin{cases} +1, & s_j \in E^-(g^*); \\ -1, & s_j \in E^+(g^*). \end{cases}$$

Оскільки $E^+(g^*) \cap E^-(g^*) = \varnothing$ (див. лему 1) та система функцій $\{ f_1, \ldots$

$$C = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \operatorname{sgn}(g^*(s) - \varphi_j(s)) \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(s) < 0,\ j \in I_{g^*},\ s \in E_j(g^*) \right\} = \varnothing.$$

Врахувавши введені вище позначення, запишемо $C$ у вигляді

$$C = \left\{ x \in R^n : \langle e, x \rangle < 0, e \in L(g^*) \right\} = \varnothing.$$

Оскільки множини $A_i^+(g^*)$ та $A_i^-(g^*)$, $i \in J_{g^*}$, є замкненими підмножинами компакта $S$, то вони теж є компактами. Тоді компактами будуть множини $A_i(g^*)$, $i \in J_{g^*}$, $A^+(g^*)$, $A^-(g^*)$, як об'єднання кількох компактів. Згідно з твердженням 1 $E^+(g^*) = A^+(g^*)$, $E^-(g^*) = A^-(g^*)$. Звідси випливає, що компактами будуть множини $E^+(g^*)$, $E^-(g^*)$ і, отже, множини $L^+(g^*)$ та $L^-(g^*)$, як образи компактів при неперервному відображенні, а також множина $L(g^*)$, як об'єднання двох компактів.

Далі, згідно з теоремою 3.3.5 [6, с. 90] із співвідношення $C = \varnothing$ випливає $0 \in \operatorname{co} L(g^*)$.

*Достатність.* Нехай $0 \in \operatorname{co} L(g^*)$. Згідно з теоремою 3.3.5 [6, с. 90] $C = \varnothing$. Звідси випливає, що не існує елемента $g \in V$, для якого виконуються умови (2). В силу теореми 2 $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1).

Наслідок доведено.

Тепер доведемо основну теорему характеризації екстремального елемента для величини (1).

**Теорема 3.** *Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини* (1), *необхідно і досить, щоб існували $k$ точок $s_i \in S$, цілі числа $\varepsilon_i = \pm 1$, додатні числа $\rho_i$ та індекси $j_i \in I_{g^*}$, $i = \overline{1,k}$, $k \le n+1$, такі, що задовольняють умови*

$$\varepsilon_i(g^*(s_i) - \varphi_{j_i}(s_i)) = \max_{j \in I} \| g^* - \varphi_j \|, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i \varepsilon_i g(s_i) = 0 \quad \text{для всіх} \quad g \in V. \tag{5}$$

***Доведення.*** *Необхідність.* Нехай $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1). На підставі наслідку $0 \in \operatorname{co} L(g^*)$. Згідно з теоремою Каратеодорі (див., наприклад, [6, с. 76]) з цього співвідношення випливає, що існують $e_i \in L(g^*)$ та числа $\rho_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, $k \le n+1$, $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$ такі, що $\sum_{i=1}^{k} \rho_i e_i = 0$.

За означенням множини $L(g^*)$ для кожного $i \in \{1, \ldots, k\}$ існують $j_i \in I_{g^*}$ та $s_i \in E_{j_i}(g^*)$ такі, що $e_i = \operatorname{sgn}(g^*(s_i) - \varphi_{j_i}(s_i))(f_1(s_i), \ldots, f_n(s_i))$, $i = \overline{1,k}$.

Позначимо $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(g^*(s_i) - \varphi_{j_i}(s_i))$, $i = \overline{1,k}$. Оскільки $s_i \in E_{j_i}(g^*)$, $j_i \in I_{g^*}$, то

$$\varepsilon_i(g^*(s_i) - \varphi_{j_i}(s_i)) = \left| g^*(s_i) - \varphi_{j_i}(s_i) \right| = \| g^* - \varphi_{j_i} \| = \max_{j \in I} \| g^* - \varphi_j \|.$$

Отже, рівність (4) доведено.

З рівності

$\ldots, f_n\}$ задовольняє умову Хаара, ця система лінійних рівнянь сумісна. Нехай $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — її розв'язок.

Розглянемо функцію

$$\bar{g}(s) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i(s).$$

Для цієї функції маємо $\operatorname{sgn}(g^*(s) - \varphi_j(s))\bar{g}(s) < 0,\ j \in I_{g^*},\ s \in E_j(g^*)$.

Згідно з теоремою 2 $g^*$ не є екстремальним елементом для величини (1). Тому множина $E(g^*)$ містить не менше $n+1$ точок.

Лему доведено.

