УДК 517.9

К. Г. Валеев, И. А. Джалладова (Киев. нац. эконом. ун-т)

ВЫВОД МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

We present a new method for deriving moment equations of solutions of a system of nonlinear differential equations that depend on a finite-valued semi-Markov process. For systems of linear equations, we compare the results obtained with the known ones.

Наведено новий метод виводу моментних рівнянь для розв'язків системи нелінійних рівнянь, що залежить від кінцевозначного напівмарковського процесу. Для систем лінійних рівнянь зроблено порівняння з відомими результатами.

В настоящей статье приведен новый метод вывода моментных уравнений для решений системы нелинейных уравнений, правая часть которых зависит от полумарковского процесса [1, 2].

1. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X, \xi(t)) \qquad X(t) \in E_m, \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — полумарковский случайный процесс, принимающий конечное число состояний $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ и определяемый интенсивностями $q_{sk}(t)$, $s, k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, которые удовлетворяют условиям

$$q_{sk}(t) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad \int_0^\infty \sum_{s=1}^n q_{sk}(t)dt = 1, \quad k, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Вероятность перехода скачком процесса $\xi(t)$ из положения θ_k в положение θ_s за время $[t; t + dt]$ равна $q_{sk}(t)dt$.

Введем функции

$$\psi_k(t) = \int_t^\infty q_k(\tau)d\tau, \qquad q_k(\tau) = \sum_{s=1}^n q_{sk}(t). \tag{2}$$

Если процесс $\xi(t)$ в момент $t = 0$ скачком попал в положение θ_k, то $\psi(t)$ — вероятность того, что процесс $\xi(t)$ остается в положении θ_k в течение времени $[0; t)$.

В частном случае, когда процесс $\xi(t)$ марковский и вероятности

$$p_k(t) = \mathrm{P}(\xi(t) = \theta_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ks}p_s(t), a_{kk} < 0, \qquad a_{ks} > 0, \quad k \neq s,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ks} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

получаем [3]

$$\psi_k(t) = e^{a_{kk}t}, \quad q_{sk}(t) = a_{ks}e^{a_{kk}t}, \quad s \neq k, \quad q_{kk}(t) \equiv 0. \tag{3}$$

Пусть $F_k(t, X) = F(t, X, \theta_k)$, $k = 1, \dots, n$. Введем систему уравнений

$$\frac{dX}{dt} = F_k(t, X), \quad k = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Предполагаем, что решения системы (4) продолжимы при $t \geq 0$ на всю числовую ось. Пусть $X(t) = R_k(t, X(\tau))$, $k = 1, \dots, n$, $R_k(\tau, X(\tau)) \equiv X(\tau)$, — решение системы (4) в форме Коши.

2. Пусть $t = 0$ — момент скачка $\xi(t)$. Введем условные математические ожидания случайных решений

$$M_k(t, X) = \langle X(t) | X(0) = X, \xi(0) = \theta_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Процесс $\xi(t)$ будем считать непрерывным справа в точках скачков. С вероятностью $\psi(t)$ процесс остается в состоянии и с плотностями вероятностей $q_{sk}(t)$ переходит из состояния θ_k в состояние θ_s.

Отыскание математического ожидания решения системы (4) при $t \geq 0$ сведено к решению интегральных уравнений типа уравнений марковского восстановления

$$M_k(t, X) = \psi_k(t)R(t, 0, X) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau)M_k(t-\tau, R_k(\tau, 0, X))\,d\tau, \quad k = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Если дискретно-непрерывный случайный процесс $(\xi(t), X(t))$ в начальный момент при $t = 0$ имел плотность распределения

$$f(0, X, \xi) = \sum_{k=1}^n f_k(0, X)\delta(\xi - \theta_k),$$

то математическое ожидание случайного решения системы (1) может быть найдено по формуле

$$\langle X(t) \rangle = \sum_{k=1}^n \iint_{E_m} \dots \int M_k(t, X) f_k(0, X)\,dX. \tag{7}$$

Если система дифференциальных уравнений (1) линейна и имеет вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\xi(t))X(t), \quad A_k \equiv A(\theta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{8}$$

то система уравнений (6) принимает вид

$$M_k(t)X = \psi_k(t)e^{A_k t}X + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau)M_s(t-\tau)e^{A_k \tau}X\,d\tau, \quad k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Моментные уравнения (9) позволяют найти математическое ожидание случайного решения системы (8) по формуле

$$\langle X(t) \rangle = \sum_{k=1}^n M_k(t)X_k, \quad X_k \equiv \langle X(0) | \xi(0) = \theta_k \rangle \mathrm{P}(\xi(0) = \theta_k).$$

3. Пусть $\xi(t)$ — марковский случайный процесс, который можно рассматривать как полумарковский процесс с интенсивностями (3). Математическое ожидание случайного решения определяется системой уравнений вида (9):

$$M_k(t) = e^{a_{kk}t}e^{A_k t} + \int_0^t \sum_{s=1,\, s\neq k}^{n} a_{sk} e^{a_{kk}\tau} M_s(t-\tau) e^{A_k \tau} d\tau, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Введем изображение по Лапласу матриц $M_k(t)$:

$$V_k(p) = \int_0^\infty M_k(t) e^{-pt} dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