**Теорема 4.** *Нехай* $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G,\ \alpha^* > \bar{\alpha}$. *Якщо система функцій* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *задовольняє умову Хаара, то екстремальний елемент для величини* (1) *єдиний.*

***Доведення.*** Припустимо, що $g_1^*$ і $g_2^*$ — різні екстремальні елементи для величини (1). Розглянемо елемент $g^* = \left(g_1^* + g_2^*\right)/2$. Маємо

$$\alpha^* \le \max_{j \in I}\|g^* - \varphi_j\| = \max_{j \in I}\left\|\frac{g_1^* + g_2^*}{2} - \varphi_j\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\max_{j \in I}\|g_1^* - \varphi_j\| + \frac{1}{2}\max_{j \in I}\|g_2^* - \varphi_j\| = \frac{1}{2}\alpha^* + \frac{1}{2}\alpha^* = \alpha^*.$$

Звідси випливає, що $g^*$ — екстремальний елемент для величини (1). Згідно з лемою 2 $E(g^*)$ містить не менше $n+1$ точок.

Нехай $s \in E(g^*)$ і, наприклад, $s \in E_{j_s}^+(g^*)$, де $j_s \in I_{g^*}$. Тоді

$$g^*(s) - \varphi_{j_s}(s) = \|g^* - \varphi_{j_s}\| = \alpha^*.$$

Звідси

$$\frac{g_1^*(s) + g_2^*(s)}{2} - \varphi_{j_s}(s) = \alpha^*,$$

$$2\alpha^* = g_1^*(s) - \varphi_{j_s}(s) + g_2^*(s) - \varphi_{j_s}(s) \le \|g_1^* - \varphi_{j_s}\| + \|g_2^* - \varphi_{j_s}\| \le$$

$$\le \max_{j \in I}\|g_1^* - \varphi_j\| + \max_{j \in I}\|g_2^* - \varphi_j\| = 2\alpha^*.$$

Тому $g_1^*(s) - \varphi_{j_s}(s) = g_2^*(s) - \varphi_{j_s}(s) = \alpha^*$ і, отже, $g_1^*(s) = g_2^*(s)$ для всіх $s \in E(g^*)$.

Оскільки система функцій $\{f_1, \ldots, f_n\}$ задовольняє умову Хаара та $E(g^*)$ містить не менше $n+1$ точок, звідси випливає $g_1^* = g_2^*$, що суперечить припущенню.

Теорему доведено.

**Теорема 5.** *Нехай* $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G,\ \alpha^* > \bar{\alpha}$ *та система функцій* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *задовольняє умову Хаара. Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини* (1), *необхідно і досить, щоб існували точки* $s_i \in S$, *числа* $\varepsilon_i = \pm 1$, *додатні числа* $\rho_i$ *та функції* $\varphi_{j_i} \in \{\varphi_j,\ j \in I\}$, $i = \overline{1, n+1}$, *такі, що задовольняють умови*

$$\varepsilon_i\left(g^*(s_i)-\varphi_{j_i}(s_i)\right) = \left\|g^* - \varphi_{j_i}\right\| = \max_{j\in I}\left\|g^* - \varphi_j\right\|, \quad i = \overline{1, n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i\,\varepsilon_i g(s_i) = 0 \quad \textit{для всіх} \quad g \in V.$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає з теореми 3, леми 1 та твердження 3.4.5 [6, с. 94].

Сформулюємо теорему характеризації екстремального елемента у випадку наближення на відрізку.

**Теорема 6.** *Нехай* $S = [a; b]$ — *сегмент числової прямої,* $\{\varphi_j,\ j \in I\} \in G$ *і система функцій* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *задовольняє умову Хаара. Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини* (1) *в цьому випадку, необхідно і досить, щоб існували точки* $s_1 < s_2 < \ldots < s_{n+1}$ *на* $[a; b]$ *та функції* $\varphi_{j_i}$, $j_i \in I$, $i = \overline{1, n+1}$, *що задовольняють умови*

$$\left|g^*(s_i)-\varphi_{j_i}(s_i)\right| = \left\|g^* - \varphi_{j_i}\right\| = \max_{j\in I}\left\|g^* - \varphi_j\right\|, \quad i = \overline{1, n+1}, \tag{6}$$

$$g^*(s_i) - \varphi_{j_i}(s_i) = -\left(g^*(s_{i+1}) - \varphi_{j_{i+1}}(s_{i+1})\right), \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Справедливість теореми випливає з теореми 5, твердження 3.5.1 [6, с. 98] та теореми 3.4.5 [6, с. 94].


1. *Зуховицкий С. И.* О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, вып. 2(65). – С. 125 – 159.
2. *Гаркави А. Л.* О чебышовском центре и выпуклой оболочке множества // Там же. – 1964. – **19**, вып. 6(120). – С. 139 – 145.
3. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 351 с.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
5. *Гнатюк Ю. В.* Проблема моментів з узагальненими моментами із многогранника // Нелінійні крайові задачі математичної фізики і їх застосування: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – Ч. 2. – С. 25 – 27.
6. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.


Одержано 26.12.2000,
після доопрацювання — 19.03.2002