при этом получим систему уравнений

$$V_k(p) = (Ep - Ea_{kk} - A_k)^{-1} + \sum_{s=1,\, s\neq k}^{n} a_{sk} V_s(p)(Ep - Ea_{kk} - A_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

из которой следуют уравнения

$$V_k(p)(Ep - Ea_{kk} - A_k) = E + \sum_{s=1,\, s\neq k}^{n} a_{sk} V_s(p), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Эту систему уравнений можно записать так:

$$pV_k(p) = E + V_k(p)A_k + \sum_{s=1}^{n} a_{sk} V_s(p), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

или в матричном виде

$$(V_1(p) \quad V_2(p) \quad \ldots \quad V_n(p)) H(p) = E, \tag{12}$$

где

$$H(p) = \begin{pmatrix} pE - A_1 - a_{11}E & -a_{12}E & \ldots & -a_{1n}E \\ -a_{21} & pE - A_2 - a_{22}E & \ldots & -a_{2n}E \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1}E & -a_{n2} & \ldots & pE - A_n - a_{nn}E \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Изображение по Лапласу математического ожидания можно найти по формуле

$$V(p) = \int_0^\infty \langle X(t) \rangle e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{n} V_k(p) X_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Из формул (12), (13) получаем

$$V(p) = EH^{-1}(p) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В работе [4] приведены моментные уравнения, полученные другим путем:

$$\begin{gathered} \frac{dQ_k(t)}{dt} = A_k Q_k(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{ks} Q_s(t), \quad Q(0) = X_k, \\ \langle X(t) \rangle = \sum_{k=1}^{n} Q_k(t) = Q(t). \end{gathered} \tag{16}$$

Введем изображение по Лапласу векторов

$$W_k(p) = \int_0^\infty Q_k(t)e^{-pt}dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad W(p) = \int_0^\infty Q(t)e^{-pt}dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из системы уравнений

$$pW_k(p) = E + W_k(p)A_k + \sum_{s=1}^{n} a_{sk}W_s(p), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

находим векторы

$$\begin{pmatrix} W_1(p) \\ W_2(p) \\ \ldots \\ W_n(p) \end{pmatrix} = H^{-1}(p)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix},$$

$$W(p) = \sum_{k=1}^{n} W_k(t) = EH^{-1}(p)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Из сравнения формул (15), (17) видно, что $V(p) = W(p)$, т.е. математические ожидания случайного решения, полученные разными способами, тождественно совпадают.

Пример. Исследуем устойчивость нулевого решения линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t),$$

где $\xi(t)$ — полумарковский процесс, принимающий два состояния: θ_1 и θ_2.

Предполагаем, что

$$a(\theta_k) \equiv a_k, \quad k = 1, 2,$$

$$q_{12} = q_{21} = \begin{cases} \dfrac{1}{T}, & 0 \le t \le T; \\ 0, & t > T, \end{cases} \tag{18}$$

$$q_{11}(t) = q_{22}(t) \equiv 0.$$

Функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ находим по формулам (3):

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = 1 - \frac{t}{T}, \quad 0 \le t \le T,$$

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0, \quad t > T.$$

Система уравнений (9) принимает вид

$$M_1(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)e^{a_1 t} + \int_0^T \frac{1}{T} M_2(t-\tau)e^{a_1\tau}d\tau,$$

$$M_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)e^{a_2 t} + \int_0^T \frac{1}{T} M_1(t-\tau)e^{a_2\tau}d\tau.$$

Математическое ожидание $M(t) = \langle x(t) \rangle = M_1 + M_2 \to 0$, если $M_1(t) \to 0$, $M_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для исследования используем преобразование Лапласа. Полагаем

$$y_k(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} M_k(t) dt,$$

$$f_k(p) = \frac{1}{p - a_k} - \frac{1}{T(p - a_k)^2}, \quad k = 1, 2, \tag{19}$$

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{T} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pt}}{T}.$$

С учетом (19) из (18) получаем систему уравнений

$$y_1(p) = f_1(p) + \varphi(p - a_1) y_2(p),$$

$$y_2(p) = f_2(p) + \varphi(p - a_1) y_1(p).$$

Особые точки изображений $y_k(p)$, $k = 1, 2$, определяются из уравнения

$$1 - \varphi(p - a_1)\varphi(p - a_2) = 0.$$

Полагая $p = 0$, с учетом (19) находим уравнение для границы области неустойчивости:

$$(e^{a_1 T} - 1)(e^{a_2 T} - 1) = a_1 a_2 T^2.$$

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 192 с.
2. *Тихонов В. И., Миронов Н. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.
4. *Валеев К. Г., Стрижак О. Л.* Метод моментных уравнений. – Киев, 1985. – 56 с.

Получено 15.05.2002